

Übungsblatt 8

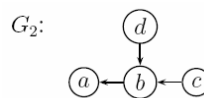
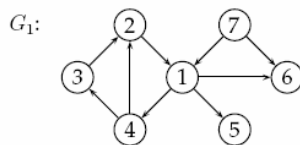
Graphentheorie

Aufgabe 1

Sei Graph G_1 gegeben durch: $V(G_1) = \{1, 2, \dots, 8\}$, $E(G_1) = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ teilt } y, x < y \}$ sowie Graph G_2 durch: $V(G_2) = \{1, 2, \dots, 5\}$, $E(G_2) = \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \leq x + 3 \}$. Bestimmen und zeichnen Sie $G_1 \cap G_2$ und $G_1 \cup G_2$.

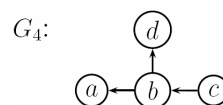
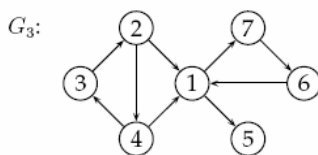
Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Quadrupel (a, b, c, d) , $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, 7\}$, sodass der von den Knoten a, b, c, d in G_1 aufgespannte Teilgraph mit G_2 identisch ist.



Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Quadrupel (a, b, c, d) , $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, 7\}$, sodass der von den Knoten a, b, c, d in G_3 aufgespannte Teilgraph mit G_4 identisch ist.

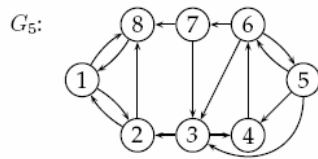


Aufgabe 4

Bestimmen Sie für G_1 und G_3 aus Aufgabe 2 und 3 die Adjazenzmatrizen \mathcal{A}_{G_1} und \mathcal{A}_{G_3} sowie die Potenzen $\mathcal{A}_{G_1}^2$ und $\mathcal{A}_{G_3}^2$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix \mathcal{A}_{G_5} und mit deren Hilfe die Anzahl der gerichteten Kantenfolgen der Länge 3 von Knoten 4 nach 6.



Aufgabe 6

Entfernen Sie aus dem vollständigen ungerichteten Graphen mit der Knotenmenge $\{1, \dots, 5\}$ die Kanten $(3, 5)$ und $(4, 5)$. Stellen Sie den resultierenden Graphen G durch seine Adjazenz- und Inzidenzmatrix dar, wobei für letztere die Kanten (i, j) gemäß der Relation:

$$(i, j) \text{ vor } (i', j') \Leftrightarrow (i < i' \vee (i = i' \wedge j < j'))$$

anzuordnen sind. Enthält G eine geschlossene Euler'sche Linie? Geben Sie diese an bzw. begründen Sie, warum diese nicht existiert. Geben Sie eine geschlossene Hamilton'sche Linie in G an.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Adjazenzmatrix \mathcal{A} (mit Mehrfachkanten):

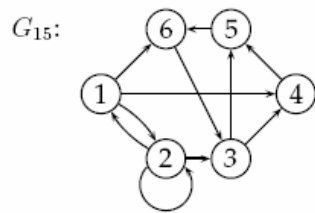
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Zeichnen Sie einen dazu gehörigen ungerichteten Graphen mit den Knoten $\{1, 2, 3, 4\}$.
- Berechnen Sie \mathcal{A}^2 .
- Finden Sie 5 Pfade der Länge 2 von Knoten 4 nach 4.
- Berechnen Sie die Erreichbarkeitsmatrix \mathcal{R} .

Aufgabe 8

Gegeben sei der Graph G_{15} .

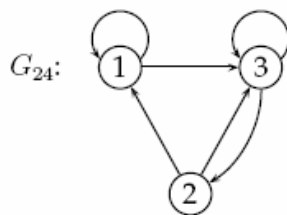
- Welche Knoten sind von 3 aus erreichbar?
- Bestimmen Sie die Länge des kürzesten Pfades von 3 nach 6.
- Bestimmen Sie einen Pfad der Länge 8 von 1 nach 6.



Aufgabe 9

Gegeben sei der Graph G_{24} .

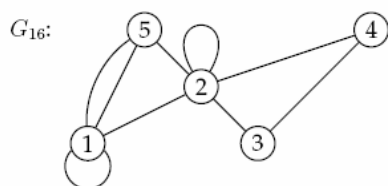
- Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix von G_{24} .
- Geben Sie die Indegrees und Outdegrees der Knoten von G_{24} an.
- Zeichnen Sie den Schatten von G_{24} .



