Rekursion

Einführung in die Programmierung 1

Wintersemester 21/22

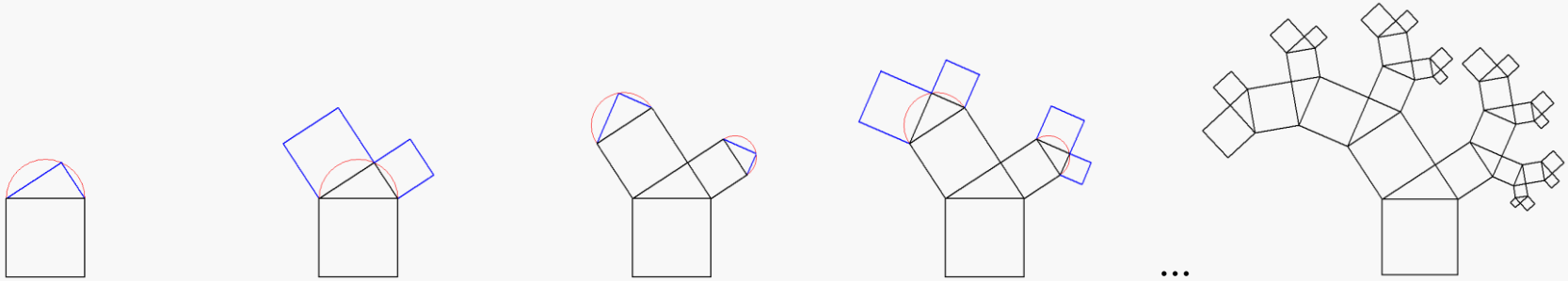
Überblick

- Einführung
- Lineare Rekursion
- Verzweigte Rekursion
- Weitere Rekursionsarten
- Terminierung
- Rekursion und Stack-Speicher
- Vergleich von Rekursion und Iteration

Einführung

Allgemein

- Abstrakter Vorgang, bei dem Regeln auf ein Produkt, das sie hervorgebracht haben, von neuem angewendet werden



https://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras-Baum

Rekursion (ein einfaches Beispiel)

- Berechnung der Summe der Zahlen von 1 bis n
- **Iterativ** ist die Summe definiert durch

$$sum(n) = 1 + 2 + \ldots + n$$

- **Rekursiv** ist die Summe definiert durch

$$sum(n) = \begin{cases} 1 & falls\ n = 1 \\ sum(n-1) + n & sonst\ (n > 1) \end{cases}$$

Basisfall

Rekursionsschritt

Rekursionsschritt

- Selbstaufruf (Zerlegung auf kleineres Problem)
  - Jeder Aufruf muss in irgendeiner Form einen Beitrag zum Erreichen der Abbruchbedingung leisten (Fortschritt)
- Problem lösen
  - Ergebnis des Selbstaufrufs verwenden (in Operationen)
  - Selbstaufruf entsprechend parametrisieren usw.

$$\text{sum(n)} = \begin{cases} 1 & falls\ n = 1 \\ \mathbf{sum(n-1)} + \mathbf{n} & \boldsymbol{sonst}\ (\boldsymbol{n} > \mathbf{1}) \end{cases}$$

Basisfall

- Beschreibt triviales Problem
  - Kann sofort „gelöst“ werden
    - Z. B. Rückgabe eines sinnvollen Wertes
  - Kein Selbstaufruf

$$\mathrm{sum(n)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{falls\ n\ =\ 1} \\ \mathrm{sum(n-1)+n} & sonst\ (n\ >\ 1) \end{cases}$$

Einfache Klassifikation

- Klassifikation nach der Anzahl und Anordnung der rekursiven Aufrufe in einem Rekursionsschritt
  - Lineare Rekursion
  - Verzweigte Rekursion
  - Verschachtelte Rekursion
  - Wechselseitige Rekursion

Lineare Rekursion

Lineare Rekursion

- In jedem Rekursionsschritt gibt es genau einen rekursiven Aufruf
- Beispiel rekursive Summenberechnung

$$\text{sum}(n) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } n = 1 \\ \text{sum}(n-1) + n & \textit{sonst } (n > 1) \end{cases}$$

Basisfall

Rekursionsschritt

- Realisierung in Java
  - Eine Methode die sich selbst wieder aufruft

Beispiel (Summe, rekursiv und iterativ)

```java
public class SumTest {

    // num >= 1
    private static int sumRecursive(int num) {
        if (num <= 1) {
            return 1;
        } else {
            return sumRecursive(num - 1) + num;
        }
    }

    // num >= 1
    private static int sumIterative(int num) {
        int sum = 1;
        for (int i = 2; i <= num; i++) {
            sum += i;
        }
        return sum;
    }
    …
```

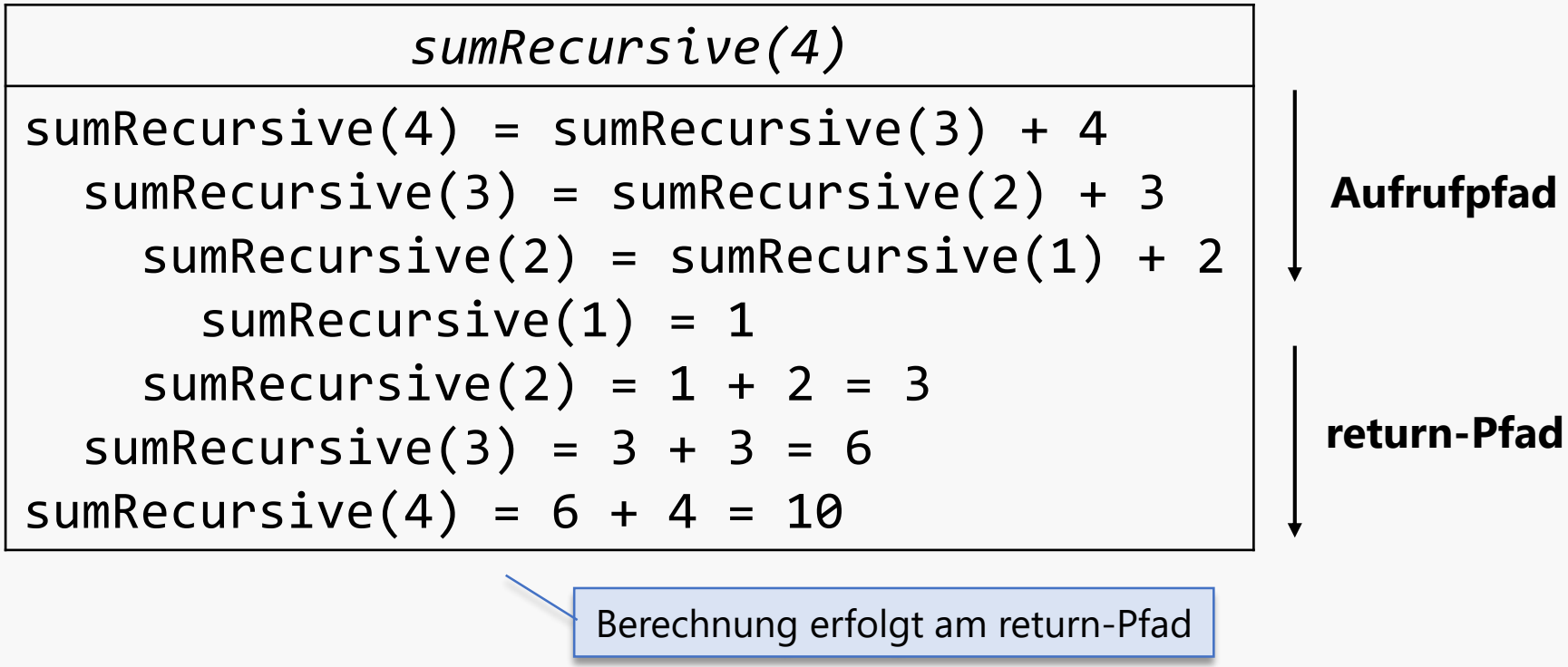
Rekursiver Aufruf

```java
    …
    public static void main(String[] args) {
        System.out.println(sumIterative(10));
        System.out.println(sumRecursive(10));
        System.out.println(sumIterative(100));
        System.out.println(sumRecursive(100));
    }
}
```

```
55
55
5050
5050
```

