Analysis I Übung - Blatt 7, für den 26.11.2019

49. Es sei $p \in \mathbb{N}$, und (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}_0^+$. Zeigen Sie dass
$$a_n \to a \quad \Rightarrow \quad \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$$

50. Es sei $x \in \mathbb{R}^m$. Bestimmen Sie
$$\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p}.$$

51. Beweisen Sie Satz 3.26 aus dem Skript.

52. (Banachscher Fixpunktsatz) Es sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig mit Konstante $L < 1$, d.h.
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^m : \quad \|f(x) - f(y)\| \le L\,\|x - y\|,$$
und x_1 sei gegeben. Zeigen Sie dass die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Folge konvergiert, und der Grenzwert x^* die Gleichung $x^* = f(x^*)$ löst (Fixpunkt), die Lösung ist eindeutig.
Hinweis: Bsp 48

53. Zeigen Sie dass die Gleichung: Ges.: $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sodass
$$\begin{aligned} x_1 + 0.1\cos(x_2) &= 6 \\ x_2 - \sin(0.1x_1) &= 3 \end{aligned}$$
eine eindeutige Lösung besitzt. Dass sin und cos Lipschitz-stetig mit Konstante 1 sind dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

54. Es sei nun $f : A \to A$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $A = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \le c\}$. Es gelte
$$\forall\, x, y \in A, x \ne y : \quad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$
Zeigen Sie dass die Folge $x_1 \in A$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergiert, und zwar gegen die eindeutige Lösung von $x = f(x)$.
Hinweis: Finden Sie einen Häufungspunkt x^*, und führen Sie $f(x^*) \ne x^*$ zu einem Widerspruch. Was gilt für die Folge $\|x_n - x_{n+1}\|$?

55. Zeigen Sie für $a > 0, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$:
    (a) $(ab)^x = a^x b^x$
    (b) Für $a > 1$ gilt $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$.

    Entsprechende Aussagen für $\mathbb{Q}$ dürfen ohne Beweis verwendet werden.

56. Zeigen Sie: $\forall\, b > 1, x > 0, y \in \mathbb{R} : \log_b x^y = y \log_b x$