UNIVERSITÄT WIEN
INSTITUT FÜR SCIENTIFIC COMPUTING

Mathematische Basistechniken 50064/3-5,9

Übungsblatt 3

Lineare Algebra – Lineare Abbildungen

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob die x_1-x_2-Ebene $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, ein Teilraum in $\mathbb{R}^3$, durch die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ erzeugt wird.

a) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis des durch diese Vektoren aufgespannten Raumes?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die zu folgenden linearen Abbildungen gehörigen Matrizen:

a) $f_1(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

b) $f_2(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

c) $f_3(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$

d) $f_4(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

e) $f_5(\begin{pmatrix} x_1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$

f) $f_6(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_3 \\ 5x_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die zur Matrix B gehörige lineare Abbildung g.

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

c) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Berechnen Sie folgende zusammengesetzte Abbildungen mit den Angaben aus Aufgabe 3.

a) $f_3 \circ f_1$

b) $f_5 \circ f_3$

c) $f_2 \circ f_2$

d) $f_6 \circ f_1 \circ f_6$

Aufgabe 6

Gegeben seien die linearen Abbildungen f und g:

$$f(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda_3 - \lambda_1 \\ \lambda_3 - \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad g(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \mu_2 - \mu_1 \\ -2\mu_1 \\ \mu_1 + 2\mu_2 \end{pmatrix}$$

Bilden Sie die Matrix-Darstellung von:

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$

c) $f \circ g \circ f$

Aufgabe 7

Gegeben seien:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $A\boldsymbol{x} + A^t\boldsymbol{y}$

b) $\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^tA\boldsymbol{y}$

c) $\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^tA\boldsymbol{x}$

Aufgabe 8

Berechnen Sie die inverse Abbildung f^{-1} von:

a) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

b) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

c) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9

Berechnen Sie die inverse Matrix von:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

Die Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung, welche mit der x-Achse den Winkel α einschließt, kann durch folgende Abbildungsmatrix dargestellt werden:

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Erklären Sie, warum diese Abbildungsmatrix das richtige Ergebnis liefert. Wie lauten die Koordinaten des Spiegelpunktes P_1, wenn Sie den Punkt $P(4|2)$ an der Geraden mit $\alpha = 30°$ spiegeln?