Rekursive Implementierung – Ablauf

- Ablauf der Rekursion für n = 4



Position des rekursiven Aufrufes

```
public class RecursiveOutputTest {

    // n >= 1
    private static void output(int n) {
        if (n < 1) {
            System.out.print("Numbers ");
        } else {
            System.out.print(n + " ");
            output(n - 1);
        }
    }

    // n >= 1
    private static void output2(int n) {
        if (n < 1) {
            System.out.print("Numbers ");
        } else {
            output2(n - 1);
            System.out.print(n + " ");
        }
    }
    …
```

Ausgabe am Aufrufpfad

Ausgabe am return-Pfad

```
    …
    public static void main(String[] args) {
        output(5);
        System.out.println();
        output2(5);
    }
}
```

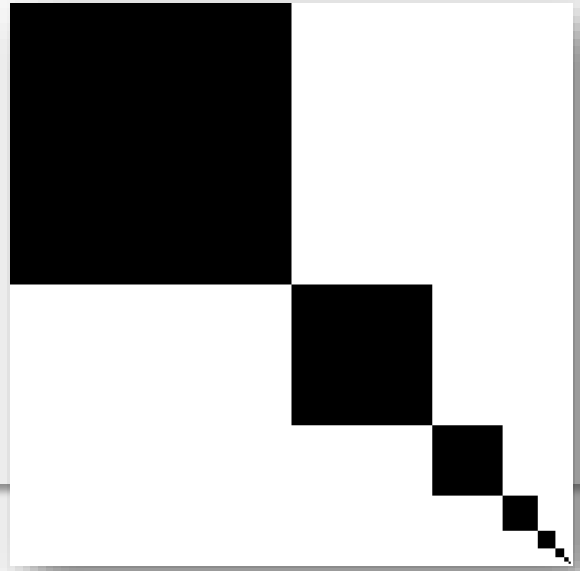
```
5 4 3 2 1 Numbers
Numbers 1 2 3 4 5
```

Rekursion und grafische Ausgabe

```
import codedraw.CodeDraw;

public class RecursiveSquares {

    private static void drawSquares(CodeDraw gc, double x, double y, double length) {
        if (length > 1) {
            gc.fillSquare(x, y, length);
            drawSquares(gc, x + length, y + length, length / 2.0);
        }
    }

    public static void main(String[] args) {
        int size = 512;
        CodeDraw figure = new CodeDraw(size, size);
        drawSquares(figure, 0, 0, size / 2.0);
        figure.show();
    }

}
```

CodeDraw-Fenster muss übergeben werden, da sonst in dieser Methode kein Zugriff darauf möglich wäre. Alternative: Klassenvariable für das Fenster

Basisfall (nicht zeichnen) ist hier implizit



Rekursion – Rückgabe verwenden

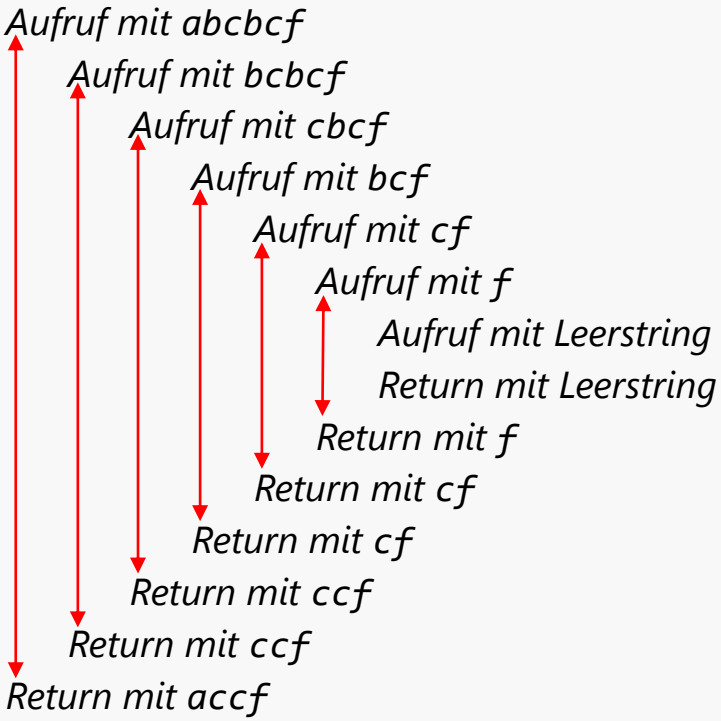
```java
public class SqueezeString {

    // s != null
    private static String squeeze(String s, char c) {
        if (s.isEmpty()) {
            return s;
        }
        if (s.charAt(0) == c) {
            return squeeze(s.substring(1), c);
        }
        return s.charAt(0) + squeeze(s.substring(1), c);
    }

    public static void main(String[] args) {
        System.out.println(squeeze("abcbcbdbf", 'b'));
        System.out.println(squeeze("Hallo EP1 World", 'l'));
        System.out.println(squeeze("aaaa", 'a'));
        System.out.println(squeeze("a b c d", ' '));
    }

}
```

Entfernt rekursiv alle Vorkommnisse vom Zeichen c aus dem String s und liefert einen neuen String zurück

```
accdf
Hao EP1 Word

abcd
```

Rekursion – Rückgabe verwenden (Beispiel)

- Aufruf mit String *abcbcf* und Zeichen *b*
- Ablauf




```
// s != null
private static String squeeze(String s, char c) {
    if (s.isEmpty()) {
        return s;
    }
    if (s.charAt(0) == c) {
        return squeeze(s.substring(1), c);
    }
    return s.charAt(0) + squeeze(s.substring(1), c);
}
```

Endrekursion (tail recursion)

- Jeder rekursive Aufruf ist die letzte Aktion der Methode
- Rekursiver Aufruf ersetzt damit den Originalaufruf mit angepassten Argumenten

Beispiel für Endrekursion (ggT-Berechnung)

```
public class GCDTest {

    // a > 0 && b > 0
    private static int gcdRecursive(int a, int b) {
        if (a == b) {
            return a;
        } else if (a > b) {
            return gcdRecursive(a - b, b);
        } else {
            return gcdRecursive(a, b - a);
        }
    }

    // a > 0 && b > 0
    private static int gcdIterative(int a, int b) {
        while (a != b) {
            if (a > b) {
                a -= b;
            } else {
                b -= a;
            }
        }
        return a;
    }
    …
```

```
    …
    public static void main(String[] args) {
        System.out.println(gcdIterative(24, 16));
        System.out.println(gcdRecursive(24, 16));
        System.out.println(gcdIterative(4399, 166));
        System.out.println(gcdRecursive(4399, 166));
    }

}
```

```
8
8
83
83
```

Endrekursion mit zusätzlichen Parametern

- Rekursiver Aufruf in einer Berechnung ist nicht endrekursiv
  - Beispiel Summenberechnung
- So ein Aufruf kann aber umgeschrieben werden
  - Zusätzliche überladene Methode
  - Zusätzliche Parameter bei dieser Methode
    - Akkumulierende Parameter

Endrekursion – Beispiel (Summenberechnung)

