UNIVERSITÄT WIEN
INSTITUT FÜR SCIENTIFIC COMPUTING

Mathematische Basistechniken 50064/3-5,9

Übungsblatt 5

Lineare Algebra – Eigenwerte und Eigenvektoren

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für folgende Matrix. Geben Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheit an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für folgende Matrix. Geben Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheit an:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

Es gilt: Ist A eine symmetrische Matrix, so sind die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren orthogonal. Überprüfen Sie das anhand folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Zwei Matrizen A und B heißen ähnlich, wenn es eine Matrix U gibt, sodass $B = U^{-1}AU$. Es gilt: Ähnliche Matrizen haben gleiche Eigenwerte. Überprüfen Sie das anhand folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Es gilt: Wenn eine quadratische Matrix A nur verschiedene Eigenwerte hat und T die Eigenvektormatrix ist, dann ist $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix. Überprüfen Sie das anhand folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

Es gilt: Ist A eine symmetrische Matrix, T die Matrix der zugehörigen, normierten Eigenvektoren, dann ist T eine orthonormale Matrix, d.h., $T^{-1} = T^t$, und T^tAT ist eine Diagonalmatrix. Überprüfen Sie das anhand folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$