Analysis I Übung - Blatt 9, für den 10.12.2019

65. Zeigen Sie: Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq (1 + \frac{m}{2})$ gilt

$$\text{für} \quad r(m,z) := \exp(z) - \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!} \quad \text{die Ungleichung} \quad |r(m,z)| \leq 2\frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!}$$

66. Zeigen Sie dass die Exponentialfunktion exp stetig auf $\mathbb{C}$ ist. Zeigen Sie zuerst dass die Exponentialfunktion im Punkt $z = 0$ stetig ist.

67. Zeigen Sie dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
    (a) $\cos(x + y) = \cos(x)\,\cos(y) - \sin(x)\,\sin(y)$
    (b) $\sin(x + y) = \sin(x)\,\cos(y) + \cos(x)\,\sin(y)$
    (c) $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$

68. Zeigen Sie

$$\begin{array}{ll} x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin(x) \leq x & \forall x \in \mathbb{R}_0^+ \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos(x) \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

69. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(x/n) = x \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} n(\cos(x/n) - 1) = 0.$$

70. Sei $x \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$. Seien für $j \in \{0, \ldots n\}$ die Punkte

$$x_j = \begin{pmatrix} \cos(jx/n) \\ \sin(jx/n) \end{pmatrix},$$

und

$$L_n(x) := \sum_{j=1}^{n} \|x_j - x_{j-1}\|_2$$

die Länge des Streckenzuges $x_0, x_1, \ldots x_n$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x),$$

d.h. die Bogenlänge der Kurve $(\cos s, \sin s)$ mit $s \in [0, x]$.

71. Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(1/x^2) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

stetig ?

72. Für welche $a \in \mathbb{R}^+$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2|y|^a}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig ?