Einführung in die Analysis

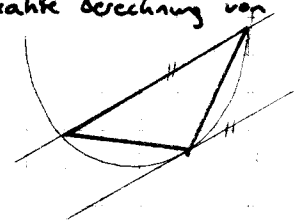
Bücher: Hauser ← ausführlich!
Forster ← knapp, gut
Walter, Gigler Riedler
Courant ← Klassiker
Skripten von Hörmann ← online

Aufbau d. Vorlesung: Reelle Zahlen → Grenzwert → Stetigkeit → Differenzieren → Integral

historische Entwicklung war umgekehrt

Flächenberechnung: Archimedes (~250 v. Chr.), exakte Berechnung von

Kreis, Kugel, Parabel (Fl. = $\frac{4}{3}$ ▲)



Fermat: 1636 $y = x^n$

ab 1670: Newton, Leibniz, Bernoulli Diff. - Int. - Rechnung

Winkel bei S-Punkten von Kurven → Tangenten

Extremwerte, Geschwindigkeit

Marquis de l'Hôpital (l'Hospital) 1696 1. Buch „Analyse des infiniment petits"

L. Euler (1707–1783) 30.000 Druckseiten

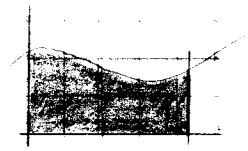
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad e^{i\pi} = -1$$

$$\sin x = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

→ Jahrhundert der Entdeckungen



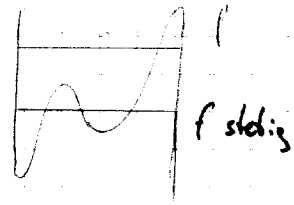
Integral = ∞ Summe von ∞ kleinen Zahlen

$df = f(x+dx) - f(x) \qquad \frac{df}{dx} = f'(x)$ dx, df ∞ klein → endlich!

ab 1800: Exaktifizierung: Was ist Ableitung, Integral, ... → Grenzwerte

Cauchy (~1821) "Cours d'Analyse" → Grenzwert

Bolzano 1817 Zwischenwertsatz ⟶



Riemann 1854 Integral

Weierstraß, Cantor, Dedekind ~1872 exakte Einführung der reellen Zahlen

1) Die reellen Zahlen

$$\underbrace{0{,}999999999\ldots}_{x} \overset{(*)}{=} 1$$

$$10x = 9.99999\ldots$$

$$10x - x = 9.999\ldots - 0.999\ldots$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

$$x = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

$1 - x < 0{,}1$

< 0.01

< 0.001

$0 \leq 1 - x < \frac{1}{10^n} \quad n = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq \varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \varepsilon \in \mathbb{R} \Rightarrow \varepsilon = 0 \end{array}}$$

Archimedische Eigenschaft $\boxed{(AR)}$ „Axiom des Messens" Eudoxos ~300 v. Chr.

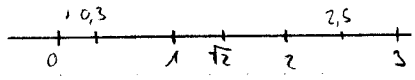
$\forall a, b > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : a \cdot n > b \qquad a, b \in \mathbb{R}$

1.1 ## 1.1 Von den natürlichen zu den reellen Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad \mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

siehe [SS] ← Buch zu EMA

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad \mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$



$\mathbb{Q}$ hat "Löcher" $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

rationale Zahlen füllen die Zahlengerade ("Kontinuum") nicht vollständig aus.

aus $\mathbb{Q}$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ exakt herleiten $\Rightarrow$ mühsam siehe [SS], Rep.

axiomatische Beschreibung von $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper, ordnungsvollständig

$\boxed{(OV)}$ - Ordnungsvollständigkeit

$A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\neq 0$ $\qquad \forall a \in A, b \in B : a \leq b$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A, b \in B : a \leq m \leq b$

axiomatische Fassung des "Kontinuums" siehe [SS]

in [SS] wurde gezeigt:

$$(OV) \Leftrightarrow (SUP) \Rightarrow (AR)$$

Spezialfall von (OV): $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

$$\overset{(OV)}{\Rightarrow} \exists r \in \mathbb{R} \quad a_n \leq r \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d.h. $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ (IS) ... Intervallschachtelung

Jede Intervallschachtelung enthält einen Innersten Punkt.

Spezialfall einer (IS): Dezimalbruchentwicklung

z.B. $\sqrt{2} \approx 1{,}4142\dots$

d.h. $1 < 1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414 < \dots < \sqrt{2} < \dots < 1{,}415 < 1{,}42 < 1{,}5 < 2$

1.2 <u>1.2 Heron'sches Wurzelziehen</u> (Heron 1. Jh. n. Chr.)
(angeblich schon um 1900 v. Chr. in Babylon)

ges: $x \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x = 2$

starten mit: $0 < y_0 < x_0$ mit $x_0 y_0 = 2$, z.B. $x_0 = 2$ $y_0 = 1$

2 neue Zahlen $x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2}$ $y_1 = \frac{2}{x_1}$ $y_1 \cdot x_1 = 2$

$x_2 = \dots$ $y_2 = \dots$

etc.

$\Rightarrow x_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$, $y_1 = \frac{2}{x_1} = \frac{4}{3} = 1{,}3\dot{3}$

$x_2 = \dots \frac{17}{12}$, $y_2 = \dots \frac{24}{17}$

...

Beh: $[y_n, x_n]$ Intervallschachtelung

$$y_1 = \frac{2}{x_1} = \frac{4}{x_0 + y_0} \overset{?}{<} x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8 < (x_0 y_0)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 x_0 y_0 < (x_0 + y_0)^2$$

$$0 < (x_0 - y_0)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 y_0 = 2 \\ 0 < y_0 < x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < y_1 < x_1 \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < y_n < x_n$$

$$y_n < \sqrt{2} < x_n$$

Differenz: $d_n = x_n - y_n \xrightarrow{?} 0$

Differenz: $d_n = x_n - y_n \overset{?}{\to} 0$

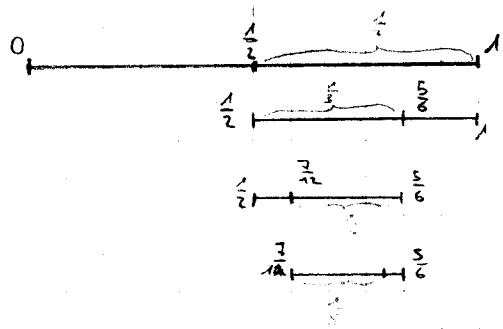
Beh: $d_{n+1} < \frac{d_n^2}{4\sqrt{2}} < \frac{d_n}{5}$

Bew: $x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{4}{x_n + y_n} = \frac{(x_n+y_n)^2 - 8}{2\cdot(x_n+y_n)} = \frac{(x_n - y_n)^2}{\underbrace{4x_{n+1}}_{\overset{4x_ny_n}{\leq}}} = \frac{d_n^2}{4\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 1 < y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < \sqrt{2} < \ldots < x_3 < x_2 < x_1 < 2$ ← Intervallschachtelung

1.3 Bsp: alternierende Reihen

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = ?$ sinnvoll?



Intervall	Länge
$[0, 1]$	1
$[\frac{1}{2}, 1]$	$\frac{1}{2}$
$[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}]$	$\frac{1}{3}$
$[\frac{7}{12}, \frac{5}{6}]$	$\frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$
	$\downarrow$
	0

$\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \exists!$ inneres Produkt ($\ln 2$)

diese reelle Zahl können wir als <u>Wert</u> der Reihe auffassen.

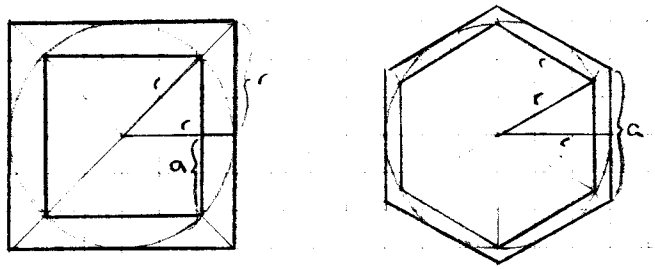
allg: $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$ $\quad a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \ldots > 0$

$a_n \to 0$

$\Rightarrow$ liefert Intervallschachtelung mit <u>genau 1</u> inneren Punkt

1.4 Die Kreiszahl π

Schreiben einem Kreis (Radius r) regelmäßiges n-Eck ein und um:



Seitenlänge s_n, S_n
Umfang u_n, U_n
Fläche f_n, F_n

$n = 4$ $\quad f_4 = 4a^2 = 2\cdot(a^2 + a^2) = 2r^2$

$f_4 = 2r^2$

$F_4 = 4r^2$

$n = 6$ $\quad U_6 = 6a = 6\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\,r = 2\cdot 2\cdot 3\sqrt{\frac{3}{3}}\,r = 4\cdot\sqrt{\frac{3}{3}}\,r = 4\sqrt{3}\,r$

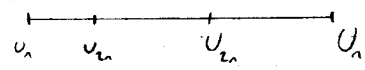
$u_6 = 6r$ $\quad r^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$

$U_6 = 4\sqrt{3}\,r$ $\quad r^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{3}r^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4}{3}}\,r$

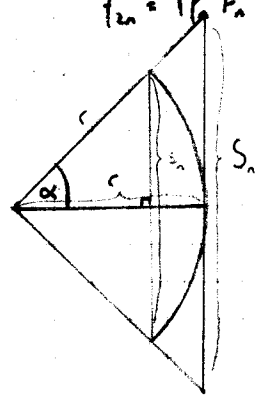
Archimedes rekursiv: $s_n \to s_{2n}$
$S_n \to S_{2n}$

Rekursionsformeln (~1500)

$$* \quad U_{2n} = \frac{2u_n U_n}{u_n + U_n} \qquad u_{2n} = \sqrt{u_n U_{2n}}$$



$$f_{2n} = \sqrt{f_n F_n} \qquad F_{2n} = \frac{2 f_{2n} F_n}{f_{2n} + F_n}$$



$$2\alpha = \frac{360°}{n} \Rightarrow \alpha = \frac{180°}{n}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2F_n &= U_n \cdot r \\ 2f_{2n} &= u_n r \end{aligned}}$$

$$s_n = 2r \cdot \sin\frac{180°}{n}$$

$$S_n = 2r \cdot \tan\frac{180°}{n}$$

$$u_n = 2nr \sin\frac{180°}{n} \qquad U_n = 2nr \cdot \tan\frac{180°}{n}$$

$$f_n = nr^2 \cdot \sin\frac{180°}{n} \cdot \cos\frac{180°}{n} \qquad F_n = nr^2 \cdot \tan\frac{180°}{n}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} &= \sin\alpha \\ \cos\alpha &= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \end{aligned}}$$

Bew für *

z.z. $\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{U_n}}_{\text{klein v}} + \frac{1}{u_n} \right)$

$$\frac{u_n + U_n}{2u_n + U_n} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{U_n}}_{\text{klein v}} + \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1}{4nr} \cdot \left[\frac{1}{\sin\alpha} + \underbrace{\frac{1}{\cos\alpha}}_{\tan\alpha} \right] = \frac{1}{4nr} \cdot \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{1}{4nr} \cdot \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4nr} \cdot \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{U_{2n}}$$

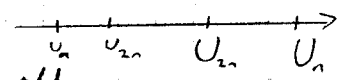
→ siehe auch Übung Analysis

Archimedes: von 6-Eck → $6 \cdot 2^4 = 96$-Eck

$$\Rightarrow 3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7} \qquad \pi = 3{,}14\ldots$$

Ludolph von Ceulen: bis zum $60 \cdot 2^{24}$-Eck → π auf 20, später auf 35 Stellen genau

heute: $2{,}5 \cdot 10^{12}$ Stellen berechnet



$$U_{2n} - u_{2n} < \frac{1}{2}(U_n - u_n), \text{ da } U_{2n} < \frac{u_n + U_n}{2} \text{ und } u_{2n} < u_n$$

asymptotisch gilt.

→ siehe nächste Seite

asymptotisch gilt: $U_{2n} - u_{2n} \approx \frac{1}{4}(U_n - u_n)$,

denn $\frac{1}{u_{2n}} - \frac{1}{U_{2n}} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{U_{2n}}\right) - \frac{1}{U_{2n}} =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{U_{2n}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{u_n} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{U_n}\right)\right] = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{U_n}\right)$$

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{u_n U_{2n}}} - \frac{1}{U_{2n}}$$

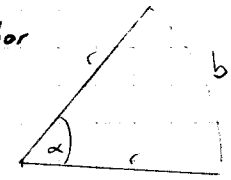
also: $\left[\frac{u_n}{2r}, \frac{U_n}{2r}\right]$ bilden Intervallschachtelung, innerster Punkt heiße π

$\left[\frac{f_n}{r^2}, \frac{F_n}{r^2}\right]$ hat denselben innersten Punkt π

denn $\frac{U_n}{2r} = \frac{F_n}{r^2}$ $\quad \frac{u_n}{2r} = \frac{f_{2n}}{r^2}$ $\quad \Rightarrow$ sind äquivalente Int.sch.
$\Rightarrow$ selber innerster Punkt

$\Rightarrow \frac{U}{2r} = \pi, \ \frac{F}{r^2} = \pi \Rightarrow U = 2r\pi, \ F = r^2\pi$ für Kreis mit Radius r
$\Rightarrow F = U\cdot\frac{r}{2}$

Für einen Kreissektor



$F_\Delta = b\frac{r}{2}$

$b = \frac{\alpha}{180°}\cdot r\cdot\pi$

$\Rightarrow$ Bogenmaß für Winkel

Die Zahl π ist also eindeutig bestimmt

durch:

$$\boxed{n\cdot\sin\frac{180°}{n} < \pi < n\cdot\tan\frac{180°}{n} \quad \forall n}$$

1.5

1.5 Kettenbrüche

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}} = ? = K \Rightarrow K = \frac{1}{2+K}$$

Kettenbruch

$$K^2+2K-1=0$$

$$K = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$K = \sqrt{2}-1 \approx 0{,}4142\ldots$$

Näherungsbrüche

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},\ldots$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n}$$

$f(x_n)$ fallend

$$x_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$x_2 = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12} = 0{,}4166$$

$$x_4 = \frac{12}{29} = 0{,}4139\ldots$$

$x_2 < x_4 < x_6 < \ldots < x_5 < x_3 < x_1$ ← Intervallschachtelung

Länge $\to 0$ (o.B.)

allgemein schreibt man für: $a_0 + \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots}}} = [a_0; a_1; a_2; \ldots]$

$a \in \mathbb{N},\ a_0 \in \mathbb{Z}$

Jede positive reelle Zahl lässt sich einen Kettenbruch entwickeln.

