Analysis I Übung - Blatt 13, für den 21.01.2020

97. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen folgender Funktionen:

    (a) $f : (x, y) \to x^2 + y^2$
    (b) $f : (x, y) \to \sqrt{x^2 + y^2}$
    (c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \to \sum_{i=1}^n x_i^2$
    (d) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \to \|x\|_2$

98. Bestimmen Sie die Hesse-Matrizen der Funktionen aus Bsp. 97.

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit (partiell, Fréchet, stetig dfb), und berechnen Sie ggf die Ableitungen (Jakobimatrix):

99. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(x^{-5}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

100. $\arcsin : (-1, 1) \to (-\pi/2, \pi/2)$

101. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$

102. (a) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{x^x}$
     (b) $g : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^{y^z}$

     Berechnen Sie f' einmal direkt, und einmal unter Verwendung von g' und der Kettenregel.

103. Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t, y) \mapsto f(t, y)$ eine gegebene, beliebig oft differenzierbare Funktion. Die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle auf $\mathbb{R}$ eine sogenannte Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

     Bestimmen Sie daraus y'' und y'''.

104. Für $n \in \mathbb{N}$ ist das Legendrepolynom P_n definiert als

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right].$$

     Zeigen Sie, dass dafür (die Legendresche Differentialgleichung) gilt:

$$((1 - x^2) P_n')' + n(n + 1) P_n = 0$$

     Hinweis: Differenzieren Sie beide Seiten von $(x^2 - 1) \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^n = 2nx(x^2 - 1)^n$ $n + 1$ mal mit Satz 6.31.