Analysis I Übung - Blatt 6, für den 19.11.2019

41. Beweisen Sie Satz 3.20 aus dem Skript.

42. Bestimmen Sie $\sqrt[3]{10}$ mit dem Newton-Verfahren. Geben Sie induktiv eine Folge x_n an die vermutlich gegen $\sqrt[3]{10}$ konvergiert. Berechnen Sie für $1 \leq n \leq 10$ die Folgenglieder x_n, x_n^3 und $x_n^3 - 10$. Weisen Sie Konvergenz gegen den vermuteten Grenzwert nach.

43. Es sei (a_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch
$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$
eine konvergente Folge ist.

44. Zeigen Sie: Jede beschränkte Folge (a_n) aus $\mathbb{R}^m$ hat eine konvergente Teilfolge.

45. Es seien $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ beliebig, und $a, b \in \mathbb{R}$. Definieren induktiv:
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_{n+1} := a x_n + b x_{n-1}$$
Für welche a, b, x_0, x_1 ist x_n konvergent ? Hinweis: Versuchen Sie den Ansatz $x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$, oder in einem Spezialfall auch $x_n = (c_1 + c_2 n)\lambda^n$.

46. Es seien $a_1, b_1 \in \mathbb{R}^+$. Definieren Sie induktiv
$$a_{n+1} := \left(\tfrac{1}{2a_n} + \tfrac{1}{2b_n}\right)^{-1} \quad \text{und} \qquad b_{n+1} := \tfrac{1}{2}(a_n + b_n).$$
Zeigen Sie: (a_n) und (b_n) sind konvergente Folgen, mit $\lim a_n = \lim b_n$.
Hinweis: Zeigen Sie vorab die Ungleichung vom harmonischen und arithmetischen Mittel:
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : \left(\tfrac{1}{2x} + \tfrac{1}{2y}\right)^{-1} \leq \tfrac{1}{2}(x+y)$$

47. Zeigen Sie die Divergenz der Folge (a_n) mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ über die Cauchy-Eigenschaft.

48. Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}^m$ und $L \in [0,1)$ sodass
$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \ \|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq L\, \|x_{n+1} - x_n\|$$
Zeigen Sie dass die Folge (x_n) konvergiert. Hinweis: Cauchyfolge.