

Übungsblatt 4

Lineare Algebra – Determinanten

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$\text{a) } A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } B_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$\text{a) } A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie mit Hilfe des Entwicklungssatzes folgende Determinanten:

$$\text{a) } A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit Hilfe des Entwicklungssatzes folgende Determinanten:

$$\text{a) } A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 5

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Das Quadrat $ABCD[A(-5|4|-3), B(3|4|3), C, D(-5|-6|z_4)]$ ist Basis einer Pyramide, deren Spitze S der Schnittpunkt der drei Ebenen

$\varepsilon_1 : x - y + 2z = 9, \varepsilon_2 : 5x + y + z = 6, \varepsilon_3 : 2x + y - z = -3$ ist.

Berechnen Sie die Koordinaten von S und das Volumen dieser Pyramide.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die beiden Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ einander schneiden.}$$

Ihr Schnittpunkt S sei die Spitze eines Tetraeders, dessen Grundfläche durch das Dreieck $ABC[A(-4|-9|1), B(3|3|-1), C(6|-1|-3)]$ bestimmt ist. Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders.

Aufgabe 8

Es gilt folgender Satz:

Für eine n -quadratische Matrix ist die Ableitung $\frac{d}{dx}|A|$ gleich der Summe von n Determinanten, die man erhält, wenn man auf jede mögliche Art die Elemente einer Zeile von $|A|$ durch ihre Ableitung nach x ersetzt.

Beispielsweise erhält man bei einer 3×3 Matrix die Summe aus 3 Determinanten. Bei der ersten werden die Elemente der ersten Zeile nach x abgeleitet, bei der zweiten die Elemente der 2. Zeile und bei der dritten die der 3. Zeile.

Überprüfen Sie den Satz anhand folgender Determinante:

$$A = \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 9

Berechnen Sie folgende Determinante:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix}$$