Analysis I Übung - Blatt 11, für den 07.01.2020

81. Sei (x_n) eine Cauchyfolge in $A \subset \mathbb{R}^m$, und $f : A \to \mathbb{R}^n$. Gelten folgende Aussagen ?
    (a) f stetig $\Rightarrow$ $(f(x_n))$ ist Cauchyfolge.
    (b) f gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ $(f(x_n))$ ist Cauchyfolge.

82. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, und $f : A \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass dann
$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\}$$
eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+m}$ ist.

83. Es sei $\|\cdot\|_X$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c_1 > 0$ gibt, sodass
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_X \leq \, c_1 \,\|x\|_2$$
gilt. Zeigen Sie weiters dass
$$Id : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X) : x \mapsto x$$
eine stetige Funktion ist.

84. Notation wie Bsp 83. Zeigen Sie, dass es auch eine Konstante c_2 gibt sodass
$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \|x\|_2 \leq \, c_2 \,\|x\|_X$$
gilt, d.h. dass die Normen tatsächlich äquivalent sind.
Hinweis: Wählen Sie $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$. Was können Sie über
$$\min_{x \in A} \|x\|_X$$
aussagen?

85. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Zeigen Sie dass ein globales Minimum angenommen wird. Wenden Sie Satz 5.38 geeignet an.

86. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) < 0$, $f(1) > 0$. Mittels des Bisektionsverfahrens läßt sich eine Nullstelle von f wie folgt bestimmen: $p_1 := 0$, $q_1 := 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere
$$\begin{aligned} x_n &:= \frac{p_n + q_n}{2} \\ p_{n+1} &:= \begin{cases} x_n & \text{falls } f(x_n) \leq 0 \\ p_n & \text{falls } f(x_n) > 0 \end{cases} \\ q_{n+1} &:= \begin{cases} x_n & \text{falls } f(x_n) \geq 0 \\ q_n & \text{falls } f(x_n) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$
Man zeige:

(a) (x_n) ist konvergent

(b) $f(x) = 0$ für $x := \lim_{n\to\infty} x_n$.

Dies ist zugleich ein konstruktiver Beweis für den Zwischenwertsatz, Satz 5.45.

87. Man zeige dass die Funktion $x \mapsto \cos(x)$ genau eine Nullstelle x_0 in $[0, 2]$ besitzt.
Bemerkung: Dies erlaubt die Definition $\pi := 2x_0$.
Hinweis: Man zeige $\cos(0) > 0$, $\cos(2) < 0$, $\forall\, x \in [0, 2] : \sin(x) \geq 0$, $\cos x - \cos y = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$, und cos ist streng monoton fallend auf $[0, 2]$.

88. Falls $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvex ist, d.h.

$$\forall\, x, y \in (a, b)\, \forall\, t \in (0, 1) : f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y),$$

dann ist f auch stetig.

Viel Erfolg im Neuen Jahr 2020 !