UNIVERSITÄT WIEN
INSTITUT FÜR SCIENTIFIC COMPUTING

Mathematische Basistechniken 50064/3-5,9

Übungsblatt 7

Numerische Mathematik

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Koeffizienten β_i sowie die geschätzten Funktionswerte der folgenden Regression durch Lösen der Gleichung $(X^tX)\boldsymbol{\beta} = X^t\boldsymbol{y}$ mit Hilfe von Derive. Der funktionale Zusammenhang sei gegeben durch $f(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ und Messwerte zeigen:

x_1	5	3	5	3
x_2	0.5	0.5	0.3	0.3
$f(x_1, x_2)$	1.7	3.3	6.5	3.0

Aufgabe 2

Die Pseudoinverse X^+ einer Matrix X ist definiert als $X^+ = (X^tX)^{-1}X^t$. Definieren Sie in Derive eine Funktion für die Berechnung der Pseudoinversen einer Matrix und bestimmen Sie die Pseudoinverse der Matrix X aus Aufgabe 1. Schreiben Sie weiters ein Programm in Derive für die Singulärwertzerlegung $X = UDV^t$. Die Diagonalmatrix D enthält $\lambda_i = \sqrt{\alpha_i}$ als Diagonalelemente, wobei α_i die Eigenwerte der Matrix X^tX sind. V ist dann die entsprechende Eigenvektormatrix mit den Eigenvektoren v_i. Hinweis: Verwenden Sie die Funktion APPROX_EIGENVECTOR zur Berechnung der Eigenvektoren mit APPROX$(\alpha_i, 8)$ als numerische Näherung für die Eigenwerte. Die Eigenvektoren u_i in U ergeben sich aus $u_i = Xv_i/\lambda_i$. Führen Sie die Singulärwertzerlegung für die Matrix X aus Aufgabe 1 durch und überprüfen Sie, dass gilt: $X^+ = VD^+U^t$.

Aufgabe 3

Folgende Stützpunkte sind gegeben:

i	x_i	$p_n(x_i)$
0	0	3
1	1	1
2	2	-1
3	4	0
4	5	-2

Verwenden Sie das Interpolationsverfahren von Newton, um mittels Derive die Koeffizenten $a_0, \ldots, a_n$ des Polynoms $p_n(x)$ zu bestimmen, welches durch die 5 Stützpunkte geht.

Aufgabe 4

Die Messpunkte folgender Tabelle sollen mittels Gauß'scher Approximation durch eine Parabel $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ mit Hilfe von Derive approximiert werden:

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	1	2	3

Aufgabe 5

Führen Sie mit Hilfe von Derive für Aufgabe 4 die Singulärwertzerlegung $X = UDV^t$ durch. Überprüfen Sie, dass Aufgabe 4 auch durch Lösen der Gleichung $D\boldsymbol{z} = U^t \boldsymbol{y}$ nach $\boldsymbol{z}$ durchgeführt werden kann, wobei man $\boldsymbol{\beta}$ als $\boldsymbol{\beta} = V\boldsymbol{z}$ erhält.

Aufgabe 6

Die Funktion $f(x) = x^4 - 7/3x^2$ hat Nullstellen bei $x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$. Zeichnen Sie die Funktion in Derive. Nehmen Sie als Startwert $x_0 = 1.3$ und führen Sie mittels Derive die ersten 5 Iterationen des Newton-Verfahrens durch. Vergleichen Sie diese Lösung mit der Lösung, die Derive mittels NSOLVE direkt berechnet.

Aufgabe 7

Sie sollen für $f(x) = \cos(x)$ den Fixpunkt bestimmen. Stellen Sie zunächst mit Hilfe von Derive das Problem grafisch dar. Wählen Sie dann einen geeigneten Startwert und führen Sie die ersten 5 Iterationen des Newton-Verfahrens durch. Vergleichen Sie diese Lösung mit der Lösung, die Derive mittels NSOLVE direkt berechnet.

Aufgabe 8

Vergleichen Sie mit Hilfe von Derive das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren anhand des Problems:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wählen Sie $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und iterieren Sie bis $n = 5$.

Aufgabe 9

Schreiben Sie in Derive eine Funktion für die numerische Integration mittels zusammengesetzter Sehnentrapezregel. Wenden Sie Ihre Funktion auf $\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx$ an. Unterteilen Sie das Intervall $[0, \pi/2]$ in $m = 2, 4, 8$ Intervalle. Vergleichen Sie Ihre Ergebnise mit dem Wert, den Derive direkt berechnet.

Aufgabe 10

Seien a, b, c in Gleitkommadarstellung mit 8 Stellen gegeben:

$$\begin{aligned} a &= 0.23371258 \cdot 10^{-4} \\ b &= 0.33678429 \cdot 10^{2} \\ c &= -0.33677811 \cdot 10^{2} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $(a \oplus b) \oplus c$ und $a \oplus (b \oplus c)$ nicht gleich sind. Berechnen Sie die exakte Summe $a + b + c$ und stellen Sie fest, welches der beiden Ergebnisse den kleineren Fehler aufweist.

Aufgabe 11

Berechnen Sie die Konditionszahl für $\Psi(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$.

Aufgabe 12

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = e^{\cos(x)-1}$ in eine Taylorreihe um den Nullpunkt bis zum Glied 2. Ordnung. Verwenden Sie Derive, um Ihr Ergebnis zu überprüfen und weitere Glieder bis zum Glied 10. Ordnung zu bestimmen. Stellen Sie die Funktion sowie die fortschreitende Approximation durch zusätzliche Glieder der Taylorreihe bis zum Glied 10. Ordnung auch grafisch dar. Bestimmen Sie für $x = 0.15$ die fortschreitende Approximation für den Funktionswert bis zum Glied 10. Ordnung.

Aufgabe 13

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = e^{\sin(x)}$ in eine Taylorreihe um den Nullpunkt bis zum Glied 4. Ordnung.

Aufgabe 14

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \arctan \frac{x}{1+x}$ in eine Taylorreihe um den Nullpunkt bis zum Glied 3. Ordnung.

Aufgabe 15

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{1-cosx}{\ln(x+1)}$ in eine Taylorreihe um den Nullpunkt bis zum Glied 1. Ordnung.