Das Stable-Matching-Problem

Algorithmen und Datenstrukturen 1
VU 186.813, 4h, 6 ECTS, SS 2016
Letzte Änderung: 2. März 2016

ALGORITHMS AND COMPLEXITY GROUP

Stable-Matching-Problem

Gegeben seien n Männer und n Frauen, die z.B. an einem Tanzturnier teilnehmen.

Ziel: Finde eine passende Zuordnung von Paaren.

- Jeder Mann hat eine Präferenzliste von Frauen.
- Jede Frau hat eine Präferenzliste von Männern.

höchste Präferenz → 1., niedrigste Präferenz → 3.

	1.	2.	3.
Xaver	Anna	Berta	Caroline
Yannis	Berta	Anna	Caroline
Ziggy	Anna	Berta	Caroline

Präferenzlisten der Männer

höchste Präferenz → 1., niedrigste Präferenz → 3.

	1.	2.	3.
Anna	Yannis	Xaver	Ziggy
Berta	Xaver	Yannis	Ziggy
Caroline	Xaver	Yannis	Ziggy

Präferenzlisten der Frauen

Stable-Matching-Problem

Perfektes Matching: Jede Person wird genau einer anderen Person zugewiesen.

- Jeder Mann bekommt genau eine Frau.
- Jede Frau bekommt genau einen Mann.

Instabiles Paar:

- In einem Matching M ist ein nicht zugewiesenes Paar m-w instabil, wenn ein Mann m und eine Frau w sich gegenseitig gegenüber Ihren aktuellen Partnern bevorzugen.
- Das instabile Paar m-w könnte seine Situation durch Verlassen der aktuellen Partner verbessern.

Stable Matching: Perfektes Matching ohne instabile Paare. Es besteht daher für kein Paar der Anreiz, durch gemeinsames Handeln die Zuteilung zu unterlaufen.

Stable-Matching-Problem: Ausgehend von den Präferenzlisten von n Männern und n Frauen, finde ein Stable Matching, wenn eines existiert.

Stable-Matching-Problem

Frage: Ist die Zuordnung X-C, Y-B, Z-A stabil?

höchste Präferenz → 1., niedrigste Präferenz → 3.

	1.	2.	3.
Xaver	Anna	Berta	Caroline
Yannis	Berta	Anna	Caroline
Ziggy	Anna	Berta	Caroline

Präferenzlisten der Männer

höchste Präferenz → 1., niedrigste Präferenz → 3.

	1.	2.	3.
Anna	Yannis	Xaver	Ziggy
Berta	Xaver	Yannis	Ziggy
Caroline	Xaver	Yannis	Ziggy

Präferenzlisten der Frauen

Stable-Matching-Problem

Frage: Ist die Zuordnung X-C, Y-B, Z-A stabil?
Antwort: Nein. Berta und Xaver können ihre Situation verbessern (Xaver-Berta ist ein instabiles Paar).

höchste Präferenz → 1.; niedrigste Präferenz → 3.

	1.	2.	3.
Xaver	Anna	Berta	Caroline
Yannis	Berta	Anna	Caroline
Ziggy	Anna	Berta	Caroline

Präferenzlisten der Männer

höchste Präferenz → 1.; niedrigste Präferenz → 3.

	1.	2.	3.
Anna	Yannis	Xaver	Ziggy
Berta	Xaver	Yannis	Ziggy
Caroline	Xaver	Yannis	Ziggy

Präferenzlisten der Frauen

Stable-Matching-Problem

Frage: Ist die Zuordnung X-A, Y-B, Z-C stabil?
Antwort: Ja. Es gibt kein instabiles Paar.

höchste Präferenz ↓ (1.) niedrigste Präferenz ↓ (3.)

	1.	2.	3.
Xaver	Anna	Berta	Caroline
Yannis	Berta	Anna	Caroline
Ziggy	Anna	Berta	Caroline

Präferenzlisten der Männer

höchste Präferenz ↓ (1.) niedrigste Präferenz ↓ (3.)

