1. Gegeben seien folgende lineare Abbildungen:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$h\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

(a) Bilden Sie die Funktion $h \circ f$!
Hinweis: z.B. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; $x \in \mathbb{R}^n$, n ist entsprechend zu wählen

(b) Bilden Sie die Funktion $f \circ h$!

(c) Ist die Funktion $h \circ g \circ f$ invertierbar?
(Stichhaltige Begründung)

(d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $g^{-1}(y)$ der Funktion $g(x)$ exakt!

2. Auf der Menge $\{a, b, c, d\}$ ist die Verknüpfungsoperation $\otimes$ durch folgende Tabelle gegeben:

$\otimes$	a	b	c	d
a	d	$\cdot$	b	a
b	c	d	a	b
c	b	$\cdot$	d	c
d	a	$\cdot$	c	d

In dieser Tabelle sind die fehlenden Elemente so einzusetzen, dass aus $(\{a, b, c, d\}, \otimes)$ eine Gruppe wird.

(a) Was ist das neutrale Element dieser Gruppe? (2)

(b) Ist die Gruppe kommutativ? (Begründung!) (2)

(c) Bestimmen Sie die inversen Elemente zu den Elementen a, b, c und d. (3)

(d) Bildet die Menge $\{c, d\}$ versehen mit der Verknüpfungsoperation $\otimes$ aus obiger Tabelle eine Gruppe? (Stichhaltige Begründung!) (3)

(e) Bildet die Menge $\{b, c, d\}$ versehen mit der Verknüpfungsoperation $\otimes$ aus obiger Tabelle eine Gruppe? (Stichhaltige Begründung!) (2)

3. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 10 \end{array}$$

(a) Lösen Sie dieses Gleichungssystem. Notieren Sie die Lösung in Parameterform! (4)

(b) Ermitteln Sie die Lösung des mit obigen Gleichungssystem korrespondierenden homogenen Gleichungssystems. Notieren Sie die Lösung ebenfalls in Parameterform! (2)

(c) Welche Dimension hat der Lösungsraum (die Lösung) dieses Gleichungssystems? (2)

(d) Ist die Koeffizientenmatrix A des Gleichungssystems invertierbar? (Stichhaltige Begründung) (2)

(e) Durch die Koeffizientenmatrix A des Gleichungssystems ist eine lineare Funktion $f_A(x) = Ax$ definiert. Welche Dimension hat der Kern dieser Abbildung, welche Dimension hat ihr Bild (Image)? (Nachvollziehbare Argumentation) (2)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 10 \end{array} \overset{(-1)}{\Rightarrow} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 10 \end{array}$$

$x_1 = 4$

$x_3 \overset{!}{=} 1$ $x_4 \overset{!}{=}$