- Beispiel mit 2 Methoden
  - Eine Methode mit ursprünglicher Signatur (nur ein Parameter)
  - Eine überladene Methode mit zusätzlichem Parameter

```
private static int sumRecursive2(int sum, int n) {
    if (n <= 1) {
        return sum;
    } else {
        return sumRecursive2(sum + n, n - 1);
    }
}

// num >= 1
private static int sumRecursive2(int num) {
    return sumRecursive2(1, num);
}
```

Endrekursive Form der Summenberechnung

Methode mit ursprünglicher Signatur

Endrekursion – Ablauf

- Ablauf der Rekursion für n = 4

Endrekursion sumRecursive2(4)

```
sumRecursive2(4) = sumRecursive2(1, 4)
                 = sumRecursive2(5, 3)
                 = sumRecursive2(8, 2)
                 = sumRecursive2(10, 1)
                 = 10
```

Berechnung am Aufrufpfad - am return-Pfad wird nur das fertig berechnete Ergebnis zurückgegeben

Sinn der Endrekursion

- Endrekursive Methoden lassen sich schnell in iterative überführen
- Manche Compiler erkennen Endrekursion und entfernen diese automatisch
  - Daher rekursiv programmieren und die Umsetzung dem Compiler überlassen
  - Iteration kann effizienter sein bzw. für größere Datenmenge noch funktionieren

Verzweigte Rekursion

Verzweigte Rekursion

- Jeder nichtterminierende rekursive Aufruf erzeugt zwei oder mehrere Aufrufe
  - Es entsteht ein Aufrufbaum
- Einfaches Beispiel – Fibonacci-Zahlen

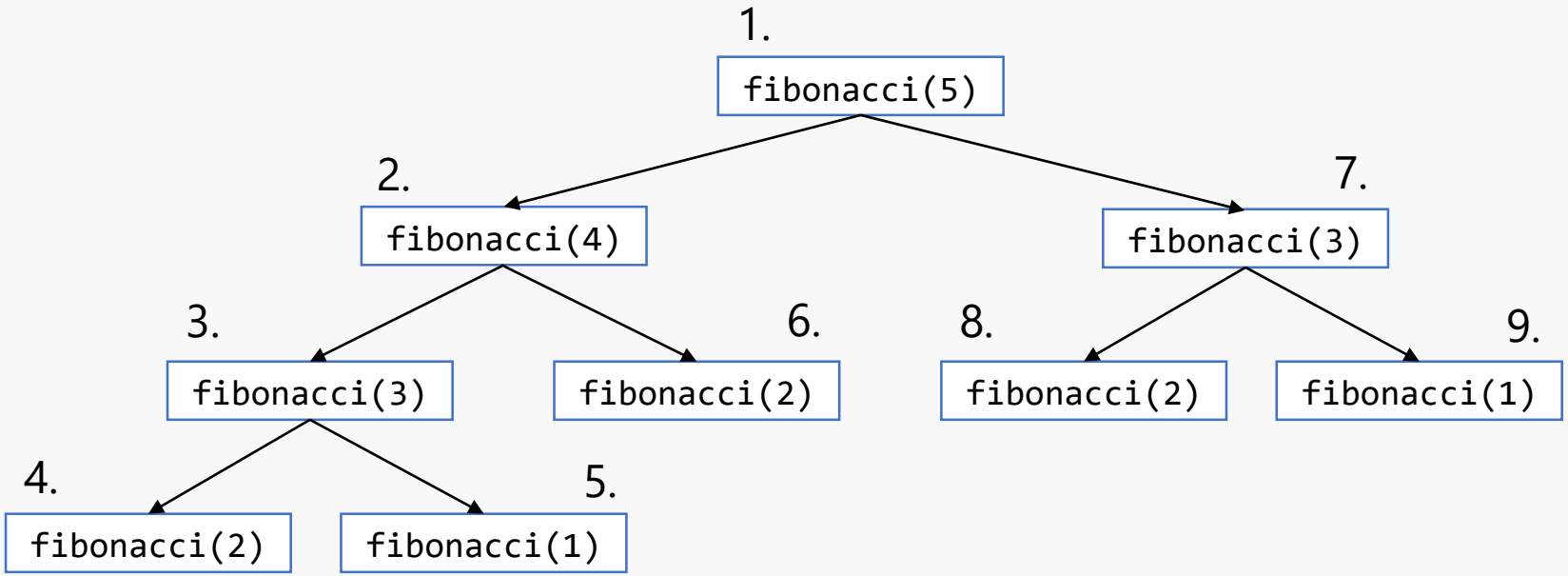
$$\text{fibonacci(n)} = \begin{cases} 1 & falls\ n\ = 1\ oder\ n = 2 \\ \text{fibonacci(n} - 1) + \text{fibonacci(n} - 2) & sonst\ (n > 2) \end{cases}$$

Beispiel (Fibonacci-Zahlen)

```java
public class FibonacciTest {

    // n >= 1
    private static long fibonacci(int n) {
        if (n <= 2) {
            return 1;
        } else {
            return fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2);
        }
    }

    public static void main(String[] args) {
        System.out.println(fibonacci(1));
        System.out.println(fibonacci(3));
        System.out.println(fibonacci(10));
    }

}
```

```
1
2
55
```

Aufrufbaum für fibonacci (5)



- Anzahl der Aufrufe wächst schnell an!

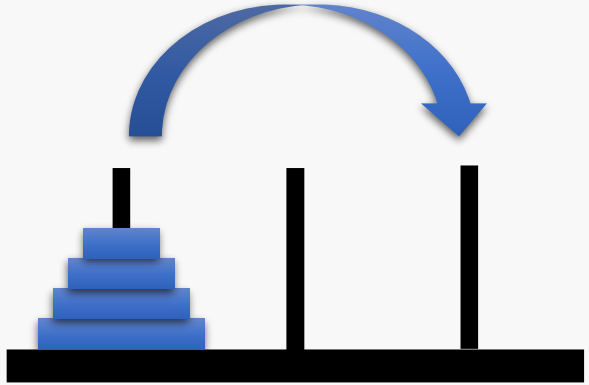
Beispiel (Binomialkoeffizient)

$$\text{binom}(n,k) = \begin{cases} 1 & falls\ k\ = 0\ oder\ n = k \\ \text{binom}(n-1,k\ -1) + \text{binom}(n\ -1,k) & sonst \end{cases}$$

```java
// 0 <= k <= n
private static long binomialCoefficient(int n, int k) {
    if (k == 0 || n == k) {
        return 1;
    }
    return binomialCoefficient(n - 1, k - 1) + binomialCoefficient(n - 1, k);
}
```

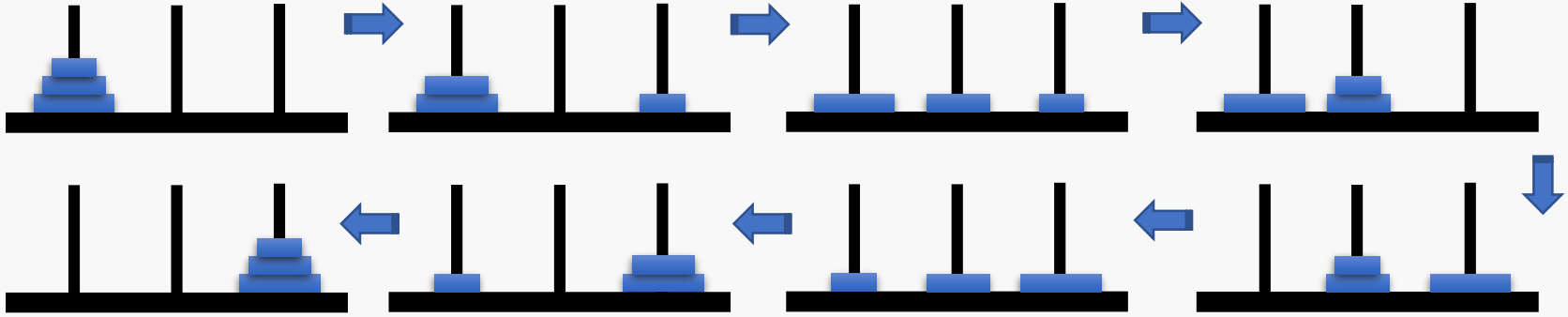
Türme von Hanoi

- Ausgangssituation
  - Turm mit n Scheiben auf dem linken Stab von drei Stäben
  - Jede Scheibe liegt auf einer größeren Scheibe
- Aufgabe
  - Den Turm auf den rechten Stab bringen
- Einschränkungen
  - Nur die oberste Scheibe darf bewegt werden
  - Es darf nicht eine Scheibe auf eine kleinere Scheibe gelegt werden