Für rationale Zahlen: endlicher Kettenbruch, 2-deutig

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} \qquad \frac{1}{4} = \frac{1}{3+\frac{1}{1}}$$

Für irrationale Zahlen: unendlich

periodische Kettenbrüche $\Leftrightarrow x = a+b\sqrt{d}$ $d \in \mathbb{N},\ a,b \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ Zahlentheorie

Folgerung: Die Menge aller Folgen natürlicher Zahlen (= die Menge der Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$) ($\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) ist gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Bsp siehe nächste Seite

Bsp.

$$\frac{19}{41} = \frac{1}{\frac{41}{19}} = \frac{1}{2+\frac{3}{19}} = \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{19}{3}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{2}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$$

$[0,2,3,1,1,2]$

$[0,2,3,1,1,1]$

$x \in \mathbb{R},\ x>0$

$$x_1 = \underbrace{a_0}_{\in \mathbb{N}_0} + \underbrace{\tilde{x}_1}_{\in [0,1[}$$

$$x_2 = \underbrace{\frac{1}{\tilde{x}_1}}_{>1} = \underbrace{a_1}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\tilde{x}_2}_{\in [0,1[}$$

$$x_3 = \frac{1}{\tilde{x}_2} = \underbrace{a_2}_{\in \mathbb{N}} + \tilde{x}_3$$

1.6 **1.6 Bernoullische Ungleichung**

$$(1+a)^n \geq 1+na \qquad \forall a>-1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Bew: für $a>0$ aus binomischem Lehrsatz

für $a>-1$ mit vollständiger Induktion

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot \underbrace{(1+a)}_{>0} \geq (1+na)\cdot(1+a) = 1+na+a+\underbrace{a^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)a$$

1.7 **1.7 Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel**

$x,y \geq 0 \qquad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

$= \iff x=y$

Bew: $\iff x+y-2\sqrt{xy} \geq 0$

$\iff (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$

allg. $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0 \qquad \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{2}$

$= \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Bew. mit Induktion - trickreich (nach Cauchy)

Basis: $n=1$ ✓ $n=2$ ✓

Schritt $n \to 2n$

Beh: $\underbrace{\sqrt[2n]{x_1 x_2 \ldots x_{2n}}}_{G} \leq \underbrace{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{2}}_{A}$

Sei: $G_1 := \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$

$G_2 := \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n}}$

$A_1 = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{2}$

$A_2 = \frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{2n}}{2}$

$$G = \sqrt{G_1 G_2} \leq \frac{G_1+G_2}{2} \leq \frac{A_1+A_2}{2} = A$$

Gleichheit $\iff G_1 = G_2$ und $\underbrace{G_1 = A_1}$ und $\underbrace{G_2 = A_2}$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = G_1 \qquad \Rightarrow x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2n} = G_2$

Schritt $n \to n-1$

Beh.: für beliebige $x_1, \dots, x_{n-1} \geq 0$ gilt $\sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$

Def.: $x_n := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$

$$\Rightarrow A := \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{(n-1)x_n + x_n}{n} = \frac{n x_n}{n} = x_n$$

Ind. Annahme: $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1} A} \leq A \qquad / ()^n$$

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} A \leq A^n \qquad / : A > 0$$

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} \leq A^{n-1} \qquad / \sqrt[n-1]{\ }$$

$$\sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \leq A = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} = x_n$$

Gleichheit $\Leftrightarrow$ $x_1 = \dots = x_{n-1}$ $\square$.

Bem.: Harmonisches Mittel von x, y

$$m_H(x,y) = \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \right)^{-1} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \qquad \frac{2xy}{x+y}$$

1.8 **1.8 Die Eulersche Zahl e**

Wir definieren e als innersten Punkt der Intervallschachtelung:

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right]$$

z.z.: 1) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

2) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$

3) Intervall-Längen $\to 0$

Bew. 1) $\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \overset{AGM}{\leq} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = \frac{1}{n+1} + 1$

2) $\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \qquad / : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \left(\frac{n^2}{(n+1)\cdot(n-1)}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \underbrace{\frac{1}{n^2-1}}_{a}\right)^n$$

bernoullische Ungl.:

$$(1+a)^n \geq 1 + na = 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \quad \checkmark$$

3) erstes Intervall: $\left[(1+\frac{1}{n})^n, (1+\frac{1}{n})^2\right] = [2,4]$

Intervall-Länge:

$$(1+\tfrac{1}{n})^{n+1} - (1+\tfrac{1}{n})^n = (1+\tfrac{1}{n})^n \cdot \left[(1+\tfrac{1}{n})-1\right] = \tfrac{1}{n}\cdot(1+\tfrac{1}{n})^n < \tfrac{4}{n} \longrightarrow 0$$

1.9 **1.9 Reelle Zahlen**

BUCHTIPP: Ebbinghaus et. al. - Zahlen

mehrere Zugänge:

1) axiomatisch:

$\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper mit Ordnungsvollständigkeit $\boxed{(OV)}$

Bem: OV ist äquivalent zur Supremumseigenschaft $\boxed{(SUP)}$.

(SUP) $\Rightarrow$ (AR) $\qquad$ $\exists$ mind. einen innersten Punkt

(OV) $\Rightarrow$ $\boxed{(IS)}$ Intervallschachtelungseigenschaft

es gilt: (AR) + (IS) $\Rightarrow$ (OV) $\qquad$ ← Bew siehe Rep.

2) Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$

($\Rightarrow$ alle Verfahren sind sehr langwierig)

a) Dedekindsche Schnitte (siehe [SS])

b) Intervallschachtelungen

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ ist die Menge aller Intervallschachtelungen in rationalen Grenzen, die Äquivalenz zu zeigen ist sehr mühsam

c) CAUCHY-FOLGEN

$\Rightarrow$ siehe Rep.

3) Konkret:

$\mathbb{R}$ ist die Menge aller nichtabbrechenden Dezimalzahlen

$x = x_0.x_1x_2x_3x_4\ldots \qquad x_0 \in \mathbb{Z} \qquad x_i \in \{0,1,\ldots 9\}$, $i \in \mathbb{N}$

$0.9999\ldots = 1.0000\ldots$ ← als gleich definiert, siehe 1.0

2) Folgen: Grenzwert

Sei $(x_n) = (x_1, x_2, \dots)$ eine Folge reeller Zahlen

formal: Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad n \mapsto x_n$
$f(n) = x_n$

2.1 Definition

Eine Folge (x_n) heißt <u>konvergent</u> mit <u>Grenzwert</u> x, falls $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$,

so dass $\forall n > N(\varepsilon)$ gilt, dass $|x_n - x| < \varepsilon$.

Man schreibt:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \text{oder} \quad x_n \to x$$

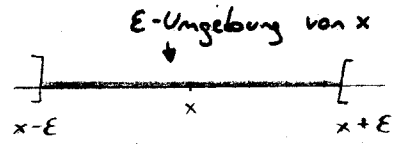
Man sagt: (x_n) konvergiert nach x
(x_n) strebt gegen x

Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt <u>Nullfolge</u>, eine Folge ohne Grenzwert heißt <u>divergent</u>.

$$|x_n - x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \qquad /+x$$

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$$

$$x_n \in \,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$



Man sagt eine Eigenschaft gilt für „<u>fast alle</u>" natürlichen Zahlen,

wenn sie für alle mit Ausnahme von endlich vielen gilt.

$\lim_{n \to \infty} x_n = x \iff$ Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen fast alle Folgenglieder x_n in d. ε-Umgebung.

praktisch (digital (mit dem TR)): Für jede beliebige Rechengenauigkeit

(z.B. auf 10 NKS genau) ist die Folge x_n schließlich konstant.

d.h. für $\varepsilon = 10^{-10}$ sind alle x_n, deren erste 10 NKS übereinstimmen innerhalb der ε-Umgebung.

Schreibweise:

$\lfloor x \rfloor$ = nächstkleinere ganze Zahl

$\lceil x \rceil$ = nächstgrößere ganze Zahl

Bsp:

1) $x_n = 1$ $(1, 1, 1, \dots)$ konstante Folge $\lim x_n = 1$

$|x_n - x| = |1-1| = 0 < \varepsilon \quad \forall n$

2) $x_n = (-1)^n$ $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ ist divergent

Ang. $x = 1$: $|x_n - x| = 0$ od. 2, für n ungerade $|x_n - x| = 2$ ∞ oft $\Rightarrow 1 \neq$ GW.

Ang. $\varepsilon = 1$ $|x_n - x| > 1$ für ∞ viele n $\Rightarrow$ nicht fast alle innerhalb d. ε-Umgebung

3) $\frac{1}{n} \to 0$

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$ gilt $\forall n > \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$ (AR) wird angewendet

(Man kann Körper ohne (AR) konstruieren, aber wäre etwa $\frac{1}{n}$ keine Nullfolge?
In einem geordneten Körper, wo (AR) nicht gilt ist $\frac{1}{n}$ nicht konvergent.)

4) $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} < n \overset{(AR)}{\Leftrightarrow} n > \lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \rfloor$ ... das sind fast alle n

5) $x_n = \frac{3n+1}{n+2}$

$\lim x_n = 3$, denn $\left|\frac{3n+1}{n+2} - 3\right| = \left|\frac{3n+1-3n+6}{n+2}\right| =$

$= \frac{5}{n+5} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \frac{n+2}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} < n+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} - 2 < n$ gilt für $n > \lfloor \frac{5-2\varepsilon}{\varepsilon} \rfloor$, das sind fast alle n

6) $\frac{1}{2^n} \to 0$,

denn $\frac{1}{2^n}$ ist Teilfolge von $(\frac{1}{n})$

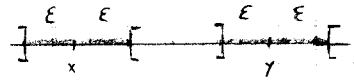
oder: $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Wenn eine Folge konvergiert, konvergieren auch alle Teilfolgen!

2.2 Einfache Tatsachen

- Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert

Bew: Ang, x, y sind 2 Grenzwerte von (x_n). Sei $x < y$.



Wählen: $\varepsilon = \frac{y-x}{3} = \frac{|x-y|}{3}$

Wissen: $\exists\, N_1(\varepsilon)$: für $n > N_1(\varepsilon)$ gilt $|x_n - x| < \varepsilon$
$\exists\, N_2(\varepsilon)$: für $n > N_2(\varepsilon)$ gilt $|x_n - y| < \varepsilon$

Sei $n > \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$

$$|x-y| \le |x-x_n| + |x_n - y| \quad \leftarrow \text{Dreiecksungleichung } |a+b| \le |a| + |b|$$

$$\le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2|x-y|}{3}$$

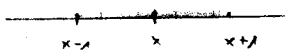
$$|x-y| \le \tfrac{2}{3} \cdot |x-y|$$

$$\tfrac{1}{3}|x-y| \le 0 \quad /\cdot 3$$

$$|x-y| \le 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \qquad \square.$$

- Jede konvergente Folge ist beschränkt, d.h. $\exists\, M: |x_n| \le M \;\forall n \in \mathbb{N}$
$-M \le x_n \le M$

Bew: Sei $x_n \to x$, $\varepsilon := 1 \Rightarrow \exists\, N(1): |x_n - x| < 1 \quad \forall n > N(1)$



$\Rightarrow |x_n| \le |x_n - x| + |x| \le 1 + |x| \quad$ für $n > N(1)$

$$M := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N(1)}|, 1+|x|\} \Rightarrow |x_n| \le M \;\forall n \qquad \square$$

- Jede Teilfolge (x_{n_k}) einer konvergenten Folge (x_n) konvergent zum selben Grenzwert.

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots \quad (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots)$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Bew: $|x_k - x| < \varepsilon \quad \forall\, k > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow |x_{n_k} - x| < \varepsilon \;\forall\, k > N(\varepsilon)$, weil $n_k \ge k > N(\varepsilon)$

Bsp: $x_n = (-1)^n$ hat 2 Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten

$x_{2n} = 1 \qquad \lim x_{2n} = 1$

$x_{2n+1} = -1 \qquad \lim x_{2n+1} = -1$

$\Rightarrow x_n$ ist nicht konvergent

• „Sandwichsatz":

Sei $a_n \leq x_n \leq b_n$, $(a_n), (b_n)$ seien konvergent mit $\lim a_n = \lim b_n = a$.

Dann gilt auch $\lim x_n = a$

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ $\quad a-\varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < a+\varepsilon$, gilt für $n > N(\varepsilon)$ $\quad \square$.

