Analysis I Übung - Blatt 14, für den 28.01.2020

105. Es seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen, und $c_n = a_n + b_n$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   (a) Es sei $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von (a_n), und $b \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von (b_n). Dann ist $a + b$ ein Häufungspunkt von (c_n).

   (b) Es sei $c \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von (c_n), dann gibt es Häufungspunkte a von (a_n) und b von (b_n) sodass $a + b = c$.

106. Wie Beispiel 105, die Folgen (a_n) und (b_n) seien jetzt aber beschränkt.

107. Man beweise das Konvergenzkriterium von Raabe:

   (a) Sei $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$. Es gelte

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \frac{\beta}{n}.$$

   Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

   (b) Es gelte

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

   Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass ab einem Index n_0 die Folge $(n|a_{n+1}|)$ im Teil (b) monoton wachsend, und im Teil (a) monoton fallend ist. Zeigen Sie für den Teil (a) die Ungleichung

$$(\beta - 1)|a_n| \leq (n-1)|a_n| - n\,|a_{n+1}|,$$

   und bilden aus diesen Gliedern unendliche Reihen.

108. Bilden folgende Systeme offener Mengen Topologien auf $\mathbb{R}$?

   (a) $\{(a,b) : a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}$

   (b) $\{(a,b) : -\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty\}$

109. Welche Funktionen $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_X) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_Y)$ sind bzgl. folgender Topologien stetig (im Sinne von Def 5.21) ?

   (a) $\mathcal{T}_X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_Y = \mathcal{P}(\mathbb{R})$

   (b) $\mathcal{T}_X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

   (c) $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, $\mathcal{T}_Y = \mathcal{P}(\mathbb{R})$

   (d) $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

110. Zeigen Sie: Die Gleichung: Ges.: $x \in \mathbb{R}$ sodass

$$x + e^x = 2$$

besitzt eine Lösung.

111. Die Funktion f erfülle die Voraussetzungen von Satz 6.17, und sei zudem zweimal differenzierbar. Bestimmen Sie $(f^{-1})''$.

112. Es sei $T(t, x)$ die Temperatur zum Zeitpunkt t am Ort x (wobei $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar sei). Eine Person P befindet sich zum Zeitpunkt t an der Stelle $P(t) \in \mathbb{R}^3$, wobei auch $t \mapsto P(t)$ differenzier sei. Bestimmen Sie die von P wahrgenommene Temperaturänderung, d.h.

$$\frac{d}{dt} T(t, P(t)).$$

Interpretieren Sie die auftretenden Terme.