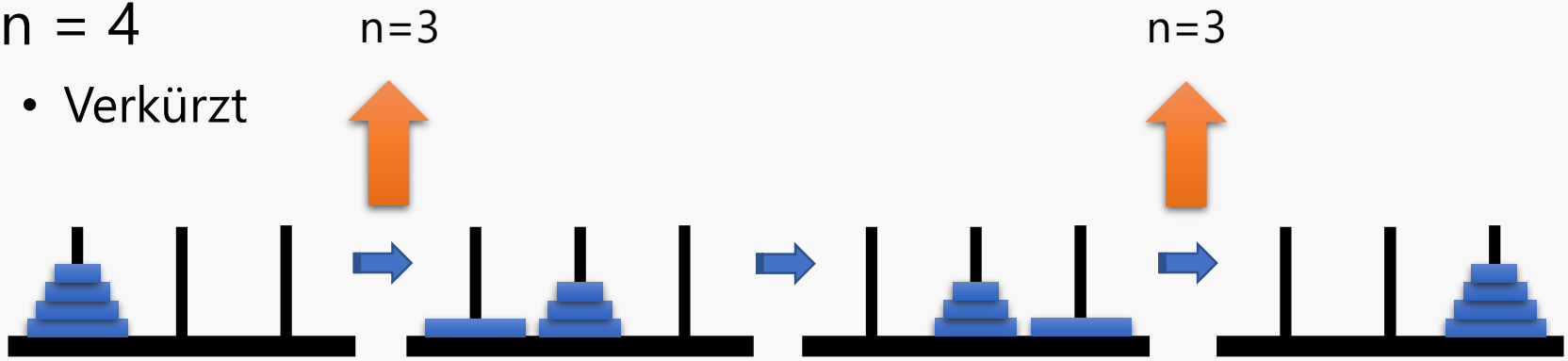


Türme von Hanoi – Ablauf

- n = 3



- n = 4
  - Verkürzt



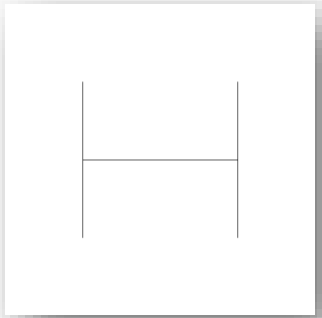
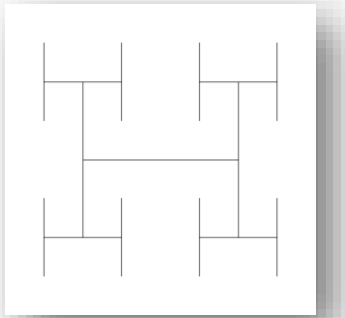
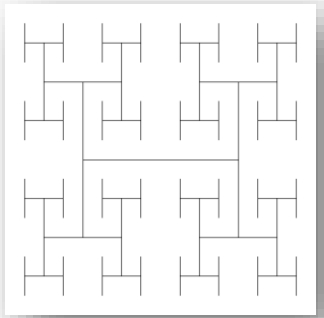
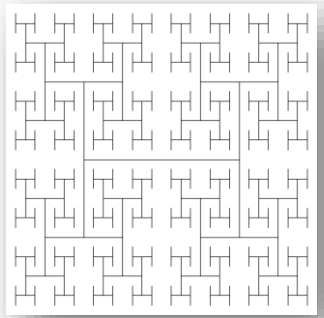
Türme von Hanoi – Implementierung

```java
public class TowersOfHanoi {

    private static void solveHanoi(int n, String a, String b, String c) {
        if (n > 0) {
            solveHanoi(n - 1, a, c, b);
            System.out.println(a + " --> " + c);
            solveHanoi(n - 1, b, a, c);
        }
    }

    public static void main(String[] args) {
        solveHanoi(3, "Tower 1", "Tower 2", "Tower 3");
    }
}
```

```
Tower 1 --> Tower 3
Tower 1 --> Tower 2
Tower 3 --> Tower 2
Tower 1 --> Tower 3
Tower 2 --> Tower 1
Tower 2 --> Tower 3
Tower 1 --> Tower 3
```

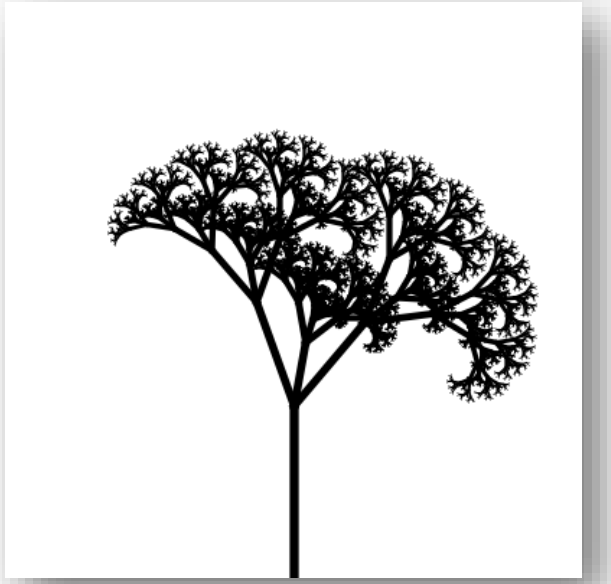
Verzweigte Rekursion und Grafik (H-Baum)

- H-Baum n-ter Ordnung (Htree.java in TUWEL)
  - Ein H mit drei Linien zeichnen
  - Rekursionsschritt
    - Vier H-Bäume für n – 1 zeichnen
    - Jeweils mit den Spitzen des H-Baums für n verbinden
    - Jeder H-Baum für n – 1 ist nur halb so groß wie der H-Baum für n (Basisfall, d. h. nichts zeichnen, wenn n <= 0)
- H-Baum der Ordnung 1, 2, 3, 4

Fraktale Bäume und mehr

- Fraktalen Baum zeichnen (FractalTree.java)
  - Einen Stamm zeichnen
  - Danach verzweigen (via Rekursion) – 3 Äste mit unterschiedlichen Winkeln zeichnen
  - Auf jeder Stufe wiederum 3 kleinere Äste zeichnen
  - usw.
- Bewegung simulieren
  - Baum immer wieder neu zeichnen und zufällig die Winkel leicht verändern



Weitere Rekursionsarten

Wechselseitige Rekursion

- Der rekursive Aufruf erfolgt indirekt
  - Es können auch mehr als zwei Methoden an der Rekursion beteiligt sein
  - Wird auch als indirekte Rekursion oder alternierende Rekursion bezeichnet
- Beispiel
  - Methode a ruft Methode b auf
  - Methode b ruft wieder Methode a auf
- Hinweis
  - Beim Lösen eines Problems *P* werden rekursive Lösungen für Subprobleme verwendet, die selbst nicht kleinere Instanzen von *P* sind