Anwendungen:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $0 < q < 1$ (geometr. Folge) Trieb: Kehrwert $\to \infty$

$\frac{1}{q} > 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = 1+b$ mit $b > 0$

$\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n = (1+b)^n \overset{1.6}{>} 1+nb > nb \Rightarrow 0 < q^n < \frac{1}{nb} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{b} \xrightarrow{\text{Satz}} 0$

Bernoullische Ungleichung

$\Rightarrow \lim q^n = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $-1 < q < 0$

$\underset{\searrow 0}{-|q|^n} \leq q^n \leq \underset{\searrow 0}{|q|^n}$ $\qquad 0 < |q| < 1$

$\Rightarrow \lim q^n = 0$

3) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\qquad$ Trieb: $a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ $\leftarrow$ erweitert mit $\frac{a+b}{a+b}$

$0 < x_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$

$\overset{\text{SWS}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

4) $\sqrt[n]{a}$ $\quad (a > 0)$

Fall I. $a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \geq 1$, setze $\sqrt[n]{a} = 1 + c_n$, $c_n \geq 0$

$\rightsquigarrow a = (1+c_n)^n \overset{1.6}{\geq} 1 + nc_n$

$\Rightarrow a - 1 \geq nc_n \Rightarrow \underset{\to 0}{\frac{a-1}{n}} \geq c_n \geq \underset{\to 0}{0} \Rightarrow \lim c_n = 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$

weil $\sqrt[n]{a} = c_n + 1$

Fall II. $a < 1 \Rightarrow b := \frac{1}{a} > 1$

$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$

$\boxed{\Rightarrow \text{Konvergiert eine Folge nach } x, \text{ konvergiert ihr Kehrwert nach } \frac{1}{x}.}$ ∇

2.3

2.3 Rechenregeln für Grenzwerte

Seien $(x_n), (y_n)$ konvergente Folgen, $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$

a) $x_n \leq y_n$ für (fast) alle $n \Rightarrow x \leq y$ $\boxed{\text{ABER}}$ $\cancel{x_n < y_n \Rightarrow x < y}$

b) $\lim (x_n + y_n) = x + y$

c) $\lim (x_n \cdot y_n) = x \cdot y \quad \Rightarrow \lim (x_n \cdot a) = (\lim x_n) \cdot a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

d) Falls $y \neq 0 \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$ (fast alle $y_n \neq 0$)

Bew:

a) Ang. $y < x$

$\varepsilon := \frac{x-y}{2} > 0 \quad \Rightarrow y_n < y + \varepsilon = x - \varepsilon < x_n$ gilt für große n

$y_n < x_n$ ↯ Wid. zur Ann. für a ($x_n \leq y_n$)

b) $|(x_n + y_n) - (x+y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \underbrace{|x_n - x|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|y_n - y|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} <$

Sei $\varepsilon > 0$

gilt für $n > N_1(\frac{\varepsilon}{2})$, $n > N_2(\frac{\varepsilon}{2})$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für $n > \max(N_1(\frac{\varepsilon}{2}), N_2(\frac{\varepsilon}{2}))$

c) $|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| = |x_n (y_n - y) + (x_n - x) y| \leq$

$\leq |x_n (y_n - y)| + |(x_n - x) y| = \underbrace{|x_n|}_{\leq M} \cdot \underbrace{|y_n - y|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|x_n - x|}_{<\varepsilon} \cdot |y| <$

$< M \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot |y| = \varepsilon \cdot (\underbrace{M + |y|}_{\in \mathbb{R}})$ gilt für $n > N(\varepsilon)$

d) ⇒ siehe Übung

Bsp: $x_n = \frac{3n+1}{n+2} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 3$

Bsp: $\lim \frac{3n^4 + 2n^2 + 6}{2n^4 + 7n^3 + 1} = \frac{3 + \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n^4}}{2 + \frac{7}{n} + \frac{1}{n^4}} \longrightarrow \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$

Bsp: $\sqrt[n]{a} \to 1$

Sei $a \geq 1$ $\quad 1 \leq \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots} \overset{AGM}{\leq} \frac{a + (n-1)\cdot 1}{n} = \frac{a-1}{n} + 1 \overset{b)}{\to}$

$\to 0 + 1 = 1 \overset{SWS}{\Rightarrow} \lim \sqrt[n]{a} = 1$

Bsp: geometrische Reihe

$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - \overset{\to 0}{q^n}}{1-q} \to \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

Sei $|q| < 1 \Rightarrow 0 < q < 1$

Bsp: $\sqrt[n]{n} \to 1$

1. Bew: Sei $\sqrt[n]{n} > 1$, also $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$, $a_n > 0$ ähnlich wie 16, aber es wird noch ein zusätzlicher Term verwendet

$n = (1 + a_n)^n \geq 1 + n a_n + \binom{n}{2} a_n^2 > \binom{n}{2} a_n^2$

$\Rightarrow n > \frac{n \cdot (n-1)}{2} a_n^2$

$\Rightarrow 2 > (n-1) a_n^2$

$\Rightarrow \frac{2}{n-1} > a_n^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{n-1}} > a_n > 0 \Rightarrow \lim a_n = 0 \Rightarrow$
$\lim \sqrt[n]{n} = \lim a_n + 1 = 1$

2. Bew:
$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots}_{n-2}} \overset{AGM}{\leq} \frac{2\sqrt{n} + (n-2)\cdot 1}{n} = \overset{\to 0}{\frac{2}{\sqrt{n}}} + 1 - \overset{\to 0}{\frac{2}{n}} \to 1$

$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{n} = 1$

2.4

2.4 Monotone Folgen

(x_n) monoton wachsend, falls $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(x_n) streng monoton wachsend, falls $x_n < x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(x_n) nach oben beschränkt (nob), falls $\exists K: x_n \leq K$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Satz: Jede monoton wachsende, nob Folge hat einen Grenzwert.

1. Bew. mit (SUP)

Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nob $\overset{(SUP)}{\Rightarrow}$ $\exists\, s := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ = kleinste o.S.

$\Rightarrow s \geq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (da o.S.).

$\forall \varepsilon > 0$ ist $s - \varepsilon$ <u>keine</u> o.S. von x_n $\Rightarrow \exists N(\varepsilon): x_{N(\varepsilon)} > s - \varepsilon$

$s - \varepsilon < x_{N(\varepsilon)} < x_{N(\varepsilon)+1} < \ldots \leq s$

$\Rightarrow x_n \in]s-\varepsilon, s] \subseteq]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$, gilt für $n \geq N(\varepsilon)$, d.h. $\lim x_n = s$

2. Bew. mit Dezimalbruchdarstellung

Folge wird nach rechts verschoben

$x_n = \underbrace{a_0^{(n)}}_{\in \mathbb{N}} . \underbrace{a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)} \ldots}_{\in \{0,1,\ldots,9\}}$ oBdA: $x_n \geq 0$ (wenn nicht, wird $x_n - x_1$ betrachtet, dann ist das 1. Glied = 0 und alle folgenden ≥ 0)

Erinnerung: $a_0 . a_1 a_2 a_3 \ldots \leq b_0 . b_1 b_2 b_3 \ldots \Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} a_0 < b_0, \text{ oder } a_0 = b_0, a_1 < b_1, \\ \text{oder } a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 < b_2, \ldots \end{array}\right\} (*)$

(x_n) beschränkt $\Rightarrow (a_0^{(n)})$ beschränkt in $\mathbb{N}$ $\Rightarrow A_0 : \max a_0^{(n)} \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$

$a_0^{(1)} \leq a_0^{(2)} \leq a_0^{(3)} \leq \ldots$ ab einem Index N_0 ist $a_0^{(N_0)} = a_0^{(N_0+1)} = a_0^{(N_0+2)} = \ldots = A_0$

betrachte (x_n) $n \geq N_0$
bet

1. NKS Nach $(*)$ $a_1^{(N_0)} \leq a_1^{(N_0+1)} \leq a_1^{(N_0+2)} \leq \ldots \leq a_1^{(N_1)} = a_1^{(N_1+1)} = a_1^{(N_1+2)} = \ldots = A_1 \in \{0,1,\ldots,9\}$ wird schließlich konstant

2. NKS $a_2^{(N_1)} \leq a_2^{(N_1+1)} \leq \ldots \leq a_2^{(N_2)} = a_2^{(N_2+1)} = \ldots = A_2 \in \{0,1,\ldots,9\}$

$\rightsquigarrow A_0 . A_1 A_2 A_3 \ldots$ reelle Zahl $A \geq x_n$ $\forall n$ (laut $(*)$)

$|x_n - A| = A - x_n \leq \frac{1}{10^k}$ für $n \geq N_k$, da die ersten k NKS übereinstimmen

$\Rightarrow \lim x_n = A$

Bsp: $0, 0.9, 0.999, \ldots \rightarrow 0.99999\ldots = 1.000000\ldots$
zum Bew

Anwendungen:

1) $q^n \to 0 \quad (0<q<1)$

Da $q \geq q^2 \geq q^3 \geq q^4 \geq \ldots > 0$ fallend, nb

$\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} \lim q^n =: l$ existiert, $l \geq 0$ (nach 2.3a)

$\lim q^{n+1} = q \cdot \lim q^n$ (nach 2.3c) $\Rightarrow l = ql \Rightarrow l \cdot (1-q) = 0$

$\Rightarrow l = 0$

2) $\sqrt[n]{a}$

Falls $a \geq 1$, ist $(\sqrt[n]{a})$ fallend, ≥ 1

Sei $l = \lim \sqrt[n]{a} \geq 1 \qquad x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{a}$ ← gilt ss l (wel Teilfolge von $\sqrt[n]{a}$)

$l = l^2$, $l \geq 1 \Rightarrow l = 1$

3) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}} = ?$ sinnvoll?

Grenzwert der Folge $\underbrace{\sqrt{1}}_{x_1}, \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1}}}_{x_2}, \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}_{x_3}, \ldots$

$x_1 = 1$
$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$

Beh: (x_n) ist monoton wachsend. Bew. mit vollständiger Induktion

$x_1 = 1 < x_2 = \sqrt{2}$

ang. $x_n > x_{n-1} \Rightarrow \sqrt{1+x_n} > \sqrt{1+x_{n-1}}$ ← wg. Bildungsgesetz! $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$

$x_{n+1} > x_n$

Beh: (x_n) ist beschränkt, $x_n \leq 2$

Bew mit Ind.: $n=1$: $x_1 = 1 \leq 2$

auf $x_n \leq 2 \Rightarrow 1+x_n \leq 3$, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{4} = 2$

$\overset{\text{Satz 2.4}}{\Longrightarrow} \lim x_n = x$ existiert

$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \Rightarrow x_{n+1}^2 = 1+x_n$

$x^2 = 1+x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, aber (x_n) wachsend, also $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ldots$

2.5 Häufungswerte

Eine Zahl x heißt <u>Häufungswert</u> der Folge (x_n), falls in jeder ε-Umgebung von x <u>unendlich viele</u> Glieder der Folge liegen, d.h. $\exists\, n_1 < n_2 < n_3 < \dots \quad |x_{n_i} - x| < \varepsilon$

Bsp: $x_n = (-1)^n$ hat 2 HW: $1, -1$, aber keinen GW!

Sei x ein HW von (x_n)

$\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists\, n_1 : |x_{n_1} - x| < 1$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists\, n_2 : |x_{n_2} - x| < \frac{1}{2}$

$\varepsilon = \frac{1}{k} \Rightarrow \exists\, n_k : |x_{n_k} - x| < \frac{1}{k} \Rightarrow$ Teilfolge (x_{n_k}) hat Grenzwert x

---

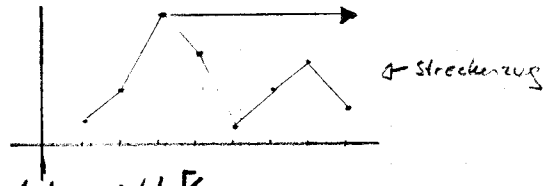
Folgerung: x ist HW der Folge $(x_n) \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge (x_{n_k}) mit GW x

Frage: Hat jede Folge einen HW? - Nein, z.B die Folge d. nat. Zahlen.

$\Rightarrow$ Konstruieren monotone Teilfolge

x_n heißt Gipfel, falls alle auf x_n folgenden Bilder kleiner sind,

d.h. $x_n > x_k \;\forall\; k > n$



Wenn kein anderes Folgenglied (nach x_n) höher liegt, ist x_n ein Gipfel. Folgenglieder vor x_n zählen dabei nicht!

Fall I: Die Folge (x_n) hat ∞ viele Gipfel

$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots \qquad n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

$\Rightarrow x_{n_1} > x_{n_2} > x_{n_3} > \dots$ $\Rightarrow$ streng monoton fallende Teilfolge

Fall II: Die Folge (x_n) hat endlich viele oder keinen Gipfel

Sei x_h der letzte Gipfel, $h-1 = n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

$\Rightarrow x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \dots$ $\Rightarrow$ monoton wachsende Teilfolge

x_{n_1} kein Gipfel $\Rightarrow \exists\, n_2 > n_1$ s.d. $x_{n_2} > x_{n_1}$
x_{n_2} kein Gipfel $\Rightarrow \exists\, n_3 > n_2$ s.d. $x_{n_3} > x_{n_2}$
...

Folgerung: Jede Folge x_n hat eine monotone Teilfolge.

Satz: (Bolzano, Weierstraß) B: 1781–1848, Prag W: 1815–1897, Berlin

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungswert.

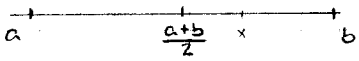
Bew 1:

$\exists$ monotone, beschränkte Teilfolge $(x_{n_k}) \overset{2.4}{\Rightarrow} \exists \lim x_{n_k} = x \Rightarrow$

$\Rightarrow x$ ist ein Häufungswert der Folge x_n. $\square$.

Bew 2: (Intervallschachtelung)

(x_n) beschränkt $\Rightarrow \exists\, a,b \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \;\forall n,\; I_0 = [a,b]$



in mindestens einem der beiden entstehenden Teilintervalle müssen ∞ viele Folgenglieder liegen, wir wählen danach $[a, \frac{a+b}{2}]$ oder $[\frac{a+b}{2}, b]$, ist dann I_n mit ∞ vielen Gliedern in I_n.

Das Intervall wird für $I_2, I_3 \ldots$ erneut geteilt. $\Rightarrow I_n \in I_{n+1}$, Länge von $I_n = \frac{1}{2^n} \cdot (b-a)$,

$\overset{(15)}{\Rightarrow} \exists$ innerster Punkt $x \in I_n \;\forall n \Rightarrow x$ ist HW!

weil: Sei $\varepsilon > 0$. Die ε-Umgebung von x: $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ enthält

I_n für große n $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$, ∞ viele Folgenglieder $\in I_n \Rightarrow$

weil Nenner $\to \infty$, Bruch $\to 0$!

$\Rightarrow \infty$ viele in der ε-Umgebung von x. $\Rightarrow x$ ist HW der Folge x_n $\square$.

Folgerung: (x_n) beschränkt, habe nur einen HW x. $\Rightarrow \lim x_n = x$

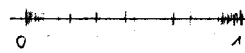
Bew: Ang. $x_n \not\to x \Rightarrow \varepsilon > 0$, $|x_n - x| \leq \varepsilon$ für ∞ viele

$n = n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Teilfolge (x_{n_k}) ist beschränkt und hat nach

Satz von BW einen HW y. $|x_{n_k} - x| \leq \varepsilon \Rightarrow |y - x| \leq \varepsilon$.

y ist auch HW der Folge $(x_n) \Rightarrow (x_n)$ hat 2 HW x, y $(x \neq y)$ $\lightning$ Widd. zur Ann.

Bsp:

- $(x_n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \ldots)$  HW: 0, 1
- $\sin 90^\circ n = \sin \frac{\pi n}{2} = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)$ HW: $-1, 0, 1$
- $\sin n$ hat als HW alle reellen Zahlen aus $[-1, 1]$
- $x_n = \alpha n \pmod 1 = \alpha n - \lfloor \alpha n \rfloor \in [0, 1[$ hat als HW reellen Zahlen im Intervall $[0,1]$

  $\alpha = 0$: $x_n \equiv 0$
  $\alpha = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots$
  $\alpha = \frac{1}{3}$: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \ldots$

  ABER: Wenn $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow (x_n)$ ist periodisch $\Rightarrow$ nur endl. viele HW!
- $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ $x_0 \in [0,1] \Rightarrow x_n \in [0,1] \;\forall n$

  Für „fast alle" $x_0 \in [0,1]$ hat x_n als HW alle reellen Zahlen in $[0,1]$.