	1.	2.	3.
Anna	Yannis	Xaver	Ziggy
Berta	Xaver	Yannis	Ziggy
Caroline	Xaver	Yannis	Ziggy

Präferenzlisten der Frauen

Stable-Matching-Problem: Fragen

Frage: Gibt es immer ein Stable Matching?
Hinweis: Das ist nicht von vornherein klar!

Frage: Kann ein Stable Matching effizient gefunden werden?
Hinweis: Brute-Force-Ansatz (alle möglichen Zuordnungen ausprobieren) betrachtet $n!$ viele mögliche Lösungen, was extrem ineffizient ist.

Gale-Shapley-Algorithmus: Wir stellen einen Algorithmus vor, mit dem wir beide Fragen mit „Ja“ beantworten können.

Gale–Shapley-Algorithmus (GS-Algorithmus)

Gale-Shapley-Algorithmus:

- 1962 gaben David Gale und Lloyd Shapley einen Algorithmus zum Auffinden von Stable Matchings an.
- Shapley bekam für seine Arbeiten (einschließlich Stable Matching) den Wirtschaftsnobelpreis 2012.

D. Gale and L. S. Shapley: College Admissions and the Stability of Marriage, American Mathematical Monthly, Vol. 69, 1962, Seite 9–15

Anwendung: Das Stable-Matching-Problem hat viele Anwendungen, z.B. bei der Zuteilung von Medizinstudenten an das erste Krankenhaus, in dem sie ihren Turnus ableisten.

Gale and Shapley 1962

COLLEGE ADMISSIONS AND THE STABILITY OF MARRIAGE

D. GALE* AND L. S. SHAPLEY, Brown University and the RAND Corporation

1. Introduction. The problem with which we shall be concerned relates to the following typical situation: A college is considering a set of n applicants of which it can admit a quota of only q. Having evaluated their qualifications, the admissions office must decide which ones to admit. The procedure of offering admission only to the q best-qualified applicants will not generally be satisfactory, for it cannot be assumed that all who are offered admission will accept. Accordingly, in order for a college to receive q acceptances, it will generally have to offer to admit more than q applicants. The problem of determining how many and which ones to admit requires some rather involved guesswork. It may not be known (a) whether a given applicant has also applied elsewhere; if this is known it may not be known (b) how he ranks the colleges to which he has applied; even if this is known it will not be known (c) which of the other colleges will offer to admit him. A result of all this uncertainty is that colleges can expect only that the entering class will come reasonably close in numbers to the desired quota, and be reasonably close to the attainable optimum in quality.

Gale–Shapley-Algorithmus (GS-Algorithmus)

Gale-Shapley-Algorithmus:

```
Kennzeichne jede Person als frei
while ein Mann ist frei und kann noch einen Antrag machen
    Wähle solch einen Mann m aus
    w ist erste Frau in der Präferenzliste von m,
    der m noch keinen Antrag gemacht hat
    if w ist frei
        Kennzeichne m und w als einander zugeordnet
    elseif w bevorzugt m gegenüber ihrem aktuellen Partner m'
        Kennzeichne m und w als einander zugeordnet und m' als frei
    else
        w weist m zurück
```

Beispiel für Ablauf

Ausgangssituation:

- 4 Männer (W-Z) mit Präferenzlisten (links).
- 4 Frauen (A-D) mit Präferenzlisten (rechts).

	1.	2.	3.	4.
W	B	A	C	D
X	C	B	A	D
Y	B	C	A	D
Z	B	A	D	C

	1.	2.	3.	4.
A	X	W	Y	Z
B	W	Y	X	Z
C	Z	Y	W	X
D	X	W	Y	Z

Beispiel für Ablauf

Erste Zuordnung:

- Wähle ersten freien Mann aus (z.B. W).
- Dieser macht der ersten Frau in seiner Präferenzliste einen Antrag (in diesem Fall B).
- Da B frei ist, werden die beiden einstweilig einander zugeordnet.
- Aktuelle Zuordnungen: W-B.