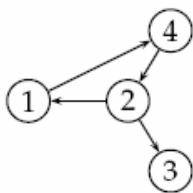
Aufgabe 10

Gegeben sei der Graph G_{16} .

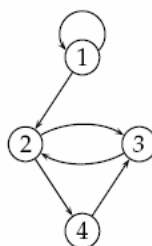
- Bestimmen Sie die Anzahl der Pfade der Länge 3 von 5 nach 2 direkt.
- Bestimmen Sie die Anzahl der Pfade der Länge 3 von 5 nach 2 mit Hilfe der Matrix $\mathcal{A}_{G_{16}}^3$.



G_6 :



G_{17} :



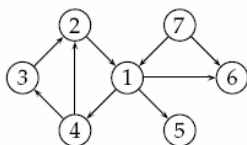
Aufgabe 11

Bestimmen Sie für die Graphen G_6 und G_{17} die Erreichbarkeitsmatrizen \mathcal{R} .

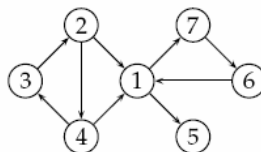
Aufgabe 12

Bestimmen Sie die starken Zusammenhangskomponenten für die Graphen G_1 , G_3 , G_5 und G_7 .

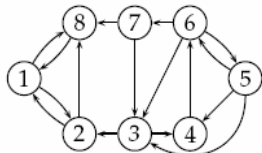
G_1 :



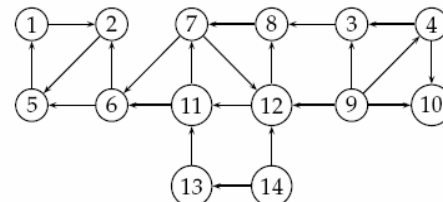
G_3 :



G_5 :



G_7 :

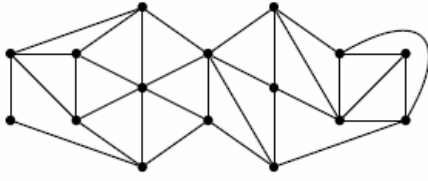
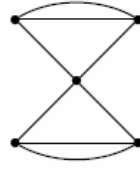
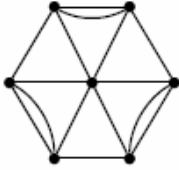
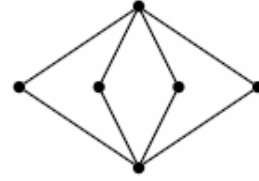
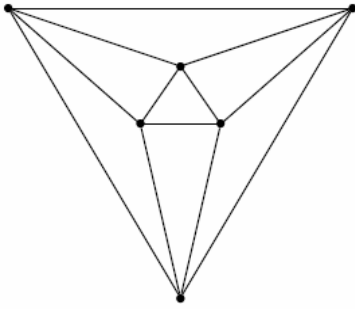
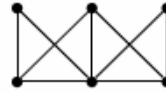
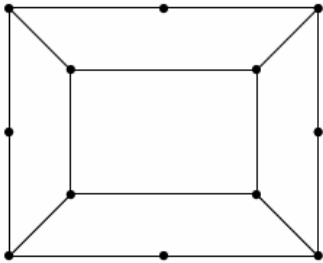
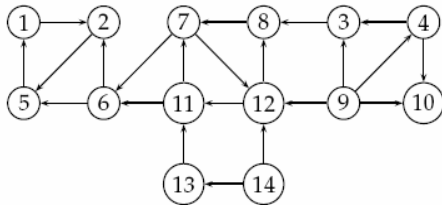
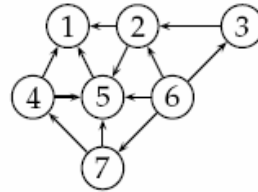


Aufgabe 13

Untersuchen Sie, ob die Graphen G_{14} , G_{18} , G_{19} , G_{20} , G_{21} , G_{22} , G_{23} eine geschlossene Euler'sche Linie bzw. eine geschlossene Hamilton'sche Linie besitzen und bestimmen Sie gegebenenfalls eine solche.

Aufgabe 14

Untersuchen Sie die Graphen G_7 , G_8 , G_{11} und H_{11} (entstanden durch das Umkehren aller Kantenrichtungen in G_{11}) mit dem Markierungsalgorithmus auf Azyklizität.

G_{14} : G_{18} : G_{19} : G_{20} : G_{21} : G_{22} : G_{23} : G_7 : G_8 : G_{11} :