Analysis I Übung - Blatt 10, für den 17.12.2019

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt Hölder-stetig gdw

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^+, \alpha \in (0,1] \;:\; \forall\, x,y \in A \;:\; \|f(x) - f(y)\| \leq C\|x-y\|^\alpha.$$

Die Funktion f heißt Lipschitz-stetig gdw sie Hölder-stetig mit $\alpha = 1$ ist (vgl. Bsp 5.7 (f)).

73. Betrachten Sie die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{x}$ auf den Definitionsbereichen

    (a) $A = [0,1]$

    (b) $A = (0,1]$

    (c) $A = [1,\infty)$

    In welchen Fällen ist f Lipschitz- bzw. Hölder-stetig ? Geben Sie ggf C und α an.

74. Sind die Funktionen

    (a) $\exp : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}$

    (b) $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

    Lipschitz-stetig ?

75. Bestimmen Sie Inneres, Häufungspunkte, isolierte Punkte, Abschluss und Rand folgender Mengen:

    (a) $\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 4\} \subset \mathbb{R}^2$

    (b) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$

76. Verwenden Sie auf $X = \mathbb{R}^2$ die Metrik (vgl. Bsp 31)

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : x = \lambda y, \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst} \end{cases}$$

    wobei $\|\cdot\|$ die Euklidsche Norm ist. Bestimmen Sie die ε-Umgebungen bezüglich dieser Metrik. Sind diese ε-Umgebungen offene Mengen in (X,d) ?

77. Sei $X := \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie: $A \subset X$ ist offen gdw $X \setminus A$ ist abgeschlossen.

78. Beweisen Sie Satz 5.18

79. Es sei $A = \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass die Menge

$$\{x \in A : f(x) = c\}$$

    abgeschlossen und

$$\{x \in A : f(x) < c\}$$

    offen ist.

80. Zeigen Sie dass die Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 < 1 \wedge y - x^2 > 0\}$$

offen in $X = \mathbb{R}^2$ ist. Hinweis: Urbild offener Mengen, Bsp 79.