Analysis I Übung - Blatt 5, für den 12.11.2019

33. Beweisen Sie Satz 2.40 aus dem Skript. Zeigen Sie damit die Minkowski-Ungleichung: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$:
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

34. Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidscher Vektorraum mit Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Zeigen Sie dass dann gilt:
$$(*) \qquad \forall\, x, y \in V: \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2.$$
geometrische Interpretation ?

35. Zeigen Sie auch die Umkehrung von Bsp 34 : Es sei nun V ein beliebiger normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$, in dem zusätzlich auch (*) gilt. Dann ergibt die Definition
$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)$$
ein Skalarprodukt. Hinweis: Um die Bilinearität zu zeigen, können Sie z.B. zuerst Additivität $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$, und danach Homogenität $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\,\langle x, y\rangle$ für $\lambda \in \mathbb{N}$ (Induktion), $\lambda \in \mathbb{Q}$, und letztendlich $\lambda \in \mathbb{R}$ über Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ überprüfen.

Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz. Verwenden Sie dazu Sätze aus Kap 3.1:

36.
$$a_n = \frac{n^3-1}{2n^3+8n} \qquad\qquad b_n = \sqrt[n]{\tfrac{1}{n}}$$

37.
$$a_n = \sqrt{1+\tfrac{1}{n}} \qquad\qquad b_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n}$$

38.
$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \qquad\qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}$$

39. Es seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen Sie, dass dann auch
$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}$$

40. Es sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n \to a$, und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge (b_n) mit
$$b_n := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_{n+i}$$
gegen a konvergiert.