$\limsup_{n\to\infty} x_n$ = größter HW der Folge (x_n) = $\sup\{x \in \mathbb{R}: x_n > x$ gilt für ∞ viele $n\}$

$\limsup x_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$: $x_n > L - \varepsilon$ für ∞ viele n
$x_n < L + \varepsilon$ für fast alle n

Schreibweisen: $\limsup x_n = \overline{\lim}\, x_n$

$\Rightarrow$ Intervallhalbierungsverfahren (Bew. von B-W)

wenn man immer das rechte Intervall wählt (falls es ∞ viele Folgenglieder enthält), dann ist der innerste Punkt gleich dem $\limsup x_n$.

analog: $\liminf x_n = \underline{\lim}\, x_n$ = kleinster HW von x_n

2.6 2.6 Bestimmte Divergenz

Def: Eine Folge $a_n \to +\infty$ („Eine Folge a_n divergiert bestimmt gegen $+\infty$") falls

$\forall K \in \mathbb{R}: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: a_n > K$

analog: $b_n \to -\infty$, falls $\forall K \in \mathbb{R}: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: b_n < K$

Es gilt: $b_n \to -\infty \Leftrightarrow -b_n \to +\infty$

(Manchmal definiert man auch $a_n \to \infty$, falls $|a_n| \to +\infty$)

Bsp: $a_n = n \to +\infty$ $\quad b_n = -2^n \to -\infty$

Satz: Wenn $a_n \to +\infty$, dann ist $a_n \neq 0$ für fast alle n und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Umgekehrt, wenn $x_n \to 0$, und $x_n \neq 0$, dann folgt $\left|\frac{1}{x_n}\right| \to +\infty$.

Bew: 1) $a_n \to +\infty \Rightarrow$ Für $K = 0$ folgt $a_n > 0$ für fast alle n, daher $a_n \neq 0$.

Sei $\varepsilon > 0$, $K := \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow a_n > K$ für fast alle $n \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{K} = \varepsilon$ für fast alle $n \Rightarrow \left(\frac{1}{a_n}\right) \to 0$

2) analog zu 1)

$\boxed{\Rightarrow \text{Die Rechenregeln für GW gelten hier nicht!} \quad \infty - \infty = ?}$

2.7 **2.7 Die eulersche Zahl e**

haben wir als innersten Punkt der Intervallschachtelung $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$ definiert (1.8), aber $\Rightarrow$ Verfahren konvergiert sehr sehr langsam.

$$\Rightarrow e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Wir zeigen noch einmal, dass dieser Limes $\exists$ und weiters zeigen wir, dass $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$

Wert einer unendl. Reihe = Grenzwert der Folge der Partialsummen.

$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$ ist streng monoton wachsend

hier wird 2·3 durch 2·2 ersetzt; 2·3·4 wird ersetzt

(s_n) ist beschränkt: $s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1+1+1 = 3$

$s_n < 3 \quad \forall n$

$\Rightarrow (s_n)$ ist konvergent, $s := \lim s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

weitere Ausdrücke irrelevant

k Faktoren

sind beim Kürzen alle < 1!

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n\cdot n\cdot n}}_{k \text{ Faktoren}} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n$$

$$e_n \quad \frac{n-i}{n} = 1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1} = \frac{n+1-i}{n+1} \quad e_{n+1} \quad < 1$$

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)}{(n+1)\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot(n+1)} <$$

$$< \sum_{k=0}^{n+1} \ldots = e_{n+1} \qquad \Rightarrow e_n \text{ streng monoton wachsend}$$

$e_n < s_n < 3 \Rightarrow \lim e$ existiert, $e := \lim e_n$

$\Rightarrow \underline{e \le s_n}$

Sei $m \le n$: $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n\cdot n\cdot n} \le \sum_{k=0}^{n} \ldots = e_n$

$\downarrow$ L4 2.3b,c alles konvergent gg 1

Sei m fest, $n \to \infty$: $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1}_{k \text{ mal}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n \overset{2.3a}{\le} e$

$\downarrow$ 2.3e $\quad m \to \infty$

$\underline{s \le e}$

Nun: $e \le s$, $s \le e \Rightarrow \underline{s = e}$ $\square$.

Analog zeigt man für $a > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \quad (= e^a) \qquad \Rightarrow \text{siehe UE}$$

Satz: e ist irrational

Bew:

Ang. $e = \frac{m}{n} = \underbrace{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}}_{s_n} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots \qquad | \cdot n!$

$$e \cdot n! = \underbrace{m \cdot (n-1)!}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{n! \cdot s_n}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots}$$

← Wie groß ist der Unterschied?

⇒ weil alle Nenner verschwinden

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1-1} = \frac{1}{n}$$

⇒ „böser Rest" ist $< \frac{1}{n}$

beides verschiedene Zahlen $\in \mathbb{N}$

für alle $n \in \mathbb{N}$

⇒ Unterschied min. 1. ABER das, was dazukommt ist < 1! ↯

⇒ e nicht rational!

Bem: $|e - s_n| < \frac{1}{n \cdot n!}$ ← Wie weit ist die Partialsumme von GW entfernt?

⇒ sehr klein ⇒ sehr gut für numerische Berechnung von e

Übung: $s_n < e < s_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ liefert Intervallschachtelung für e

Platz zum Rechnen der Übung! →

2.8 **2.8 Cauchyfolgen** Cauchy (1789 - 1857)

Def: Eine Folge (x_n) heißt Cauchyfolge (Fundamentalfolge), falls $\forall \varepsilon > 0$

eine nat. Zahl $N(\varepsilon)$ existiert, sd. $\forall n, m \geq N(\varepsilon): |x_n - x_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Folgenglieder rücken näher zusammen

Tatsachen:

- Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Bew: (durch Einsetzen in Def.) Sei $\lim x_n = x$. Sei $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \exists N(\frac{\varepsilon}{2}), \forall n, m > N(\frac{\varepsilon}{2}): |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

z.z. $|x_n - x_m| \overset{\Delta}{\leq} |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m > N(\frac{\varepsilon}{2})$ □.

$\Rightarrow$ haben Zahl N gefunden, sd. Folgenglieder mit Indizes $> N$ weniger als ε auseinander.

- Jede Cauchyfolge ist beschränkt (analog zu: Jede Folge mit GW ist beschränkt)

Bew: Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon): |x_n - x_{N(\varepsilon)}| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$

$$\Rightarrow |x_n| \leq \underbrace{|x_n - x_{N(\varepsilon)}|}_{< \varepsilon} + |x_{N(\varepsilon)}| < \varepsilon + |x_{N(\varepsilon)}| \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow |x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N(\varepsilon)-1}|, |x_{N(\varepsilon)}| + \varepsilon\} \quad \forall n$$

Satz: (Konvergenzverhalten von Cauchy)

Eine Folge <u>reeller</u> (sei rationale Zahlen Satz falsch!) Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Bew: $\Rightarrow$: Konvergente Folge ist Cauchyfolge (siehe oben)

$\Leftarrow$: Sei (x_n) eine CF $\Rightarrow (x_n)$ ist beschränkt $\overset{\text{Satz von BW}}{\overset{2.5}{\Rightarrow}} (x_n)$ hat HW x.

zwei Möglichkeiten: I: zeigen, dass sie genau einen HW hat

II: zeigen, dass HW = GW

Sei $\varepsilon > 0$. Da (x_n) eine CF $\Rightarrow \exists N = N(\frac{\varepsilon}{2}): |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N$

x HW $\Rightarrow$ in Umgebung $(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2})$ liegen ∞ viele Folgenglieder.

$\Rightarrow \exists m \geq N$ sd. $|x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n \geq N$ ist $|x_n - x| \leq \underbrace{|x_n - x_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_m - x|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon$

$\forall n \geq N \Rightarrow \lim x_n = x$ □.

Bsp: $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ ← harmonische Reihe

$h_{2n} - h_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow h_n$ ist <u>keine</u> CF (weil Diff $> \frac{1}{2}$), daher nicht konvergent

Wäre h_n eine CF $\Rightarrow |h_n - h_m| < \varepsilon \quad n, m > (\varepsilon)$

$h_{2n} - h_n = \frac{1}{2} \; \forall n \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}, \; m = 2n \Rightarrow \nexists N(\varepsilon)$

$h_n \to +\infty$

CF sind theoretisch wichtig:

1) Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$

$X :=$ Menge aller CF in $\mathbb{Q}$, X ist ein VR, Ring (über $\mathbb{Q}$)

Äquivalenzrelation $(x_n) \sim (y_n) :\Leftrightarrow (x_n - y_n) \xrightarrow[\text{Nullfolge}]{} 0$

$X/\sim$ ist Körper, Ordnung, (OV)

$X/\sim \; \cong \mathbb{R}$ $\qquad \cong$ ...kann man definieren als

2) $\mathbb{R}$ axiomatisch

$\boxed{\text{Übung: (CF)} \Rightarrow \text{(IS)}}$

Sei K ein geordneter Körper

(CF): Jede CF in K ist konvergent (in K)

Dann gilt: (OV) $\Leftrightarrow$ (AR) + (CF)

3) Funktionen, Stetigkeit

3.1 **3.1 Funktionen**

[S] ... Sigmund, VO EMA

wiederholen: [S], Kap 3.3, 3.4, [SS]

$f: A \to B \quad \forall a \in A: \exists!\, b \in B: \; b = f(a)$

$a \mapsto f(a)$

A ... Definitionsbereich
B ... Ziel-, Wertemenge

injektiv, surjektiv, bijektiv (Def siehe [S])

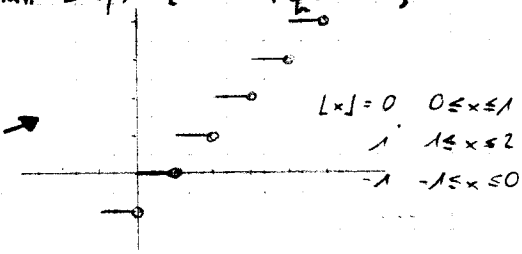
Graph von $f = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$

mengentheoretisch: Eine Funktion F ist eine Teilmenge von $A \times B$ mit:
1) $\forall a \in A: \exists\, b \in B: (a,b) \in F$
2) $(a, b_1) \in F$ und $(a, b_2) \in F \Rightarrow b_1 = b_2$

Bsp.
- Folge (x_n) ist Fnkt: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \; n \mapsto x_n$
- Addition ist Fnkt: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; (x,y) \mapsto x + y$

reelle Funktionen: $f: D \to \mathbb{R}$ wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ $(D = D(f))$

Bsp.
- $f(x) \equiv c$ konst. Fnkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $f(x) = x$ ident. Fnkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x^n$ Exponentialfnkt.
- $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ Polynomfnkt.
- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ p, q Polynome rationale Fnkt. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$
- $f(x) = |x|$ Betragsfnkt.
- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ nächstkleinere ganze Zahl
  $\lceil x \rceil$ nächstgrößere ganze Zahl



- $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

...

Rechnen mit Funktionen:

$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \qquad D(f+g) = D(f)+D(g)$

$(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x) \qquad D(f\cdot g) = D(f)\cap D(g)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f)\cap D(g)\cap\{x\in\mathbb{R} : g(x)\neq 0\}$

$a\in\mathbb{R} \Rightarrow (a\cdot f)(x) := af(x)$

Die Menge aller Fnkt. $X \to \mathbb{R}$ bildet einen VR über $\mathbb{R}$

ist Ring, Algebra (siehe [SS]), aber kein Körper! (hat Nullteiler, weil manche Fnkt. $\neq 0$ Nullstellen haben)

3.2 **3.2 Grenzwert von Funktionen**

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$, $\neq \emptyset$ (oft ist D ein Intervall)

$a\in\mathbb{R}$ so, dass $\exists x_n \in D$ mit $x_n \neq a$ $\forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Häufungswert ≠ Häufungspunkt!

(a heißt „Häufungspunkt" der Menge D)

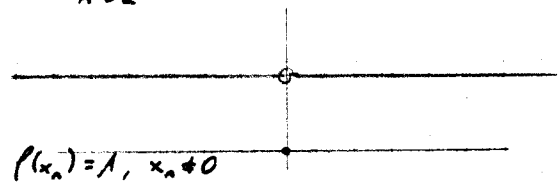
Bsp: $D =]0,1[\Rightarrow a\in[0,1]$

$D = \mathbb{Q} \Rightarrow a\in\mathbb{R}$

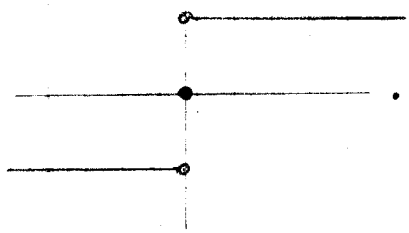
ist nicht immer eine Bedingung

Def: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \iff$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n\in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ soll gelten: $\lim\limits_{n\to a} f(x_n) = c$

Bsp: • $f(x) = |\operatorname{sgn} x| = \begin{cases} 1 & x\neq 0 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$



$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, da $f(x_n) = 1$, $x_n \neq 0$



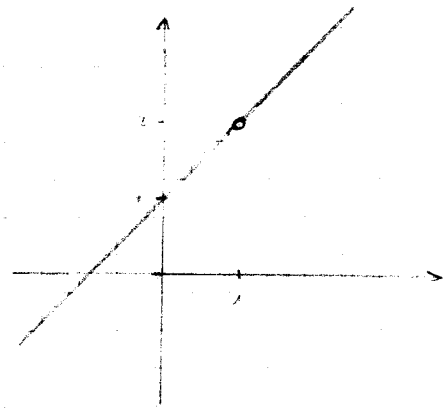
• $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} f(x) \not\exists$!

weil je ∞ viele $= 1, -1$

• $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \qquad D(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\left(\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x-1} = x+1\right)$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$



• $f(x) = x^2$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$ weil: $x_n \to a \Rightarrow x_n x_n \to a\cdot a$ (2.3)

$x_n^2 \to a^2$

Satz: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \iff \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall x \in D$ ist $\overbrace{0 < |x-a| < \delta}^{x \neq a}$ gilt: $|f(x) - c| < \varepsilon$

sehr wichtiger Beweis

kommt vllt zur Prüfung!

Bew:

$\underline{\Leftarrow}$: Sei $\varepsilon > 0$. z.z.: jede Folge, die RS erfüllt, konvergiert.

$\Rightarrow \exists\, \delta \ldots$ ← laut Vorr.