Beispiel (gerade/ungerade überprüfen)

```
public class EvenOddTest {

    private static boolean even(int n) {
        if (n == 0)  {
            return true;
        }
        return odd(n - 1);
    }

    private static boolean odd(int n) {
        if (n == 0) {
            return false;
        }
        return even(n - 1);
    }

    public static void main(String[] args) {
        System.out.println(even(1));
        System.out.println(even(2));
        System.out.println(odd(3));
        System.out.println(odd(4));
    }

}
```

```
false
true
true
false
```

Verschachtelte Rekursion

- Argumente bei einem rekursiven Aufruf sind selbst wieder Rekursionsaufrufe
- Vorhergehender Aufruf muss abgeschlossen sein, bevor ein weiterer gestartet werden kann

Beispiel (Moduloberechnung)

```java
public class ModuloTest {

    // a >= 0, b > 0
    private static int modulo(int a, int b) {
        if (a < b) {
            return a;
        } else if (a < 2 * b) {
            return a - b;
        } else {
            return modulo(modulo(a, 2 * b), b);
        }
    }

    public static void main(String[] args) {
        System.out.println(modulo(3, 5));
        System.out.println(modulo(14, 4));
        System.out.println(modulo(426374, 485));
    }

}
```

```
3
2
59
```

Beispiel (Ackermann-Funktion)

```java
public class AckermannTest {

    // m >= 0, n >= 0
    private static long ackermann(long m, long n) {
        if (m == 0) {
            return n + 1;
        } else if (n == 0) {
            return ackermann(m - 1, 1);
        } else {
            return ackermann(m - 1, ackermann(m, n - 1));
        }
    }

    public static void main(String[] args) {
        System.out.println(ackermann(1, 0));
        System.out.println(ackermann(2, 1));
        System.out.println(ackermann(2, 2));
        System.out.println(ackermann(3, 3));
    }

}
```

```
2
5
7
61
```

Ackermann-Funktion – Verwendung

- Benchmarks
  - Anzahl der Aufrufe wächst extrem schnell
- Analyse von Algorithmen
- Wichtige Funktion in der theoretischen Informatik

Terminierung

Rekursion und Induktion

- Vollständige Induktion
  - Beweisverfahren, das in der Mathematik häufig eingesetzt wird
  - Bildet die Basis für Rekursion (ähnliches Verfahren)
- Induktion
  - Um eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq m$ zu beweisen, genügen zwei Beweisschritte
    1. *Induktionsanfang*
       - Beweise $A(m)$
    2. *Induktionsschritt*
       - Beweise $A(n+1)$ unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ mit $n \geq m$ gilt
       - Es muss also gezeigt werden, dass (für $n >= m$) gilt: A(n) => A($n+1$)
  - Sehr oft wird für m die Zahl 0 oder 1 gewählt

Reguläre Terminierung

- Beendigung eines Programms, einer Schleife oder eines rekursiven Methodenaufrufs
  - ohne Fehlermeldung
  - ohne fehlerhaftes Programmverhalten
    - Überlauf des Wertebereichs eines Parameters
- Beispiele für Methoden, die (meist) nicht regulär terminieren

```
private static void endless() {
    endless();
}

private static void overflow(int x) {
    if (x * x > 0) {
        overflow(x * x);
    }
}
```

Fundiertheit und Fortschritt

- Fundiertheit
  - Eine rekursive Methode ist **fundiert**, wenn es eine erreichbare Abbruchbedingung gibt
  - Hängt mit dem Induktionsanfang zusammen
- Fortschritt
  - Methodenausführung erzielt einen **Fortschritt**, wenn sie uns näher an die Abbruchbedingung bringt
  - Hängt mit dem Induktionsschritt zusammen

Reguläre Terminierung

- Reguläre Terminierung setzt Fundiertheit und einen Fortschritt um einen Mindestbetrag in jedem Rekursionsschritt voraus

Beispiele (Fundiertheit und Fortschritt)

```
private static void endless() {
    endless();
}


private static void overflow(int x) {
    if (x * x > 0) {
        overflow(x * x);
    }
}
```

Nicht fundiert

Fundiert, aber Fortschritt fehlerhaft

Terminierung analysieren

- Vereinfachte Annahmen
  - Stack-Speicher geht nicht aus
  - Kein arithmetischer Überlauf
- Zunächst geht es nur um die theoretisch korrekte Implementierung
  - Fundiertheit
  - Fortschritt

Beispiele (Terminierung **theoretisch** analysieren)

```
private static int f(int x) {
    return x <= 0 ? 0 : f(x - 2) + 3;
}


private static int g(int x) {
    return x == 0 ? 0 : g(x + 2) + 3;
}


private static int h(int x) {
    return x < 0 ? 0 : h(x / 2) + 3;
}


private static int k(int x) {
    return x <= 0 ? 0 : k(x / 2) + 3;
}
```

Terminiert immer

Terminiert nur für gerade Parameterwerte <= 0

Terminiert nur für negative Parameterwerte

Terminiert immer

Praktisches Beispiel (Fakultät)

- Fakultät

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

- Kompakte Implementierung

```
// n >= 0
private static long factorial(int n) {
    return n <= 0 ? 1 : n * factorial(n - 1);
}
```

- Fundiertheit und Fortschritt
  - Terminiert theoretisch
  - Aber praktisch (Java) nur korrekte Werte für 0 <= *n* < 21

Fakultät – redundanter Basisfall

- Redundante Implementierung

```
private static long factorialRedundant(int n) {
    return n <= 0 || n == 1 ? 1 : n * factorialRedundant(n - 1);
}
```

- Terminierung
  - Ähnlich zu vorheriger Implementierung
- Aber
  - Ein Basisfall zu viel
    - Kann auch mit ursprünglichem Basisfall berechnet werden
  - Redundanter Basisfall sollte vermieden werden
    - Bringt nicht viel und verwirrt

Fakultät – falscher Basisfall

- Abgekürzte Implementierung

```
private static long factorialMissingBaseCase(int n) {
    return n == 1 ? 1 : n * factorialMissingBaseCase(n - 1);
}
```

- Terminierung
  - Terminiert für $n > 0$
  - Funktioniert nicht für $n <= 0$ (theoretisch Endlosrekursion)

Fakultät – kein Basisfall

- Kein Basisfall

```
private static long factorialNoBaseCase(int n) {
    return n * factorialNoBaseCase(n - 1);
}
```

- Terminierung
  - Nicht fundiert
  - Ruft sich immer wieder auf (theoretisch Endlosrekursion)

Fakultät – falscher rekursiver Aufruf

- Beispiel Fakultät

```
private static long factorialNoConvergence(int n) {
    return n <= 0 ? 1 : factorialNoConvergence(n) * n;
}
```

- Terminierung
  - Fundiert
  - Fehlerhafter Fortschritt

Endlosrekursion

- Bei vielen bisherigen Beispielen
  - Rekursion terminiert nicht
  - Methode ruft sich immer wieder auf
- Praxis in Java
  - Führt zu einem Fehler (`StackOverflowError`)

Muster für Abbruchbedingungen

- Ganze Zahl n
  - Einzelne Zahl: n <= 1
  - Distanz von einer Zahl: Math.abs(n) <= 2
- Intervall [start, end]
  - Leeres Intervall: start > end
  - Einzelne Zahl: start == end (oder sicherheitshalber start >= end)
- String str
  - Leerer String: str.**isEmpty**() liefert true
  - Bestimmter Wert: str.**equals**("Test")
  - Bestimmtes Anfangszeichen: str.charAt(0) == 'T'

Muster für Fortschritt von Methode m (für ganze Zahl n)

- Einzelschritt Richtung Zielwert
  - m(n + 1) bzw. m(n - 1)
- Mehrfachschritt Richtung Zielwert
  - m(n + k) bzw. m(n - k)
  - **k Basisfälle**

