Analysis I Übung - Blatt 1, für den 15.10.2019

1. Auf $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren wir die Rechenoperationen

$$\begin{aligned}(a,b) \oplus (c,d) &:= (a+c, b+d) \\ (a,b) \otimes (c,d) &:= (ac-bd, ad+bc)\end{aligned}$$

   Bestimmen Sie neutrale Elemente n und e bezüglich $\oplus$ und $\otimes$. Definieren Sie eine $\ominus$ und eine $(\cdot)^{-1}$ Funktion um M zu einem Körper zu ergänzen. Definieren Sie $i := (0,1)$. Was ergibt $i \otimes i$? Hinweis: Ein Vergleich mit komplexen Zahlen kann die Idee für $(\cdot)^{-1}$ liefern.

2. Sei K ein Körper, und $a, b, c, d, e, f \in K$ mit $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann das lineare Gleichungssystem: Gesucht sind $x, y \in K$ mit

$$\begin{aligned}ax + by &= e \\ cx + dy &= f\end{aligned}$$

   eine eindeutige Lösung hat. Lösen Sie im drei-elementigen Körper $K3$ (siehe Analysis Skript, Bsp 2.2 (a)) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2x + 2y &= 1 \\ 1x + 2y &= 2\end{aligned}$$

3. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie:

$$\forall\, a \in K : \big[\forall\, x \in K : x > 0 \Rightarrow x \geq a\big] \Leftrightarrow a \leq 0$$

   Gilt die entsprechende Aussage auch für eine linear geordnete Menge ?

4. Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei das offene Intervall $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, und das abgeschlossene Intervall $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$I_n := (-1, 1 + \tfrac{1}{n}) \qquad \text{und} \qquad J_n := [0, 1 - \tfrac{1}{n}]$$

   Bestimmen Sie

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$$

   Hinweis: Bestimmen Sie dazu welche Punkte in der Lösungsmenge sind, und welche nicht.

5. Zeigen Sie dass für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x$ gilt:

$$f([1,2]) \subset [-1/2, 0]$$

   Das mengenwertige Bild $f(A)$ einer Funktion ist dabei die Menge $\{f(x) : x \in A\}$. Zeigen Sie dies mit bisher besprochenen Techniken.

6. Für $A, B \subset \mathbb{R}$ definieren wir die Summenmenge

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Wir nehmen an dass A und B ein Maximum besitzen. Zeigen Sie, dass dann auch $A + B$ ein Maximum besitzt, und

$$\max(A + B) = \max(A) + \max(B)$$

Dabei ist das Maximum einer Menge wie folgt definiert:

$$x = \max(A) \ :\Leftrightarrow \ x \in A \wedge \forall\, a \in A : a \leq x$$

7. Man zeige mittels vollständiger Induktion folgende Identitäten. In den Beispielen (c) und (d) finde man zuerst durch Probieren Formeln für die rechte Seite.

   (a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   (b) Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

   (c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = ??$

   (d) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \Pi_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right) = ??$

8. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$S_n := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Für welche n ist $S_n > \frac{3}{5}$?
Hinweis: Zeigen Sie zuerst: $\forall n \in \mathbb{N} : S_{n+1} > S_n$