Sei (x_n) eine Folge in D, mit $x_n \to a$ aber $x_n \neq a\ \forall n$ zu

δ: $\exists\, N(\delta) : \forall n \geq N(\delta) : |x_n - a| < \delta$ ← δ-Umgebung

$\Rightarrow |f(x_n) - c| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\delta) \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

Hier ist die Negation!

$\underline{\Rightarrow}$: indirekt: $\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, \delta > 0 : \exists\, x \in D$ mit $0 < |x-a| < \delta$ und $|f(x) - c| \geq \varepsilon$

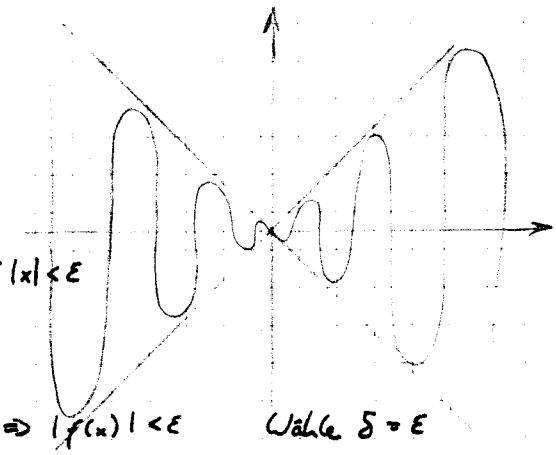
Wähle $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \Rightarrow \exists\, x_n \in D$ mit $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x) - c| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a, \quad x_n \neq a \quad \forall n$

<u>aber</u>: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ kann nicht c sein ($\neq c$), weil alle Folgenelemente mehr als ε von c entfernt sind. Wid. $\square$

Bsp: $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$



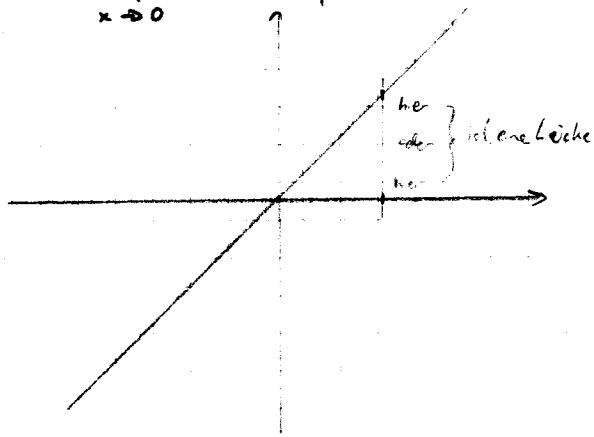
Bew: $|f(x) - 0| = |x \sin \frac{1}{x}| = |x| \cdot |\sin \frac{1}{x}| \leq |x| < \varepsilon$

$a = c = 0$

z.z. $\forall \varepsilon : \exists\, \delta : 0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ Wähle $\delta = \varepsilon$

Bsp: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrational} \\ x & x \text{ rational} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, weil $|f(x)| \leq |x|$, daher wähle $\delta = \varepsilon$



Teilfolge: $x_n = \frac{1}{n}$

$f(x_n) = \frac{1}{n} \to 0$

Folgerung: Rechenregeln für Grenzwerte (folgt aus 2.3)

Sei $\lim_{x \to a} f(x) = c$, $\lim_{x \to a} g(x) = d$, a sei ein HP von $D(f) \cap D(g)$

$\Rightarrow$ • $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = c + d$

• $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = c \cdot d$

• $d \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}$

• Ist $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in D(f) \cap D(g) \Rightarrow c \geq d$

<u>rechts-, linksseitiger Grenzwert</u>

rechtsseitiger GW:

$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x)$, wobei $g = f$ $D(f) \cap]a, +\infty[$ (und a HP von $D(g)$)

d.h. $\lim_{x \to a+} f(x) = c \Leftrightarrow \forall$ Folgen (x_n) mit $x_n \in D$, $x_n > a$ $\forall n$, $x_n \to a$ gilt:

$$f(x_n) \to c$$

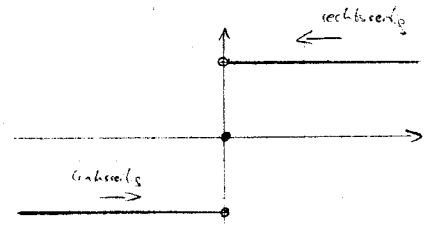
linksseitiger GW:

$\lim_{x \to a-} f(x) = c \Leftrightarrow \forall$ Folgen (x_n) mit $x_n \in D$, $x_n \to a$ gilt: $f(x_n) \to c$

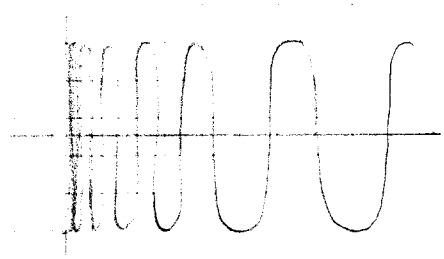
Bsp: $\lim \operatorname{sgn} x$

$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ rechtsseitig

$\lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$ linksseitig



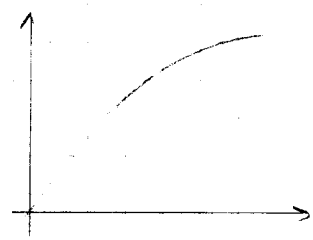
Bsp: $\lim_{x \to 0+} \sin \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ existiert nicht!



$\limsup_{x \to 0+} \sin \frac{1}{x} = 1$ größter HW

$\liminf_{x \to 0+} \sin \frac{1}{x} = -1$ kleinster HW

Bsp: $\lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$, denn: $a = c = 0$



$|\overset{f(x)-c}{\sqrt{x}}| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon^2$

Wähle $\delta = \varepsilon^2$ $\quad |x| < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{x} < \varepsilon$

$0 < x < \varepsilon^2$ $\quad |\sqrt{x}| < \varepsilon$

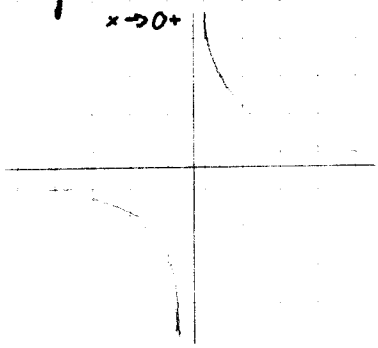
uneigentliche Grenzwerte

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \;:\Leftrightarrow\; \forall K > 0\ \exists \delta > \text{sd.}\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$

$\Leftrightarrow \forall$ Folgen (x_n) mit $x_n \neq a\ \forall n,\ x_n \to a$ gilt: $f(x_n) \to +\infty$

Bsp: $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\qquad \frac{1}{x} > K \Leftrightarrow x < \frac{1}{x}$ $\qquad$ Wähle $\delta = \frac{1}{K}$

$\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$



Bemerkung: Es gilt wieder (vgl. 2.6): $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow f(x) > 0$ für x nahe bei a und $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

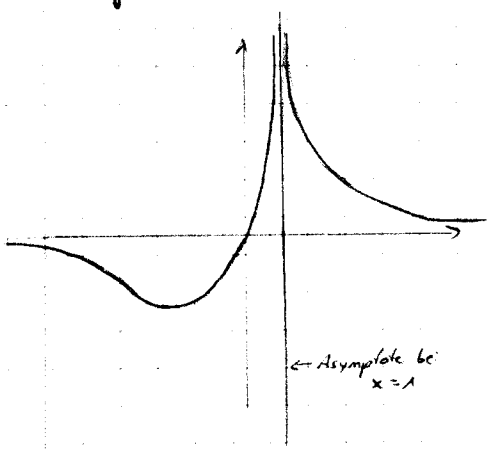
soll heißen: in der ε-Umgebung

Wir zeigen, das äquivalent:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0:\ \forall x > K$ gilt $|f(x) - c| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall$ Folgen (x_n) mit $x_n \in D(f)$ und $x_n \to +\infty$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$

Bsp: $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$



$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim \frac{\frac{2}{x} \to 0}{(1 - \frac{1}{x})^2 \to 0} = \frac{0}{(1-0)^2} = 0$

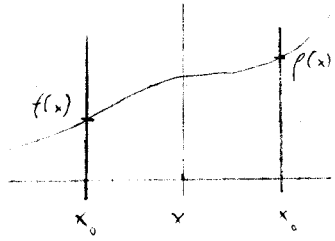
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$, weil $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2} > \frac{1}{(x-1)^2} \overset{?}{>} K \Leftrightarrow$

$x \to 1 \quad x > \frac{1}{2} \quad 2x > 1$

$\Leftrightarrow |x - 1| < \frac{1}{\sqrt{K}} = \delta$

3.3 Stetige Funktionen (Bolzano 1817, Cauchy, Weierstrass)

Def: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, wenn $\forall \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. ($\delta$ darf von ε und x_0 abhängen)



numerisch: Um $f(x_0)$ mit der Genauigkeit ε zu berechnen, braucht man die Genauigkeit δ für x.

Sind x und x_0 nahe beisammen, sind auch die $f(x)$ nahe beisammen

$$\boxed{f \text{ ist stetig in } x_0 \iff \forall \text{Folgen } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ mit } x_n \in D,\ x_n \to x_0 \text{ gilt: } f(x_n) \to f(x_0)}$$

Bew siehe Übung, ähnlich zu 3.2

Ist x_0 ein HP von D, dann gilt: f stetig in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ist x_0 kein HP von D, dann ist f jedenfalls in x_0 stetig.

Bsp: $D = [0,2] \cup \{2\} \Rightarrow f$ ist im Punkt 2 immer stetig (GW nicht sinnvoll def.)

Bsp: $f(x) = \operatorname{sgn} x$ kein Limes, Sprungstelle, l.s. GW $\neq$ r.s. GW
$\Rightarrow f$ ist <u>nicht</u> stetig in $x_0 = 0$

Def: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig (continuous), falls f in jedem Punkt x_0 in D stetig ist.

Bsp: $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig

2 mögliche Beweise: (mit ε oder mit Folgen)

<u>1. Beweis</u>

$$f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 = (x + x_0) \cdot (x - x_0)$$

feste Zahl, die wir suchen

Damit ist alles $< \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0||x + x_0| \le |x - x_0|(|x| + |x_0|) \le |x - x_0|(1 + 2|x_0|) < \varepsilon \iff |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} = \delta$$

Sei $|x - x_0| \le 1$

$$|x| = |x - x_0 + x_0| \le |x - x_0| + |x_0| \le 1 + |x|$$

2. Beweis für die Stetigkeit von $f(x)=x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit Folgen)

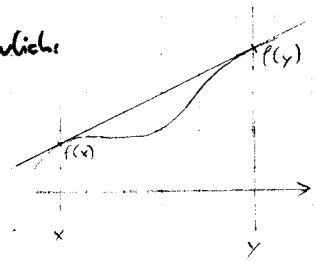
Sei (x_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

$$\lim f(x_n) = \lim x^2 = \lim x_n x_n \overset{2.Dc}{=} x_0 \cdot x_0 = x_0^2 = f(x_0)$$

Gedanken zur 1. Methode (mit ε):

Def: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig (L-stetig) falls eine Konstante $L>0$ existiert, sodass $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ gilt. $\forall x,y \in D$

anschaulich:



Differenzquotient: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ = Anstieg der Sekante

$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq L$ ← Sekantenanstieg ist beschränkt, Fkt ist L-stetig wenn der Sekantenanstieg im Intervall $[-L,L]$ liegt.

Satz: Jede L-stetige Funktion ist stetig.

Bew: Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

Bsp: $f(x)=x^2$, $D=[-1,1]$ ist L-stetig

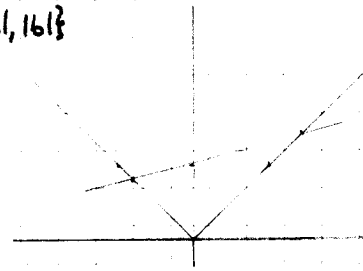
Bew: $|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |x-y|\cdot|x+y| \leq |x-y|\cdot(\underbrace{|x|}_{\leq 1}+\underbrace{|y|}_{\leq 1}) \leq 2|x-y| \Rightarrow \underline{\underline{L=2}}$

Bsp: $f(x)=x^2$, $D=[a,b]$

ist L-stetig mit $L = 2\max\{|a|,|b|\}$

Bsp: $f(x)=x^2$, $D=\mathbb{R}$

ist nicht L-stetig



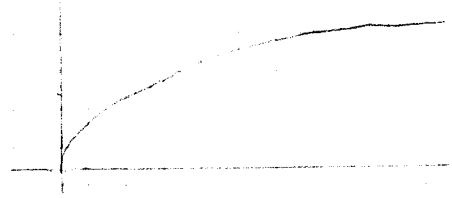
← der Anstieg der Sekante ist beschränkt

Bsp: $f(x)=|x|$, $D=\mathbb{R}$

$||x|-|y|| \leq |x-y|$ gilt $\Rightarrow L=1$ L-stetig

Bsp: $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, \infty[$

$\Rightarrow$ nicht L-stetig, weil Anstieg bei $x = 0$ $\Rightarrow \infty$ gilt.



Anstieg im Punkt 0

Bew: Sei $y = 0$ $\quad \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = \left|\frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ für $x \to 0+$, daher nicht $\leq L$

ABER: $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig in 0 (siehe 3.2) $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$

Es gilt: f, g L-stetig $\Rightarrow f+g, f \circ g$ L-stetig

f, g L-stetig, beschränkt $\Rightarrow fg$ L-stetig

<u>Folgerung:</u> Jede Polynomfunktion ist auf jedem beschränkten Intervall L-stetig. ($\Rightarrow$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ überall stetig)

<u>Gedanken zur 2. Methode:</u> (Bew, dass $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, mit Folgen bew.)

<u>Satz:</u> f, g stetig in $x_0 \Rightarrow f+g, fg, \frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$) sind stetig in x_0.

<u>Bew:</u> Rechenregeln für Grenzwerte (2.3, 3.2) f stetig in $x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

<u>Folgerung:</u> Jede Polynomfunktion ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Jede rationale Funktion ist stetig, wo sie definiert ist.

