Analysis I Übung - Blatt 2, für den 22.10.2019

9. Sei K ein Körper und $M \subset K$ eine Menge sodass gilt:

   (a) $0 \notin M$

   (b) $\forall x \in K, x \neq 0 : x \in M \Leftrightarrow -x \notin M$

   (c) $\forall\, x, y \in M : x + y \in M \;\wedge\; xy \in M$

   Wir definieren nun auf $K \times K$ die Relationen

   $$x < y \;:\Leftrightarrow\; y - x \in M$$

   und $x \leq y :\Leftrightarrow (x < y \vee x = y)$.
   Zeigen Sie: $(K, \leq)$ ist ein angeordnerter Körper (nach Def 2.4 und Def 2.6).

10. Sei $(M, \leq)$ eine linear geordnete, endliche Menge.

    (a) Man zeige: M besitzt ein größtes Element. Hinweis: Vollständige Induktion bzgl. der Mächtigkeit von M.

    (b) Man schließe daraus: Es gibt keinen angeordneten, endlichen Körper.

11. Es seien A, B nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$ und

    $$C = A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

    Man zeige:

    $$\sup C = \sup A + \sup B$$

    (mit passenden Rechenregeln für $+\infty$).

12. Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert als

    $$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

    Zeigen Sie dafür

    (a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

    (b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$

13. Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist definiert als

    $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{wobei} \quad z = a + ib \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

    Zeigen Sie dafür

    (a) $\forall x, y \in \mathbb{C} : |xy| = |x|\,|y|$

    (b) $\forall x, y \in \mathbb{C} : |x + y| \leq |x| + |y|$

14. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig falls gilt:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall\, x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|$$

   (a) Sind die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ Lipschitz-stetig ?

   (b) Zeigen Sie : Falls $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetige Funktionen sind, dann ist auch die Summenfunktion $f + g$ Lipschitz-stetig.

15. Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$:

$$T_0(x) := 1, \qquad T_1(x) := x$$

und

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; T_{n+1}(x) := 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Zeigen Sie:

   (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $x \mapsto T_n(x)$ ein Polynom vom Grad n.

   (b) Plotten Sie die Funktionen T_n für $n = 0, \ldots, 5$ und $x \in [-1.2, 1.2]$. Welchen Verdacht haben Sie für den Wertebereich von $T_n|_{[-1,1]}$?

   (c) Für $x \in [-1, 1]$ gilt die Darstellung (mit i sodass $i^2 = -1$):

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : T_n(x) = \frac{1}{2}\Big[(x + i\sqrt{1 - x^2})^n + (x - i\sqrt{1 - x^2})^n\Big]$$

   Beweisen Sie daraus den in (b) vermuteten Wertebereich. Rechnen mit komplexen Zahlen nach Schulwissen, Beispiel 13.

16. Eine rationale Funktion auf $\mathbb{R}$ hat die Form

$$x \mapsto c\frac{x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1x + a_0}{x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0},$$

wobei $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $c, a_0, \ldots a_{m-1}, b_0, \ldots b_{n-1} \in \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ ist dabei jeweils so gewählt dass Nullstellen im Nenner ausgenommen werden. Zeigen Sie (mit Schulwissen): Die Menge der rationalen Funktionen bildet einen Körper, nennen wir ihn RF.

Für eine rationale Funktion f definieren wir

$$f < 0 \;:\Leftrightarrow c < 0$$

und damit die Ordnungsrelation $f < g :\Leftrightarrow f - g < 0$. Zeigen Sie: Damit ist $(RF, \leq)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie: Für die identische Funktion $f : x \mapsto x$ (ist in RF enthalten !) gilt:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}} < f$$

Warum lässt sich der Beweis des Satzes von Archimedes-Eudoxos (Satz 2.22) nicht auf RF übertragen ?