Analysis I Übung - Blatt 12, für den 14.01.2020

89. Zeigen Sie mithilfe von Satz 5.52 dass die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ stetig auf $\mathbb{R}_0^+$ ist.

90. Es sei $f \in C(\mathbb{R})$ 2-periodisch, d.h. $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x+2) = f(x)$. Zeigen Sie dass $\exists\, x \in [0,1] : f(x) = f(x+1)$. Hinweis: Zwischenwertsatz.

91. Sei $q_1, q_2, \ldots$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in $[0,1]$. Sei
$$S_j(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq q_j \\ 1 & \text{für } x > q_j \end{cases}$$
und
$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j S_j(x).$$
In welchen Punkten des Intervalls $[0,1]$ ist f stetig, unterhalbstetig bzw. oberhalbstetig ?

92. Es sei $I = [0,1]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sodass
$$\forall\, x \in I\, \exists\, \varepsilon > 0\, \exists\, c \in \mathbb{R}\, \forall\, y \in I \cap U_\varepsilon(x) : \ f(y) > c$$
Zeigen Sie, dass f nach unten beschränkt ist. Gilt die Aussage auch für $I = (0,1)$? Hinweis: Verwenden Sie dass folgenkompakt äquivalent zu überdeckungskompakt ist.

93. Bestimmen Sie die Ableitungen von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf zwei Arten: Einmal durch (erst später gerechtfertigter!) Vertauschung der Limiten von Ableitung und Reihe, und einmal unter Verwendung der Restglieddarstellung aus Bsp 65.

94. Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen
$$f(x) = \sin(x) \quad \text{und} \quad g(x) = \cosh(x)$$

95. Bestimmen Sie (wo existent) die Ableitungen der Funktionen
$$f(x) = x^n \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt[p]{x}$$
für $n \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{N}$ ohne Verwendung vom Logarithmus.

96. Bestimmen Sie die Fréchet-Ableitung von
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \quad x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^3$$