<u>Satz:</u> f stetig in x_0, g stetig in $f(x_0) \Rightarrow g \circ f$ ist stetig in x_0

$x_0 \xrightarrow{f} f(x_0) \xrightarrow{g} g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$

<u>Bew:</u> Sei (x_n) eine Folge in $D(f)$ mit $\lim x_n = x_0$, sodass $f(x_n) \in D(g)$,

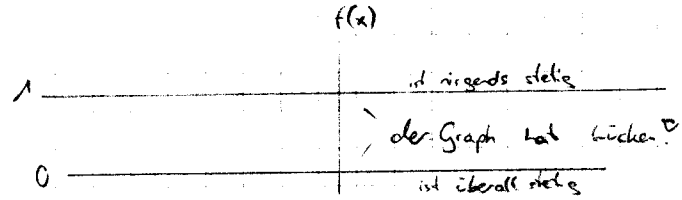
d.h. $g(f(x_n))$ ist definiert $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$, weil f stetig in x_0,

$\lim g(f(x_n)) = g(f(x_0))$, weil g stetig in $f(x_0)$.

$\Rightarrow g \circ f$ ist stetig in x_0

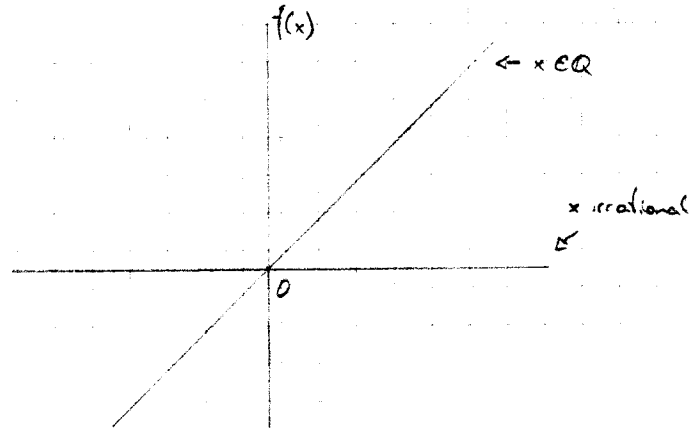
Beispiele:

- $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases}$



z.B.: $x_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ irr. $f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0$ aber $f(0) = 1$

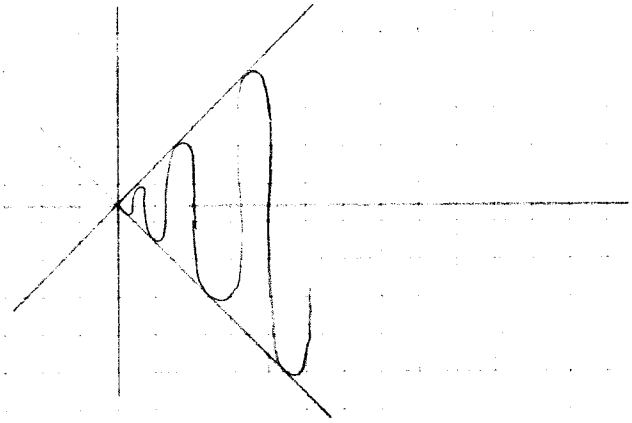
- $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrational} \\ x & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$



f stetig bei $x_0 = 0$

- $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x$

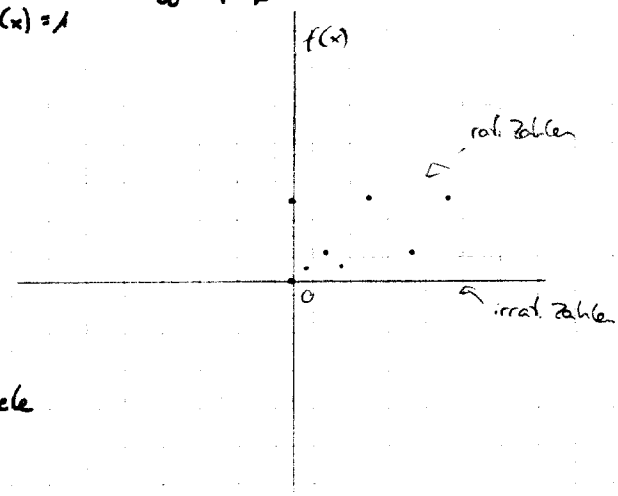
ist stetig



- $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrational oder } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ rational, gekürzter Bruch } ggT(p,q) = 1 \end{cases}$

$x = \frac{0}{1} \Rightarrow f(x) = 1$

$\Rightarrow$ Jede rat. Zahl ist ein Punkt



f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow x_0$ irrational

f ist sicher nicht stetig in den rat. Zahlen

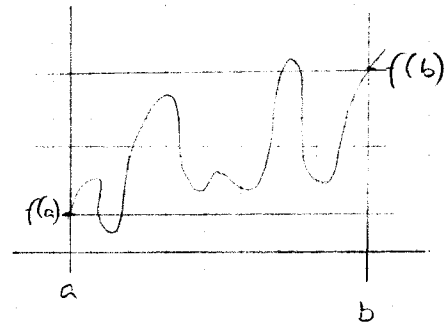
$\frac{1}{q} < \varepsilon \Leftrightarrow q > \frac{1}{\varepsilon}$ ist nur für endl. viele

Brüche $\frac{p}{q} \in [0,1]$ falsch

3.4

3.4 Der Zwischenwertsatz (Bolzano, 1817)

Ist f stetig in $[a,b] \to \mathbb{R}$ (d.h. in jedem Punkt $x_0 \in [a,b]$ stetig), dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



Formal: $\underbrace{f([a,b])}_{\substack{\text{Bildmenge} \\ \{f(x) : a \le x \le b\}}} \supseteq [f(a), f(b)]$

Spezialfall: <u>Nullstellensatz</u>:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

Ist $f(a) < 0$ und $f(b) > 0 \Rightarrow \exists\, c \in \,]a,b[\, : f(c) = 0$

<u>Bew.</u>: (Intervallschachtelung)

Betrachte $\frac{a+b}{2}$. Ist f dort $= 0 \Rightarrow$ fertig, $c = \frac{a+b}{2}$

Ist $f(\frac{a+b}{2}) > 0 \Rightarrow a_1 = a,\ b_1 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow$ neues Intervall $[a, \frac{a+b}{2}] = [a_1, b_1]$

Ist $f(\frac{a+b}{2}) < 0 \Rightarrow a_1 = \frac{a+b}{2},\ b_1 = b \Rightarrow$ neues Intervall $[\frac{a+b}{2}, b] = [a_1, b_1]$

$\Rightarrow$ Iteration $a_n \nearrow$ $b_n \searrow$ $\quad f(a_n) < 0 < f(b_n)$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^n}(b-a) \to 0$$

$\Rightarrow \exists!$ innerster Punkt c $\quad a_n \le c \le b_n \quad c = \lim a_n = \lim b_n$

$$f \text{ stetig in } c \Rightarrow f(c) = \underbrace{\lim \underbrace{f(a_n)}_{<0}}_{\le 0} = \underbrace{\lim \underbrace{f(b_n)}_{>0}}_{\ge 0} \overset{\text{nach 2.3a}}{\Rightarrow} f(c) = 0$$

<u>Bew. des Zwischenwertsatzes</u>:

Sei: $f(a) < y_0 < f(b) \Rightarrow$ verschieben Graph von f

$$g(x) = f(x) - y_0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g(a) = f(a) - y_0 < 0 \\ g(b) = f(b) - y_0 > 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Nullstellensatz}}{\Longrightarrow} c: g(c) = 0$$

$f(c) - y_0 = 0$

$f(c) = y_0$

Falls $f(a) > y_0 > f(b)$

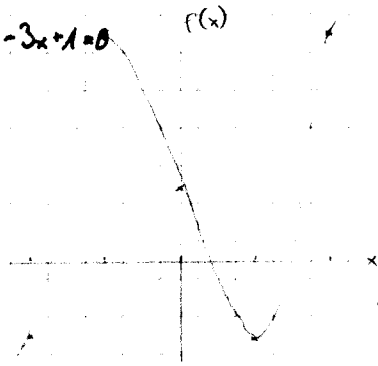
Analog mit $g(x) = y_0 - f(x)$

$\square$.

Bsp zum näherungsweisen Bestimmen von Nullstellen

$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$

x	$f(x)$
0	1
1	-1
2	3
-1	3
-2	-1



$\Rightarrow \exists$ min 3 Nullstellen

je eine in $[-2,-1]$, $[0,1]$, $[1,2]$

$\Rightarrow$ Lassen sich durch Intervallschachtelung berechnen

Der Zwischenwertsatz (ZWS)
Intermediate value theory

$\Rightarrow$ Wenn 2 Werte des Bildbereichs angenommen werden, dann auch alle dazwischen (falls f stetig ist)

$\boxed{f \text{ stetig} \Rightarrow \text{Bild eines Intervalls ist ein Intervall}}$

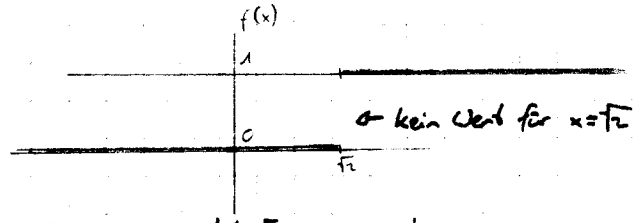
Bsp: $f(x) = x^2 - 2$ $\quad f(0) = -2$, $f(2) = 2$ $\quad \Rightarrow \exists c : f(c) = c^2 - 2 = 0$

$c^2 = 2$

$c = \sqrt{2}$ existiert in $\mathbb{R}$

Bsp: ZWS gilt nicht in $\mathbb{Q}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < \sqrt{2} \\ 1 & x > \sqrt{2} \end{cases}$$



$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ stetig! Alle rat. Zahlen werden angenommen.

<u>Satz</u>: Jedes Polynom ungeraden Grades hat min. eine Nullstelle.

<u>Bew</u>: $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = x^n \underbrace{\left(a_n + \underbrace{a_{n-1}\frac{1}{x}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{a_0 \frac{1}{x^n}}_{\to 0}\right)}_{\to 0}$ für $|x| \to \infty$

$\underset{\text{selbes Verfahren}}{\sim} a_n x^n$ für große $|x|$

Sei $a_n > 0$ (oBdA), $a_n = 1$

$x^n \to +\infty$ für $x \to +\infty$ $\quad$ (weil $x > 0$ $x < x^n$)

$x^n \to -\infty$ für $x \to -\infty$

Nullstellensatz $\Rightarrow \exists c : p(c) = 0$

für n gerade i.A. falsch
Bsp: $p(x) = x^{2n} + 1 > 0$

3.5

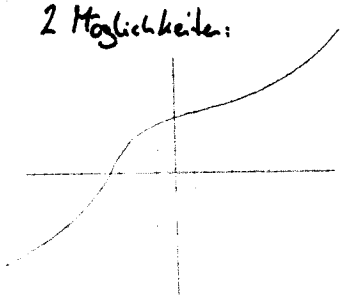
3.5 Monotone Funktionen

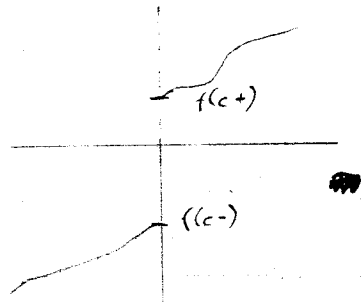
$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ Intervall $\subseteq \mathbb{R}$

f monoton wachsend $\Leftrightarrow \forall x,y \in I: x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

f streng monoton wachsend $\Leftrightarrow \forall x,y \in I: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

2 Möglichkeiten:





Sei c ein innerer Punkt des Intervalls I (kein Randpunkt)

$$\Rightarrow \sup f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) =: f(c-) \leq f(c) \leq f(c+) := \lim_{x \to c^+} f(x) = \inf f(x)$$

f ist stetig im Punkt $c \Leftrightarrow f(c-) = f(c+)$

f ist unstetig im Punkt $c \Leftrightarrow f(c-) < f(c+) \Rightarrow$ Sprungstelle bei c
Lücke im Bild

$$\Rightarrow \left]f(c-), f(c+)\right[\setminus \{f(c)\} \cap f(I) = \emptyset$$

<u>Satz</u>: Eine monoton wachsende Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ hat höchstens abzählbar viele Sprungstellen.

Bsp: $f(x) = \lfloor x \rfloor$ hat Sprungstellen bei allen ganzen Zahlen (Treppenfkt.)

<u>Bew</u>: Sei c eine Sprungstelle $\Rightarrow$ das offene Intervall $]f(c-), f(c+)[$ enthält eine rationale Zahl $r_c \in \mathbb{Q}$. $c_1 < c_2$ sind zwei Sprungstellen $\Rightarrow r_{c_1} < r_{c_2}$.

$\Rightarrow$ die Funktion $c \mapsto r_c$ von der Menge der Sprungstellen in die Menge der rationalen Zahlen ist injektiv

$\Rightarrow$ die Menge der Sprungstellen ist höchstens abzählbar (unendlich)

Frage: Gibt es eine monoton wachsende Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wo jede rationale Zahl eine Sprungstelle ist?

Ja, Begründung siehe Übung

Satz: f ist monoton wachsend, $[a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f genau dann stetig, wenn $f: [a,b] \to [f(a), f(b)]$ surjektiv ist.

Beweis: $\Rightarrow$: z.z.: $\forall y \in [f(a), f(b)]\ \exists x \in [a,b]: f(x) = y$

$\Leftarrow$: Bildmenge ist ein Intervall $\Rightarrow$ keine Lücke in der Bildmenge $f([a,b]$ $\Rightarrow$ f hat keine Sprungstelle $\Rightarrow$ f ist stetig

$\square$.

Bemerkung: In $\mathbb{Q}$ ist das falsch:

$$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \begin{cases} x & x < \sqrt{2} \\ x+1 & x > \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{ist stetig!}$$

Satz von der Umkehrfunktion

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig, streng monoton wachsend.
Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$. Diese ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.

$f: X \to Y$ bijektiv $\quad f^{-1}: Y \to X \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y \quad \forall y \in Y$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X \quad \forall x \in X$

$x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} f(x)$ $\quad$ Graph von f^{-1} = an der 1. Mediane gespiegelter Graph von f.

Bsp: $f(x) = kx + d = y \quad k > 0$

$$x = \frac{y-d}{k} \Rightarrow f^{-1}(y) = x = \frac{y-d}{k}$$

Beweis: $f: [a,b] \to [f(a), f(b)]$ ist injektiv ($\nearrow$ streng monoton wachsend) und surjektiv (Zwischenwertsatz) $\Rightarrow$ bijektiv

$\Rightarrow \exists f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$

f^{-1} ist streng monoton wachsend: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f^{-1} ist stetig, weil Bild von $f^{-1} = f^{-1}([f(a), f(b)]) = [a,b]$ ist.
$[a,b]$ ist ein Intervall $\Rightarrow$ hat keine Lücken $\Rightarrow$ f^{-1} hat keine Sprungstellen $\Rightarrow$ f^{-1} ist stetig.