Muster für Fortschritt von Methode m (Intervall [start, end])

- Einzelschritt von links
  - start benutzen
  - m(start + 1, end)

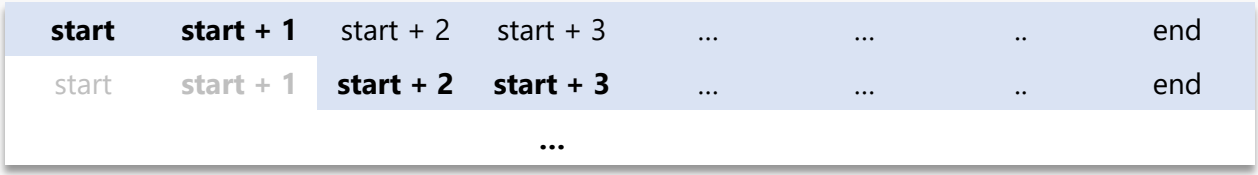
start	start + 1	start + 2	start + 3	...	...	..	end
start	**start + 1**	start + 2	start + 3	...	...	..	end
start	start + 1	**start + 2**	start + 3	...	...	..	end
start	start + 1	start + 2	**start + 3**	...	...	..	end
			...				

- Einzelschritt von rechts
  - end benutzen
  - m(start, end - 1)

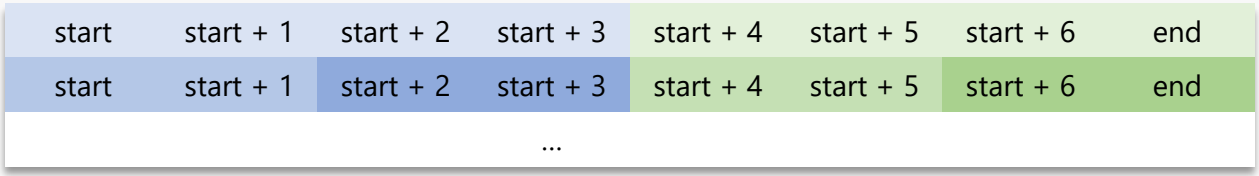
start	...	...	...	end - 3	end - 2	end- 1	**end**
start	...	...	...	end - 3	end - 2	**end- 1**	end
start	...	...	...	end - 3	**end - 2**	end- 1	end
start	...	...	...	**end - 3**	end - 2	end- 1	end
			...				

Muster für Fortschritt von Methode m (Intervall [start, end])

- Mehrfachschritt
  - m(start + k + 1, end)
  - Beispiel für k = 1
    - start und start+1 benutzen
    - m(start + 2, end)



- Divide and Conquer
  - m(start, (start + end) / 2) – erstes neues Intervall (erste Hälfte)
  - m((start + end) / 2 + 1, end) – zweites neues Intervall (zweite Hälfte)



Vom Intervall zum String

- Indexbereich eines Strings ausnutzen
- Typischer Rekursionsfortschritt bei Strings
  - String str = "Test";

0	1	2	3
T	e	s	t

  - Von links str.substring(1)

0	1	2	3
T	e	s	t

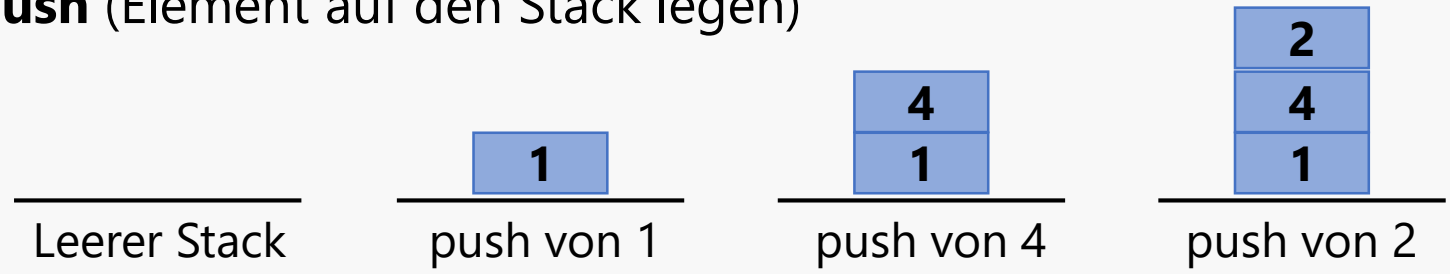
  - Von rechts str.substring(0, str.length() - 1)

0	1	2	3
T	e	s	t

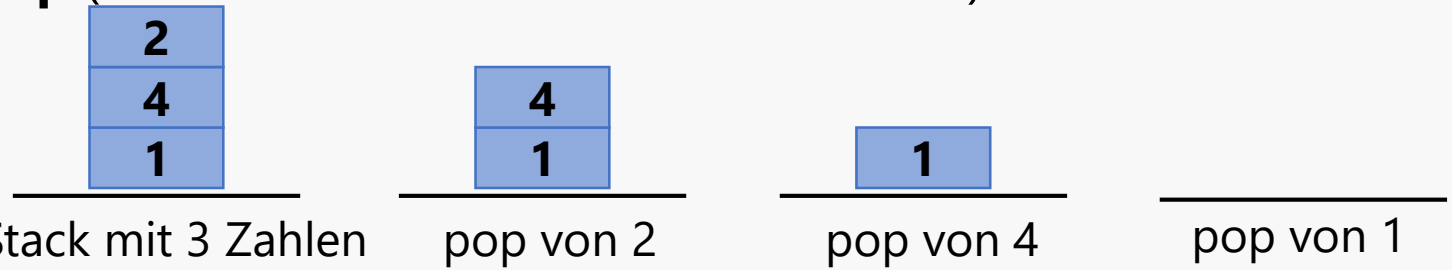
Rekursion und Stack-Speicher

Stack

- Einfache Datenstruktur
- Operationen (z. B. hier für einen Stack von Zahlen jeweils nach der Operation)
  - **push** (Element auf den Stack legen)



  - **pop** (oberstes Element vom Stack nehmen)



JVM-Stack und Methoden-Frames (1)

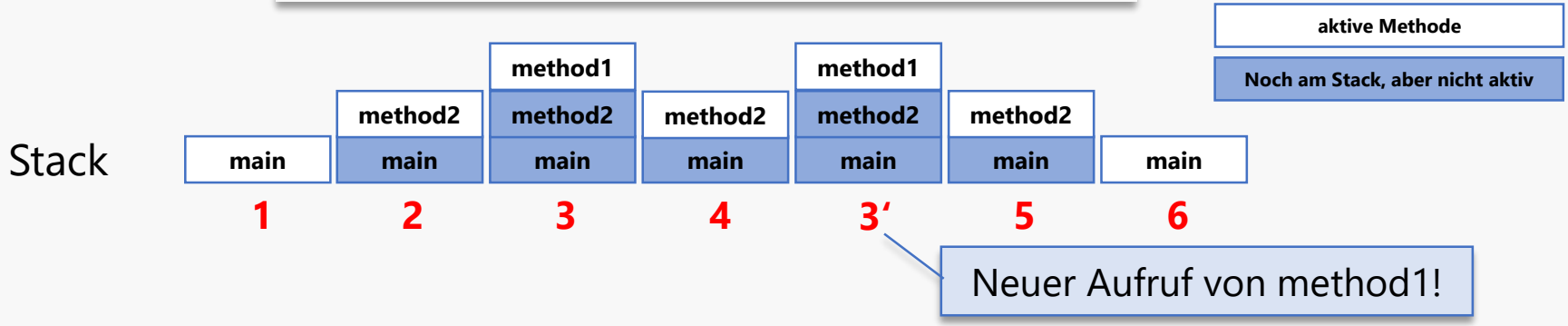
- JVM-Stack
  - Beim Ablauf eines Programms
  - Hat eine begrenzte Größe
- Stack-Frame wird beim Aufruf einer Methode erzeugt
  - Speichert Parameter, lokale Variablen, Zwischenresultate und weitere Daten einer Methode
  - Wird oben auf den Stack gelegt und wird der aktuelle (aktive) Frame

