Analysis I Übung - Blatt 8, für den 03.12.2019

57. Man beweise das Majorantenkriterium (Satz 4.16 (a) aus dem Skriptum) für Reihen mit Gliedern a_n in $\mathbb{R}^m$.

58. Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung für Reihen: (a_n) und (b_n) seien Folgen in $\mathbb{R}$ so dass die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergieren. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut und es gilt
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}\,\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}.$$

59. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind folgende Reihen konvergent ?
   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$
   (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$
   (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)(\ln\ln k)^\alpha}$

   Hinweis: Cauchyscher Verdichtungssatz

60. Untersuchen Sie die Konvergenz folgender Reihen:
   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$
   (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ mit $a \in \mathbb{R}$

61. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \to 0$. Die Folge (A_k) wird definiert durch
$$\begin{aligned} A_0 &:= \tfrac{1}{2}a_0, \\ A_k &:= \tfrac{1}{2}a_{2k-2} + a_{2k-1} + \tfrac{1}{2}a_{2k} \qquad \forall\, k \geq 1. \end{aligned}$$
   Zeigen Sie: Konvergiert eine der Reihen
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} A_k,$$
   so konvergiert auch die andere und die Reihensummen stimmen überein.

62. Weisen Sie Konvergenz der beiden Reihen nach:
$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{(4k-3)(16k^2-1)}$$
   Zeigen Sie, dass
$$4s = 2 + t$$
   gilt.

63. Nähern Sie $4s = 2 + t$ aus Bsp 62 jeweils durch die 10., 100., und 1000. Partialsumme der beiden Reihen an (mit einem Computerprogramm). Geben Sie für beide Näherungen eine Abschätzung an, die das beobachtete Verhalten qualitativ widergibt.

64. Für alle $j, k \in \mathbb{N}$ sei $a_{jk} \in \mathbb{R}_0^+$, und es gelte

$$\begin{aligned} \forall\, j \in \mathbb{N}: \quad & \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \qquad \text{konvergiert und} \\ \forall\, k \in \mathbb{N}: \quad & \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \qquad \text{konvergiert,} \end{aligned}$$

d.h. $g_j := \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}$ und $h_k := \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}$ sind für alle j bzw. k in $\mathbb{N}$ definiert. Zeigen Sie: Falls nun auch

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_j \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} h_k$$

konvergieren, so sind beide Summen gleich. Beachten Sie, dass Limiten nicht ohne saubere Begründung vertauscht werden dürfen.

Definieren Sie weiters das Zahlenfeld

$$(a_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}} = \left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\cdot 5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right.$$

und berechnen Sie Zeilen- und Spaltensummen. Geben Sie damit einen (weiteren) Beweis zur Divergenz der harmonischen Reihe.