$\square$.

Bem: $\exists$ einen analogen Satz für f streng monoton fallend.

3.6 Anwendung: n-te Wurzel

Satz: $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$ gibt es genau ein $b \geq 0$ mit $b^n = a$. b heißt die n-te Wurzel aus a. $b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.
Die Funktion $a \mapsto \sqrt[n]{a}$ $[0, \infty[\to [0, \infty[$ ist streng monoton wachsend und stetig.

Beweis: Potenzfunktion $x \mapsto x^n$, $[0, \infty[\to [0, \infty[$ ist streng monoton wachsend
$0 \leq x < y \Rightarrow 0 \leq x^n < y^n$ (mit Vollst. Ind. aus den Ordnungsaxiomen)
oder: $y^n - x^n = (y - x) \cdot \underbrace{(y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots + x^{n-1})}_{>0}$

und stetig (3.3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, da für $x > 1$: $x < x^n \Rightarrow$ bijektiv

$\Rightarrow$ Satz von der Umkehrfunktion auf Intervall $[0, M] \to [0, M^n]$

Bem: Für ungerade n: $\underset{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}{x \mapsto x^n}$ stetig, streng monoton wachsend

$\Rightarrow \exists$ Umkehrfunktion $\Rightarrow$ man könnte $\sqrt[n]{a}$ definieren $\forall a \in \mathbb{R}$

Berechnen von $\sqrt[p]{a}$:

1) Intervallschachtelung

2) Näherungsverfahren: $\sqrt[p]{a} = \lim\limits_{k \to \infty} x_k$
(quadr. Konvergenz)

$$x_{k+1} = \frac{(p-1)x_k^p + a}{p\, x_k^{p-1}}, \quad x_0 > 0 \qquad \text{Newton 1675}$$

$$|x_{k+1} - \sqrt[p]{a}| \leq k\, |x_k - \sqrt[p]{a}|^2 \qquad f(x) = x^p - a$$

3.7

3.7 Allgemeine Potenz- und Exponentialfunktionen

$a>0,\ n\in\mathbb{N}$ $\qquad a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ Mal}}$ (bzw. $a^{n+1}=a\cdot a^n$ mit Vollst. Ind.)

$a^{-n} := \frac{1}{a^n},\ a^0 := 1$ $\qquad$ Rechenregeln: $\boxed{\begin{array}{l} a^{n+m} = a^n\cdot a^m \\ (ab)^n = a^n\cdot b^n \\ (a^n)^m = a^{nm} \end{array}}$ $\forall a,b>0$ (oder $a,b\neq 0$) $n,m\in\mathbb{Z}$

$n\mapsto a^n$ — falls $a>1$ $\nearrow$; falls $0<a<1$ $\searrow$ $\qquad a\mapsto a^n$ $\uparrow$ für $n\in\mathbb{N}$

rationale Exponenten: $r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$

Beh: $a^r = a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$

z.z.: $r=\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'} \Rightarrow x=\sqrt[q]{a^p}$ $\qquad y=\sqrt[q']{a^{p'}}$ $\quad$ z.z. $x=y$

$x^q = a^p$ $\qquad \left.\begin{array}{l} x^{q'q}=a^{q'p} \\ y^{q'q}=a^{q'p} \end{array}\right\} \Rightarrow x^{q'q}=y^{q'q} \Rightarrow x=y$

Rechenregeln gelten weiter für $n,m\in\mathbb{Q}$

z.B. $\quad a^{r+s}=a^r\cdot a^s \qquad r=\frac{p}{q},\ s=\frac{p'}{q}\in\mathbb{Q} \qquad x:=a^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a}$

$\Leftrightarrow a^{\frac{p+p'}{q}} = a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{p'}{q}} \Leftrightarrow x^p\cdot x^{p'} = x^{p+p'}$

$\square$

$r\mapsto a^r$ $\quad\uparrow$ für $a>1$
$\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ $\quad\downarrow$ für $a<1$ $\qquad (a>0)$

<u>reelle Exponenten</u> $\quad a^b \quad (a>0,\ b\in\mathbb{R})$

als Funktion von b (= Exponent) auffassen $\Rightarrow$ Exponentialfunktion $x\mapsto a^x$

Wir müssen $f(x)=a^x$ zu $x\in\mathbb{R}$ erweitern, das geht mittels Monotonie:

Sei $a>1$. $f: r\mapsto a^r,\ \mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ ist $\uparrow$

Intervallschachtelung: $\ldots r_n\le r_{n+1}\le\ldots\le x\le\ldots\le R_{n+1}\le R_n\le\ldots$
$x\in\mathbb{R},\ r_n,R_n\in\mathbb{Q},\ r_n\uparrow x,\ R_n\downarrow x$ (z.B. endl. Dezimalzahlen)

$\ldots\le f(r_n)\le f(r_{n+1})\le\ldots\le f(R_{n+1})\le f(R_n)\le\ldots$ $\Rightarrow$ Intervallschachtelung $[f(r_n), f(R_n)]$

$f(r)=a^r$. $\quad$ z.z.: $f(R_n)-f(r_n)\to 0 \quad n\to\infty$

Sei $R_n-r_n<\frac{1}{n} \Rightarrow a^{R_n}-a^{r_n} = a^{r_n}\cdot(a^{R_n-r_n}-1)\le a^{R_n}(a^{\frac{1}{n}}-1) = a^{R_n}\cdot(\underbrace{\overset{\nearrow 1}{\sqrt[n]{a}}-1}_{\to 0})\to 0$

$\Rightarrow$ Die Intervallschachtelung $[a^{r_n}, a^{R_n}]$ hat genau einen innersten Punkt
$\to$ diesen nennen wir a^x

$\Rightarrow f: x\mapsto a^x$ ist $\uparrow$, stetig in jedem $x\in\mathbb{R}$ (keine Sprungstellen)
$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Es gelten die Rechenregeln:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ a^{x+y} = a^x \cdot a^y \\ \cdot\ (ab)^x = a^x \cdot b^x \\ \cdot\ (a^x)^y = a^{xy} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a,b>0 \\ x,y \in \mathbb{R} \end{array}$$

Bew: $r_n \le x \le R_n \quad s_n \le y \le S_n \qquad a^{r_n} \le a^x \le a^{R_n} \qquad a^{s_n} \le a^y \le a^{S_n}$

$$\Rightarrow r_n + s_n \le x+y \le R_n + S_n \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ a^{r_n+s_n}}}{a^{r_n} \cdot a^{s_n}} \le a^x \cdot a^y \le \underset{\substack{\parallel \\ a^{R_n+S_n}}}{a^{R_n} \cdot a^{S_n}}$$

$$a^{r_n+s_n} \le a^{x+y} \le a^{R_n+S_n}$$

$\Rightarrow a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (Eindeutigkeit des innersten Punktes) $\square$.

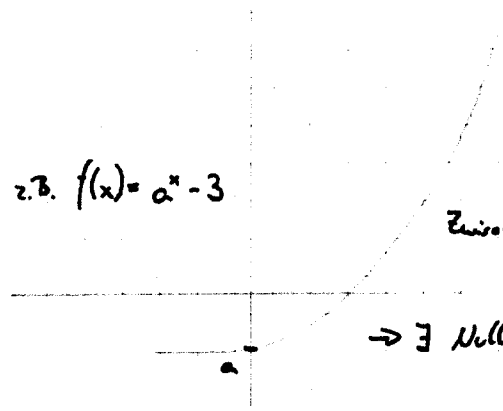
Bsp: $a^b,\ a>0,\ b \in \mathbb{R}$ $\qquad \sqrt[n]{a} = x \qquad p(x) = x^n - a$

$x = a^n$

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

z.B. $f(x) = a^x - 3$



Zwischenwertsatz

$\Rightarrow \exists$ Nullstelle

$\rightarrow$ nächste Seite
mit Satz und Beweis

Satz: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine monotone Funktion mit $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ und $f(1) = a > 0 \Rightarrow f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Beweis: $f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = a \cdot a = a^2$

Beh: es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $f(n) = a^n$

wir zeigen allgemeiner: $f(nx) = f(x)^n \quad n = 1, 2, \ldots \quad x > 1$

Bew. durch Vollst. Ind.: $n = 1$ ✓

$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) \cdot f(x) \overset{\text{IA. Ann.}}{=} f(x)^n \cdot f(x) = f(x)^{n+1}$ ✓ für $\mathbb{N}$ gezeigt

$f(1) = f(1+0) = f(1) \cdot f(0) = a \cdot 1 = a$ ✓

$\Rightarrow a = a \cdot f(0) \overset{: a \neq 0}{\Rightarrow} 1 = f(0)$

$p, q \in \mathbb{N}$

$f(\frac{p}{q}) = f(p \cdot \frac{1}{q}) = f(\frac{1}{q})^p = \circledast \qquad p = n; \ \frac{1}{q} = x$

$p = q \Rightarrow f(1) = f(\frac{1}{q})^p = f(\frac{1}{q})^q \Rightarrow \underbrace{f(1)^{\frac{1}{q}}}_{= a^{\frac{1}{q}}} = f(\frac{1}{q})$

$f(\frac{p}{q}) = f(p \cdot \frac{1}{q}) = f(\frac{1}{q})^p = \circledast$

$\circledast = (a^{\frac{1}{q}})^p = a^{\frac{p}{q}} \qquad f(\frac{p}{q}) = a^{\frac{p}{q}} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$

$1 = f(0) = f(x - x) = f(x) \cdot f(-x) \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{Q}, x > 0 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a^x} = a^{-x} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}: f(x) = a^x$ ✓ für $\mathbb{Q}$ gezeigt

zu zeigen: gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

f monoton $\Rightarrow f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

wird (wie vorher bei Def. von a^x) durch Intervallschachtelung gezeigt.

$r_n \leq x \leq R_n$

eindeutig monotone Erweiterung von $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ zu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ✓ für $\mathbb{R}$ gezeigt

$\square$.

3.8

3.8 e^x (nocheinmal, eleganter)

$$E(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

Motivation: Verzinsung eines Kapitals mit Zinssatz x
(Jakob Bernoulli)

nach 1 Jahr: $1+x$

nach 2 halben Jahren: $\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right) = \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 = 1+x+\frac{x^2}{4} > 1+x$

nach 3 drittel Jahren: $\left(1+\frac{x}{3}\right)^3 = 1+x+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{9} > 1+x$

...

Diese Folge ist (schließlich) monoton wachsend, n.o.b.

Beh: $\left(1+\frac{x}{n}\right) \le \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$

Beweise in 1.8: $\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot 1} \overset{AGM}{\le} \frac{n\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+x+1}{n+1} = 1+\frac{x}{n+1}$

für $1+\frac{x}{n} > 0$. $\Rightarrow \frac{x}{n} > -1 \Rightarrow x > -n$
$n > -x$

wir wollen die Gleichheit zeigen: (eine Teilfolge, jedes 2 Glied der Folge)

(1), $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{x+y}{2n}\right)^{2n}$, denn $\sqrt[2n]{\ }$:

$$\sqrt[2n]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{y}{n}\right)^n} \overset{AGM}{\le} \frac{n\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)+n\cdot\left(1+\frac{y}{n}\right)}{2n} = \frac{2n+x+y}{2n} = 1+\frac{x+y}{2n}$$

$n\to\infty$: $E(x)\cdot E(y) \le E(x+y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

(2): $$\sqrt[n]{\left(1+\frac{x-y}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{xy}{n}\right)} \overset{AGM}{\le} \frac{(n-1)\cdot\left(1+\frac{x-y}{n-1}\right)+\left(1+\frac{xy}{n}\right)}{n} = \frac{n-1+x+y+1+\frac{xy}{n}}{n} =$$

$$= 1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{y}{n}\right) \qquad /\,()^n$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{x-y}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{xy}{n}\right) \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

$$E(x+y)\cdot 1 \le E(x)\cdot E(y)$$

$\Rightarrow E(x+y) = E(x)\cdot E(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ $\square$.

$E(1) = e$ (1. Def. in 1.8

$E(0) = \lim 1^n = 1$

$x > 0 \Rightarrow E(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x > 1$ ← für pos. Zahlen ist $f > 1$

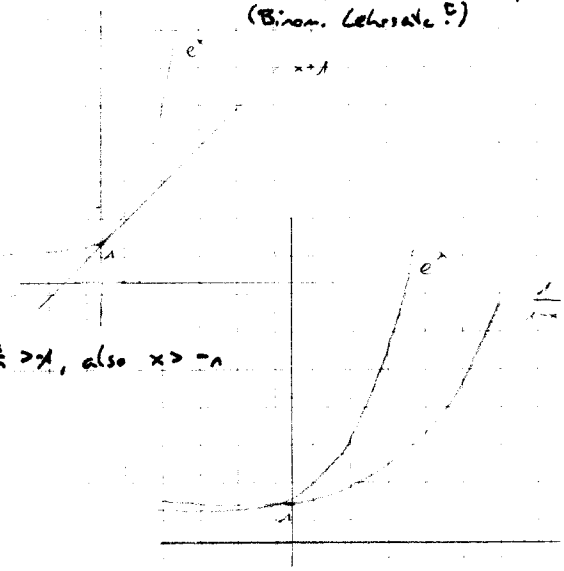
$x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow E(y-x) > 1 \overset{\cdot E(x) > 0}{\Longrightarrow} E(y-x) \cdot E(x) > E(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow E(y - x + x) > E(x) \Rightarrow E(y) > E(x)$ für $y > x$ ← f ist monoton wachsend

$\overset{\text{Satz 2.7}}{\Longrightarrow} E(x) = e^x$ (weil es nur eine Funktion mit $f(g+h) = f(g) \cdot f(h)$ gibt)

Analog für $e(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$e(x+y) = e(x) \cdot e(y) \Rightarrow e(x) = e^x$ → siehe auch Ü 7.1, Bew. durch formales Ausmultiplizieren (Binom. Lehrsatz!)