JVM-Stack und Methoden-Frames (2)

- Bei Beendigung einer Methode
  - Java Virtual Machine nimmt den Frame vom Stack und verwirft ihn (z. B. gehen lokale Daten verloren)
  - Der Frame der vorhergehenden Methode (aufrufenden Methode) wird der aktuelle (aktive) Frame

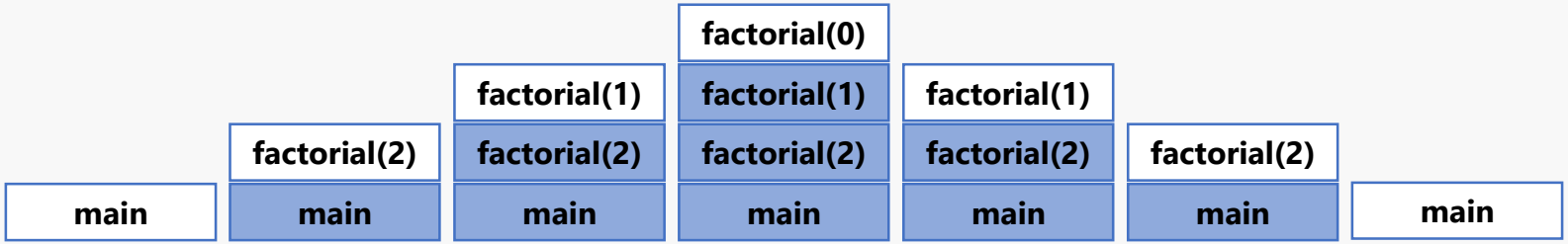
Stack bei Methodenaufrufen

```
public class Tester {
    public static void main(String[] args) {
        1 … method2(); … 6
    }

    private static void method2() {
        2 … method1(); … 4 … method1(); … 5
    }

    private static void method1() {
        … 3 …
    }
}
```

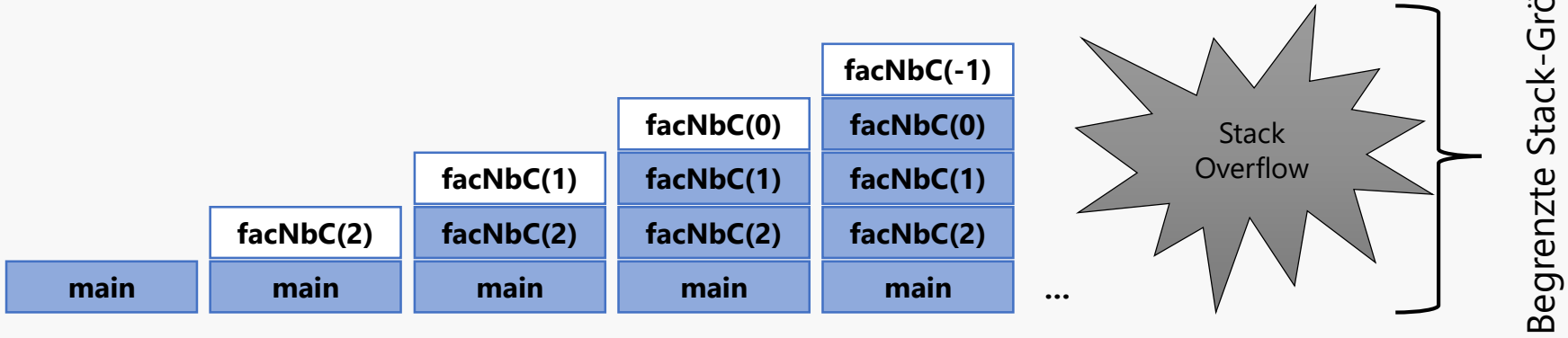


Stack und Rekursion (1)

- Aufruf von `factorial(2)` in `main`



- Aufruf von `factorialNoBaseCase(2)` in `main`
  - Führt zu Endlosrekursion



Stack und Rekursion (2)

- Beispiel aus Teil 1

```
private static int sumRecursive(int num) {
    if (num <= 1) {
        return 1;
    } else {
        return sumRecursive(num - 1) + num;
    }
}
```

- Terminierung
  - Fundiert
  - Fortschritt korrekt
- Praktisches Problem
  - Zu viele rekursive Aufrufe bei großen Werten von *n* führen wiederum zu einem Stack-Overflow (Iteration dann vorteilhaft)

Vergleich von Rekursion und Iteration

Rekursion und Iteration

- Rekursion und Iteration sind gleich mächtig
- Rekursion lässt sich in Iteration umformen und umgekehrt
  - Das sagt noch nichts über die Lesbarkeit, den Umfang und die Effizienz des Ergebnisses aus
- Entrekursivierung (Rekursion zu Iteration)
  - Einfach bei Endrekursion und linearer Rekursion
  - Meist umfangreicher bei verzweigter Rekursion
  - Umfangreicher bei verschachtelter Rekursion

Beispiel (Rekursion – Iteration)

- Beispiel ggT-Berechnung

```
private static int gcdRecursive(int n, int m) {
    if (n % m > 0) {
        return gcdRecursive(m, n % m);
    }
    return m;
}


private static int gcdIterative(int n, int m) {
    while (n % m > 0) {
        int tempN = m;
        int tempM = n % m;
        n = tempN;
        m = tempM;
    }
    return m;
}
```

Endrekursive Version

Iterative Version (lange Version)

Transformationsschema für Endrekursion

```
type method(param1, param2, …, result) {
    if (condition) {
        // Code …
        return method(expression1, expression2, …, expressionX);
    }
    else
        return result;
}
```

```
type method(param1, param2, …, result) {
    while (condition) {
        // Code …
        temp1 = expression1;
        temp2 = expression2;
        …
        tempX = expressionX;
        param1 = temp1;
        param2 = temp2;
        …
        result = tempX;
    }
    return result;
}
```

Endrekursion und Compiler

- Umformung kann automatisch erfolgen
- Manche Compiler erkennen solche Konstellationen
  - Auflösung vom Compiler abhängig
  - Nicht bei Oracle-Compiler für Java

Türme von Hanoi – alternativer iterativer Ansatz

- Einfache rekursive Implementierung

```
private static void solveHanoi(int n, String a, String b, String c) {
    if (n > 0) {
        solveHanoi(n - 1, a, c, b);
        System.out.println(a + " --> " + c);
        solveHanoi(n - 1, b, a, c);
    }
}
```

- Iterative Version

```
private static void solveHanoiIterative(int n) {
    int twoN = 1 << n;
    for (int x = 1; x < twoN; x++) {
        System.out.println((1 + (x & x - 1) % 3) + " -> " +
                           (1 + ((x | x - 1) + 1) % 3));
    }
}
```

Siehe auch https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi#Non-recursive_solution

Rekursion und Iteration im Vergleich (1)

- Innerhalb eines Methodenrumpfs können mehrere rekursive Aufrufe erfolgen
  - Es ist aufwendig (aber möglich), solche rekursiven Methoden in Schleifen umzuformen
- Bestimmte Aufgaben lassen sich mit Rekursion kürzer formulieren

Rekursion und Iteration im Vergleich (2)