	1.	2.	3.	4.
W	B	A	C	D
X	C	B	A	D
Y	B	C	A	D
Z	B	A	D	C

	1.	2.	3.	4.
A	X	W	Y	Z
B	W	Y	X	Z
C	Z	Y	W	X
D	X	W	Y	Z

Beispiel für Ablauf

Zweite Zuordnung:

- Wähle nächsten freien Mann aus (z.B. X).
- Dieser macht der ersten Frau in seiner Präferenzliste einen Antrag (in diesem Fall C).
- Da C frei ist, werden die beiden einstweilig einander zugeordnet.
- Aktuelle Zuordnungen: W-B, X-C.

	1.	2.	3.	4.
W	B	A	C	D
X	C	B	A	D
Y	B	C	A	D
Z	B	A	D	C

	1.	2.	3.	4.
A	X	W	Y	Z
B	W	Y	X	Z
C	Z	Y	W	X
D	X	W	Y	Z

Beispiel für Ablauf

Dritte Zuordnung:

- Wähle nächsten freien Mann aus (z.B. Y).
- Dieser macht der ersten Frau in seiner Präferenzliste einen Antrag (in diesem Fall B).
- B ist aber W zugeordnet. In der Präferenzliste von B steht W vor Y, daher lässt B den Y abblitzen.
- Y macht der nächsten Frau in seiner Präferenzliste einen Antrag (in diesem Fall C).
- C bevorzugt Y vor ihrem Partner X, daher wird ihre Zuordnung zu X gelöst und statt dessen werden C und Y einander zugeordnet.
- Aktuelle Zuordnungen: W-B, Y-C.

	1.	2.	3.	4.
W	B	A	C	D
X	C	B	A	D
Y	B	C	A	D
Z	B	A	D	C

	1.	2.	3.	4.
A	X	W	Y	Z
B	W	Y	X	Z
C	Z	Y	W	X
D	X	W	Y	Z

Beispiel für Ablauf

Vierte Zuordnung:

- Wähle nächsten freien Mann aus, es ist X, der wieder frei geworden ist.
- X macht der zweiten Frau (B) auf seiner Präferenzliste einen Antrag.
- B bevorzugt W vor X.
- X macht der dritten Frau (A) auf seiner Präferenzliste einen Antrag.
- A ist frei und die beiden werden einander zugeordnet.
- Aktuelle Zuordnungen: W-B, X-A, Y-C.

	1.	2.	3.	4.
W	B	A	C	D
X	C	B	A	D
Y	B	C	A	D
Z	B	A	D	C

	1.	2.	3.	4.
A	X	W	Y	Z
B	W	Y	X	Z
C	Z	Y	W	X
D	X	W	Y	Z

Beispiel für Ablauf

Fünfte Zuordnung:

- Wähle nächsten freien Mann aus (nur mehr Z übrig).
- Z macht der ersten Frau (B) auf seiner Präferenzliste einen Antrag. B bevorzugt aber W vor Z.
- Z macht der zweiten Frau (A) auf seiner Präferenzliste einen Antrag. A bevorzugt aber X vor Z.
- Z macht der dritten Frau (D) auf seiner Präferenzliste einen Antrag.
- D ist frei, also werden Z und D einander zugeordnet.
- Aktuelle Zuordnungen: W-B, X-A, Y-C, Z-D.
- Es ist nun kein Mann mehr frei, und der Algorithmus terminiert. Wir haben ein Stable Matching gefunden.

	1.	2.	3.	4.
W	B	A	C	D
X	C	B	A	D
Y	B	C	A	D
Z	B	A	D	C

	1.	2.	3.	4.
A	X	W	Y	Z
B	W	Y	X	Z
C	Z	Y	W	X
D	X	W	Y	Z

Korrektheitsbeweis: Terminierung

Operation 1: Männer machen Frauen Anträge in absteigender Reihenfolge.

