Analysis I Übung - Blatt 3, für den 29.10.2019

17. Beweisen Sie:
$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
Hinweis: Binomischer Lehrsatz, $\forall\, n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}_0 : i \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^i}\binom{n}{i} \leq \frac{1}{(n+1)^i}\binom{n+1}{i}$ (und sogar $<$ statt $\leq$ für $i \geq 2$).

18. Beweisen Sie folgende Rechenregeln für Ungleichungen:

    (a) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$

    (b) $\forall\, a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1, \forall\, n, m \in \mathbb{N}, n < m:\ a^n > a^m$

    Rechenregeln in $\mathbb{Z}$ dürfen ohne Beweis verwendet werden.

19. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine induktive Menge. Zeigen Sie:

    (a) Die Menge $M_1 := M \setminus \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ ist ebenfalls induktiv.

    (b) Die Menge $M_2 := M_1 \setminus (1, 2)$ ist ebenfalls induktiv.

    (c) Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$M \cap (n, n+1) = \emptyset \ \Rightarrow\ M \setminus (n+1, n+2) \text{ ist induktiv}$$

    Was folgt aus $(a), (b), (c)$ unmittelbar für die natürlichen Zahlen ? Zeigen Sie weiters: Zwischen zwei natürlichen Zahlen n und $n+1$ gibt es keine weitere natürliche Zahl. Induktionsaussage $E(n)$ genau definieren !

20. Zeigen Sie: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:
$$n > m \Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{N} : n = m + p$$
Hinweis: $m \in \mathbb{N}$ fixieren, und vollständige Induktion bzgl. n, Bsp 19.
Zeigen Sie weiters: Die ganzen Zahlen (nach Bez. 2.16) sind bzgl. $+$ abgeschlossen, d.h. $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Hinweis: Fallunterscheidungen, interessant ist $x > 0$, $y < 0$, $x > -y$.

21. Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad m. Zeigen Sie: Dann existiert ein Polynom q vom Grad $m+1$ sodass
$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} p(k) = q(n)$$
(vgl. Bsp 7 (a)). Hinweis: Zeigen Sie zuerst: Für fixes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein Polynom r vom Grad $m-1$ sodass $\forall\, k \in \mathbb{N} : (k+1)^{(m+1)} - k^{(m+1)} = (m+1)k^m + r(k)$. Summieren Sie dann beide Seiten dieser Identität, d.h. $\sum_{k=1}^{n} \ldots$. Verwenden Sie vollständige Induktion bzgl. m.

22. Seien A, B Mengen und $f : A \times B \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) \leq \inf_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y)$$

Für eine Funktion $g : A \to \mathbb{R}$ ist $\sup_{x \in A} g(x)$ definiert als $\sup \{g(x) : x \in A\}$.

23. Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0, b > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n b \leq \left(\frac{na + b}{n + 1}\right)^{n+1}$$

Hinweis: Bernoullische Ungleichung

24. Beweisen Sie die Ungleichung:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\forall\, i : a_i \geq 0$. Hinweis: Vollständige Induktion über n, Bsp 23.