- Bei der Rekursion können Daten weitergereicht werden
  - Durch Parameter
  - Durch Rückgabewerte, die wiederum in Berechnungen einfließen können
- In einer Schleife können Daten dagegen nur von der vorherigen zur nächsten Iteration fließen
  - Zur Kompensation sind häufig zusätzliche Variablen für Zwischenergebnisse notwendig
  - Komplexere Struktur durch zusätzliche Variablen

Rekursion und Iteration im Vergleich (3)

- Stack-Speicher ist begrenzt
  - Reicht oft aus
  - Geht bei sehr tiefen Rekursionen (sehr viele Aufrufebenen, großes *n*) aus
- Schleifen gehen mit diesem Speicher (zumindest in Java) weniger verschwenderisch um
  - Sind bei sehr großem *n* vorteilhaft

Rekursion und Iteration im Vergleich (4)

- Falsche oder fehlende Abbruchbedingung
  - Weder rekursive Methoden noch Schleifen terminieren auf normale Weise
- Rekursive Methoden brechen (zumindest in Java) irgendwann ab
  - Stack-Overflow
- Schleifen können ohne Fehlermeldung endlos laufen
  - Aufgrund der Fehlermeldungen sind solche Fehler bei Rekursion etwas leichter zu identifizieren als bei Schleifen

Rekursion und Iteration im Vergleich (5)

- Rekursion führt zu vielen kleinen Methoden, Schleifen zu eher größeren
- Bei Schleifen ist die Größe der Methoden besser steuerbar

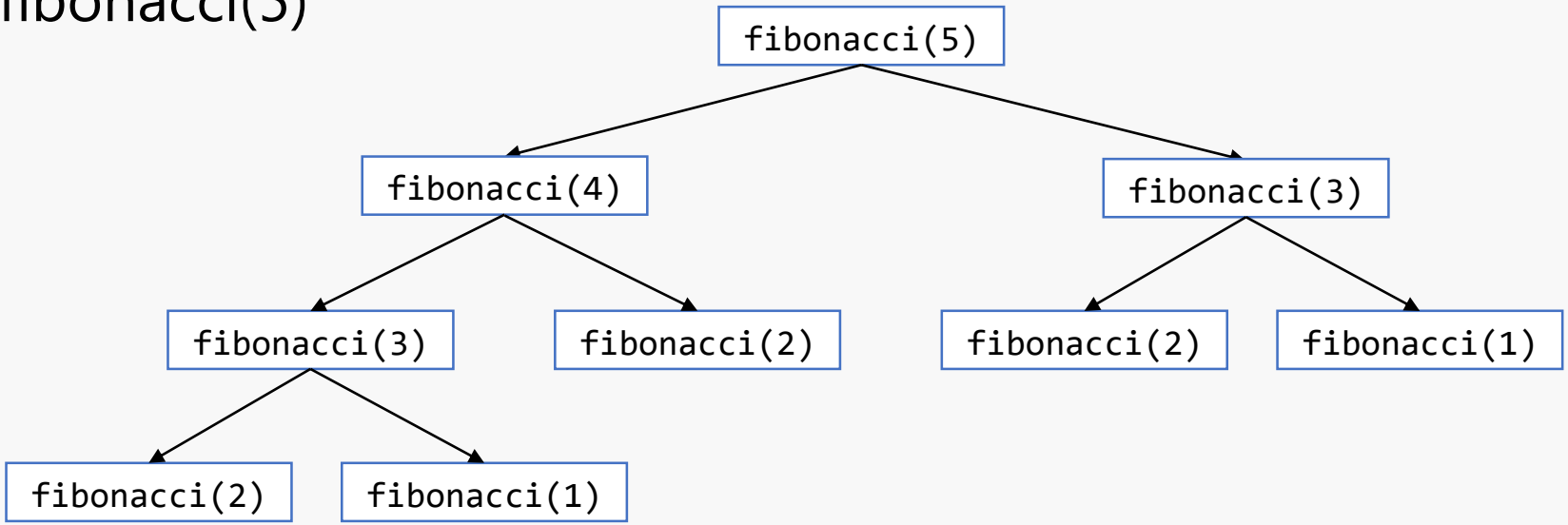
Rekursion und Iteration im Vergleich (6)

- Rekursion kann sehr ineffizient sein
- Beispiel Fibonacci-Zahlen (Wiederholung)

```
private static long fibonacci(int n) {
    if (n <= 2) {
        return 1;
    } else {
        return fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2);
    }
}
```

Aufrufbaum (Wiederholung)

- fibonacci(5)



- Wie sieht das für fibonacci(50) aus?
  - Wie viele Aufrufe müssen dort durchgeführt werden?

Test (Zeit messen, Anzahl der Aufrufe zählen)

```
public class FibonacciTester {
    private static long counter;
    // n >= 1
    private static long fibonacci(int n) {
        counter++;
        return n <= 2 ? 1 : fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2);
    }
    public static void main(String[] args) {
        long start, end;
        long result;
        for (int i = 1; i <= 50; i++) {
            counter = 0;
            start = System.nanoTime();
            result = fibonacci(i);
            end = System.nanoTime();
            System.out.print("fibonacci(" + i + ") = " + result + " -> " + (end - start) / 1000000000.0
            + " seconds for " + counter + " method calls\n");
        }
    }
}
```

Ausgabe des Testers (Beispiel)

...
fibonacci(40) = 102334155 -> 0.258819501 seconds for 204668309 method calls
fibonacci(41) = 165580141 -> 0.4036408 seconds for 331160281 method calls
fibonacci(42) = 267914296 -> 0.6514712 seconds for 535828591 method calls
fibonacci(43) = 433494437 -> 1.0455163 seconds for 866988873 method calls
fibonacci(44) = 701408733 -> 1.611623599 seconds for 1402817465 method calls
fibonacci(45) = 1134903170 -> 2.611942001 seconds for 2269806339 method calls
fibonacci(46) = 1836311903 -> 4.2654961 seconds for 3672623805 method calls
fibonacci(47) = 2971215073 -> 6.8933712 seconds for 5942430145 method calls
fibonacci(48) = 4807526976 -> 11.134899901 seconds for 9615053951 method calls
fibonacci(49) = 7778742049 -> 18.0095478 seconds for 15557484097 method calls
fibonacci(50) = 12586269025 -> 29.3449949 seconds for 25172538049 method calls

Testergebnisse

- Anzahl der Methodenaufrufe ist fix für ein bestimmtes n
  - Nimmt stark zu, führt aber zu keinem Abbruch!
  - Aufruftiefe ist nicht sehr groß
- Zeitangaben sind keine fixen Werte
  - Auf einem konkreten Rechner (mit Intel Core i7 9750H) gemessen
  - Können leicht schwanken
  - Zeit für `fibonacci(n)` ≈ Zeit für `fibonacci(n-1)` + Zeit für `fibonacci(n-2)`

fibonacci(100)?

- Wie lange dauert fibonacci(100)?
  - ca. 26 000 Jahre (eine sehr grobe Abschätzung!)
- Wie kann das rekursiv und effizient implementiert werden?

Fibonacci-Zahlen endrekursiv

- Zusätzliche überladene Methode

```
private static long fibonacci2(int n, long current, long next) {
    if (n <= 1) {
        return current;
    } else {
        return fibonacci2(n - 1, next, current + next);
    }
}

private static long fibonacci2(int n) {
    return fibonacci2(n, 1, 1);
}
```

Beispiel für Ablauf

- fibonacci2(10)
  - Aufrufe von `fibonacci2(int n, long current, long next)` mit folgenden Werten

n	current	next
10	1	1
9	1	2
8	2	3
7	3	5
6	5	8
5	8	13
4	13	21
3	21	34
2	34	55
1	**55**	89

Zusammenfassung

- Lineare Rekursion
- Verzweigte Rekursion
- Weitere Rekursionsarten
- Terminierung
- Rekursion und Stack-Speicher
- Vergleich von Rekursion und Iteration