Operation 2: Sobald eine Frau zugewiesen wurde, bleibt sie zugewiesen, die Zuteilung kann sich aber ändern.

Behauptung: Algorithmus terminiert nach höchstens n^2 Iterationen der while-Schleife.

Beweis: In jeder Iteration der while-Schleife stellt ein Mann einen Antrag. Es gibt nur n^2 mögliche Anträge. $\square$

	1.	2.	3.	4.	5.
Valentin	A	B	C	D	E
Werner	B	C	D	A	E
Xaver	C	D	A	B	E
Yannis	D	A	B	C	E
Ziggy	A	B	C	D	E

	1.	2.	3.	4.	5.
Anna	W	X	Y	Z	V
Berta	X	Y	Z	V	W
Caroline	Y	Z	V	W	X
Dana	Z	V	W	X	Y
Elena	V	W	X	Y	Z

$n(n-1)+1$ Anträge erfoderlich

Korrektheitsbeweis: Abschluss

Behauptung: Alle Männer und Frauen werden zugewiesen.
Beweis: (durch Widerspruch)

- Angenommen, Mann m wurde nach Terminierung des Algorithmus nicht zugewiesen.
- Dann wurde auch eine Frau (z.B. w) nach Terminierung des Algorithmus nicht zugewiesen.
- Damit wurde w nie ein Antrag gemacht.
- Aber m macht jeder Frau in der Liste einen Antrag, da er ja am Ende nicht zugewiesen wurde. $\square$

Korrektheitsbeweis: Stabilität

Behauptung: Nachdem der Algorithmus terminiert, existieren keine instabilen Paare.
Beweis: (durch Widerspruch)

- Angenommen, m-w ist ein instabiles Paar: Jeder bevorzugt den anderen gegenüber dem aktuellen Partner in einem Gale-Shapley-Matching.
- Fall 1: m hat w nie einen Antrag gemacht.
  $\Rightarrow$ m bevorzugt seinen GS-Partner gegenüber w.
  $\Rightarrow$ m-w ist nicht instabil.
- Fall 2: m hat w einen Antrag gemacht.
  $\Rightarrow$ w hat m zurückgewiesen (gleich oder später)
  $\Rightarrow$ w bevorzugt m' gegenüber m.
  $\Rightarrow$ m-w ist nicht instabil.
- In jedem Fall ist m-w nicht instabil, was ein Widerspruch ist. □

□ *Männer machen ihre Anträge in absteigender Reihenfolge der Präferenzen* □ *Bei Frauen kann sich die Situation nur verbessern*

Zusammenfassung

Stable-Matching-Problem: Gegeben seien n Männer und n Frauen und ihre Präferenzen. Finde ein Stable Matching, wenn eines existiert.

Frage: Gibt es immer ein Stable Matching?

Frage: Kann ein Stable Matching effizient gefunden werden?

Gale-Shapley-Algorithmus: Findet garantiert ein Stable Matching für jede Probleminstanz. Da der Algorithmus höchstens n^2 Iterationen benötigt, findet er ein Stable Matching auf effiziente Weise.

Effiziente Implementierung

Zeitaufwand:

- Stable Matching benötigt höchstens n^2 Iterationen.
- Einzelne Schritte in einer Iteration können naiv (z.B. lineare Suche in Listen) implementiert werden.
- Dann benötigt man insgesamt höchstens n^3 Schritte.
- Das ist immer noch besser, als ein Brute-Force-Ansatz der alle möglichen Zuordnungen durchprobiert (es gibt $n!$ mögliche Zuordnungen).

Nächste Vorlesung:

- Mit asymptotischer Analyse können wir das exakt ausdrücken.
- Mit besseren Datenstrukturen können wir das auch schneller lösen.