Analysis I Übung - Blatt 4, für den 05.11.2019

25. Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichungen

    (a) $x^4 = 1$

    (b) $x^3 = -8$

    (c) $x^2 = -i$

    Benutzen Sie zur Bestimmung der Lösung die Polarform, und überprüfen Sie die Lösung ohne Verwendung der Polarform.

26. Bestimmen Sie zu $z = a + bi$ alle Lösungen $x = c + di \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$x^2 = z$$

    ohne Verwendung der Polarform.

27. Für $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$ beschreibt die Menge

$$K_{c,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| = r\}$$

    einen Kreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt c und Radius r. Man zeige, dass für die Funktionen

    (a) $f(z) = z + a$ mit $a \in \mathbb{C}$

    (b) $f(z) = bz$ mit $b \in \mathbb{C}$

    (c) $f(z) = 1/z$ und der Annahme $|c| \neq r$

    die Mengen $\{f(z) : z \in K_{c,r}\}$ wieder Kreise sind. Mittelpunkt, Radius ?

28. Es seien $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ Normen auf dem Vektorraum V. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\|v\| := \|v\|_A + \|v\|_B$$

    eine Norm ist.

29. Ist $\|(x_1, x_2)\| := \max\{|x_1 - x_2|, |2x_1 + x_2|\}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$? Falls so, skizzieren Sie die Einheitskugel

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$$

30. Zwei Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ auf einem Vektorraum V heißen äquivalent gdw

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \; \forall x \in V : \; c_1\|x\|_A \leq \|x\|_B \leq c_2\|x\|_A.$$

    Zeigen Sie, dass $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ und $\|x\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} |x_i|$ äquivalente Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind. $c_1, c_2 =?$. Dass $\|x\|_1$ und $\|x\|_\infty$ Normen sind dürfen Sie verwenden.

31. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass dann

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : x = \lambda y, \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik ist.

32. Für irgendeine Menge A seien $f, g : A \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $\sup\{f(x) + g(x) : x \in A\} \leq \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}$

(b) $\big[\forall\, x \in A : f(x) \leq g(x)\big] \Rightarrow \sup\{f(x) : x \in A\} \leq \sup\{g(x) : x \in A\}$