2 wichtige Ungleichungen für e^x

(1): $e^x > 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, Gleichheit Gl.: $x = 0$

Bew: $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x$

$\searrow e^x \geq 1 + x$ für $\frac{x}{n} > 1$, also $x > -n$

(2) $e^x(1-x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Gl. für $x = 0$

$e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad x < 1$

$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot (1-x)} \overset{\text{AGM}}{\leq} \frac{n \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1 - x}{n+1} = \frac{n + x + 1 - x}{n+1} = 1$

gilt für $1 + \frac{x}{n} > 0$, $1 - x > 0$ $\quad -n < x < 1$

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot (1-x) \leq 1$

$\downarrow$

$e^x \cdot (1-x) \leq 1$

(1) $e^x \geq 1 + x$

$e^x - 1 \geq x$

$x > 0 \quad \frac{e^x - 1}{x} \geq 1$

(2) $e^x \cdot (1-x) \leq 1$

$e^x - xe^x \leq 1$

$e^x - 1 \leq xe^x$

$x > 0 \quad \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x$

$x > 0 \quad 1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x$

ersetzen x durch $x - y > 0$, $x > y$

$$\boxed{e^y \leq \frac{e^x - e^y}{x - y} \leq e^x \quad \text{für } x > y}$$

Satz: e^x ist L-stetig auf $]-\infty, a]$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Bew: $|e^x - e^y| \leq L\,|x - y|$

$L = e^a$

3.9 Logarithmus

$b^x = a \iff \log_b a = x$ ... Jene Hochzahl, die mit Basis b potenziert a ergibt

Sei $b > 1$

$x \mapsto b^x$ ist streng monoton wachsend
$\mathbb{R} \to]0, \infty[$

$b^n \to +\infty \quad n \to \infty$
$b^{-n} = \frac{1}{b^n} \to 0 \quad n \to \infty$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ bijektiv

$\overset{3.5}{\Rightarrow} \exists$ Umkehrfunktion

$\log_b :]0, \infty[\to \mathbb{R}$

$\log_b b^x = x$, speziell: $\log_b 1 = 0$
$\log_b b = 1$
$\log_b \frac{1}{b} = -1$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u, v > 0 & \log_b (uv) = \log_b u + \log_b v \\ r \in \mathbb{R} & \log_b (u^r) = r \log_b u \end{array}}$$

Bew: $u = b^x \quad v = b^y \quad x, y \in \mathbb{R}$

$\log_b (b^x b^y) = \log_b (b^{x+y}) = x + y = \log_b u + \log_b v$

$u^r = b^{xr} \Rightarrow \log_b (b^{xr}) = x \cdot r = r \cdot x = r \cdot \log_b b^x = r \cdot \log_b u$

Satz: Wenn $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, $f(u \cdot v) = f(u) + f(v)$
$\forall u, v > 0 \Rightarrow \exists\, b > 1 \quad f(u) = \log_b v$

$\Rightarrow$ siehe Ü 85
zuerst für $\mathbb{Q}$, dann für $\mathbb{R}$ zeigen

natürlicher Logarithmus: Basis $b = e$

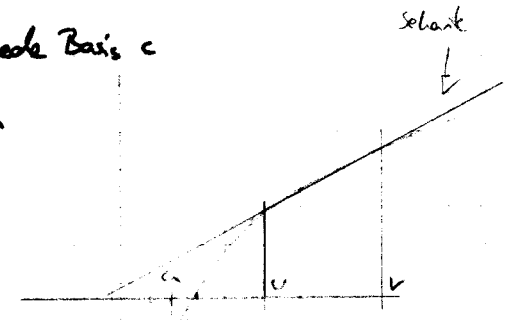
$\ln x = \log_e x \quad (= \log x) \qquad b^x = a \Rightarrow \log_c (b^x) = x \log_c b = \log_c a$

$x = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ für jede Basis c

$b^x = a \qquad b^x = e^{\ln a} = e^{x \ln b}$

$= \underbrace{\frac{\log_b a}{\log_b b}}_{1} = \log_b a$

$b^x = e^{x \log b}$ ← Man könnte b^x so definieren.
(damit hätten wir uns 3.7 erspart)



<u>Satz</u>: $x \mapsto \log u$ ist L-stetig auf $[a, \infty[$ für jedes $a > 0$.

Bew: $e^x = u, e^y = v \qquad e^x \le \frac{e^x - e^y}{x - y} \le e^y$ für $x < y$ ← Differenzquotient

$x = \log u, y = \log v \qquad u \le \frac{u - v}{\log u - \log v} \le v$ für $u < v, u, v > 0$

$$\boxed{\frac{1}{u} \ge \frac{\log u - \log v}{u - v} \ge \frac{1}{v} \quad \text{für } 0 < u < v \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

← Anstieg d. Sekante = Differenzquotient

wenn $0 < a \le u < v \Rightarrow \frac{1}{a} \ge \frac{1}{u} \ge \frac{\ln u - \ln v}{u - v} \le \frac{1}{a}$ $\Rightarrow L$-stetig, weil Anstieg d. Sek. beschr.

$|\ln u - \ln v| \le \frac{1}{a} |u - v|$ für $0 < a \le u < v$ Lipschitzstetig $L = \frac{1}{a}$ auf $[a, \infty[$.

<u>historisch</u>: Logarithmen waren für das Rechnen früher wichtig (Multiplikation, Division, Potenzieren, Wurzelziehen)

$\Rightarrow$ Logarithmentafeln

z.B.

$\sqrt[3]{10} \to \log 10 \to .3 \to$ neue Zahl suchen (RS) $\to$ Linke steht Ergebnis

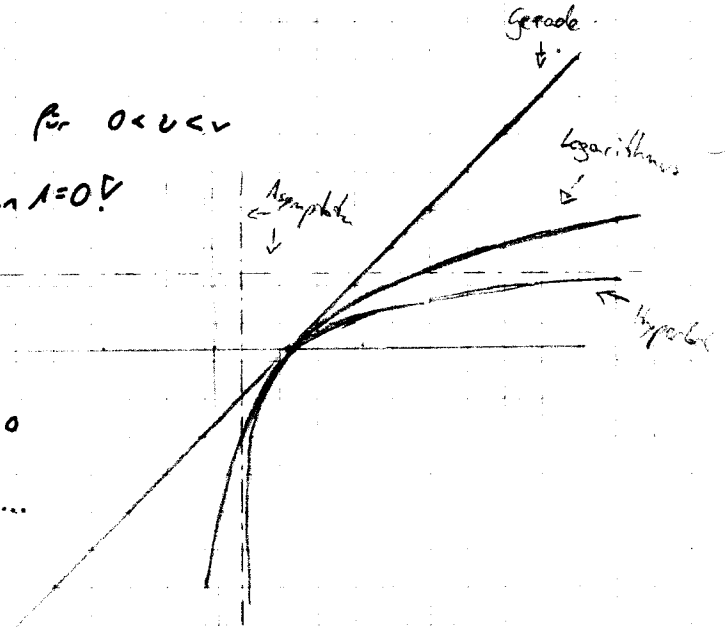
x	$\log_{10} x$
y	$\log_{10} y$
$x \cdot y$	$\log_{10} x + \log_{10} y = \log_{10}(xy)$

Rechenschieber:

~1600 eingeführt von Jost Bürgi, John Napier, Henry Briggs.

Gregory 1647:

Die Fläche unter $\frac{1}{x}$ ist ein Logarithmus! $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x$



<u>Bsp.</u>: $\frac{1}{u} \geq \frac{\ln u - \ln v}{u - v} \geq \frac{1}{v}$ für $0 < u < v$

$u = 1,\ v = 1 + x,\ x > 0$ $\quad \ln 1 = 0$!

$$1 \geq \frac{\ln 1 - \ln(1+x)}{1 - (1+x)} \geq \frac{1}{1+x}$$

$$1 \geq \frac{\ln(1+x)}{x} \geq \frac{1}{x+1} \qquad / \cdot x > 0$$

$$x \geq \ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1} = x - x^2 + x^3 - \ldots + \ldots$$

$\Rightarrow$ Analog mit $x < 0$ (Übungsaufgabe)

3.10 Der Satz vom Maximum

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt Minimum und Maximum an, d.h. $\exists\, m\le M : \forall x\in[a,b]: m\le f(x)\le M$ und $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1)=m$ und $f(x_2)=M$.

Zusammen mit dem ZW-Satz (3.4) folgt: Bild von $f = f[a,b] = [m,M]$.

„Das stetige Bild eines $\overbrace{\text{beschränkten, abgeschlossenen}}^{=\text{kompakt}}$ Intervalls ist wieder ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall"

$\Rightarrow$ SvM, ZWS

<u>Bew</u>:

(1) f ist n.o.b.

Ang. nicht $\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ \exists\, x_n\in[a,b] : f(x_n)>n$

Satz von BW (2.5): $\Rightarrow$ Folge (x_n) hat einen HW, d.h. $\exists$ eine konvergente Teilfolge $x_{n_k}\to x\in[a,b]$. f stetig $\Rightarrow \underbrace{f(x_{n_k})}_{>n_k\to\infty} \to f(x)$ ↯ Wid. ▽

aus (1) $\Rightarrow$ also existiert ein $\sup f(x) =: M \quad x\in[a,b]$

(2) $\exists\, x\in[a,b] : f(x)=M$

Bew: $\forall \varepsilon>0\ \exists\, x_\varepsilon : f(x_\varepsilon)>M-\varepsilon$

$\varepsilon=\frac{1}{n} \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ \exists\, x_n : f(x_n)>M-\frac{1}{n}$

$\overset{BW}{\underset{2.5}{\Rightarrow}}$ Die Folge (x_n) hat eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) $x_{n_k}\to x\in[a,b]$

f stetig $\Rightarrow f(x_{n_k})\to f(x)$

$$M-\frac{1}{n_k}\le f(x_{n_k})\le M$$

$k\to\infty$

$$M \le f(x) \le M \quad\Rightarrow f(x)=M \qquad \square.$$

Analog für Minimum ($f(x)$ durch $-f(x)$ ersetzen) $\square$.

Berechnen von Max, Min: $\Rightarrow$ siehe Differentialrechnung (Kapitel 4)

2. Beweis für (2) $(\exists x \in [a,b] : f(x) = M)$ (1. Bew. ist einfacher)

Sei $M := \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

später 0, also können wir den Nenner bilden

Ang. $\forall x \in [a,b] : f(x) < M \Rightarrow M - f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$g(x) := \frac{1}{M - f(x)} \qquad g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig!

U. (1) n.o.b

$\Rightarrow \exists M_1 : g(x) < M_1 \quad \forall x$

$\frac{1}{M - f(x)} \leq M_1 \qquad / \cdot M - f(x) > 0 \; ; M_1 > 0$

$\frac{1}{M_1} \leq M - f(x)$

$f(x) \leq \underbrace{M - \frac{1}{M_1}}_{< M !} \qquad \forall x \in [a,b] \qquad \Rightarrow M$ ist nicht die kleinste obere Schranke

↯ Wid!

3. Beweis von (2) (ohne Supremum)

Sei M_1 obere Schranke für Bildmenge $\{f(x) : x \in [a,b]\}$

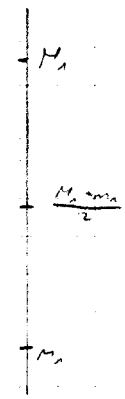
m_1 sei ein beliebiger Wert, z.B. $m_1 = f(0) \qquad x_1 := a$

Intervallhalbierung auf d. y-Achse:

Sind alle $f(x) \leq \frac{m_1 + M_1}{2}$?

Ja $\Rightarrow m_2 := m_1, \; M_2 := \frac{m_1 + M_1}{2} \qquad x_2 := x_1$

Nein $\Rightarrow m_2 := \frac{m_1 + M_1}{2}, \; M_2 := M_1 \qquad x_2$ so, dass $f(x_2) \geq m_2$



⋮

Folge von Intervallen $I_1 = [m_1, M_1], \; I_2 = [m_2, M_2], \ldots$

$x_n \in [a,b], \; f(x_n) \in I_n$

Jeder Wert $f(x) \leq M_n \quad \forall n$

Sei $y_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ innerster Punkt des Intervalls $\Rightarrow f(x) \leq y_0 \quad \forall x$

$x_n \in [a,b] \overset{BW}{\Rightarrow} \exists x_{n_k} \to x \in [a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ stetig} \Rightarrow \underbrace{f(x_{n_k})}_{\in I_{n_k}} \to f(x) \\ \qquad\qquad\qquad\quad f(x_{n_k}) \to y_0 \end{array}\right\} f(x) = y_0$$

y_0 ist der max. Wert, der von f angenommen wird, das Maximum.

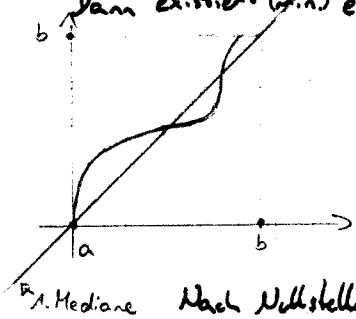
□.

3.11 Fixpunkte

1. Fixpunktsatz

$f: [a,b] \circlearrowleft$ Abbd. auf sich selbst, d.h. $[a,b] \to [a,b]$ stetig

Dann existiert (min) ein Fixpunkt, d.h. $\exists\, x \in [a,b]: f(x) = x$.



Beweis:

$g(x) := f(x) - x$ stetig

$g(a) = f(a) - a \geq 0$

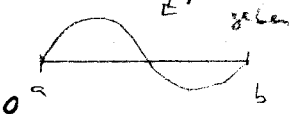
$g(b) = f(b) - b \leq 0$

Nach Nullstellensatz (3.4): $\exists\, c \in [a,b]: g(c) = 0$

$f(c) - c = 0$

$f(c) = c$ $\square$.

es muss eine Nullstelle geben



Bem: Gilt analog in $\mathbb{R}^n$

$f: B \to B$ stetig $B \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad B =$ abg. Kugel, abg. Quader, ... } „Konvexe Menge"

(bew. durch Fixpunktsatz von Brouwer $\Rightarrow$ kompliziert)

2. Fixpunktsatz

$f: [a,b] \circlearrowleft$ Kontraktion (L-stetige Abbd. mit $L < 1$)

d.h. $\exists\, L < 1: \; |f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$ (die Abstände auf der x-Achse sind kleiner als die auf der y-Achse)

Dann hat f <u>genau einen</u> Fixpunkt $\xi \in [a,b]: f(\xi) = \xi$.

Jede Iterationsfolge $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in [a,b]$ konvergiert gegen $\xi: \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

(gilt allgemeiner $\Rightarrow$ Banachsche Fixpunkt)

Beweis: Nach dem 1. FP-Satz gibt es einen FP $\xi = f(\xi)$, $\xi \in [a,b]$. Ang, es gibt einen 2. FP $y \in [a,b]$, $y = f(y)$.

$$|\xi - y| = |f(\xi) - f(y)| \leq L\,|\xi - y|$$

$$|\xi - y| \cdot \underbrace{(1 - L)}_{>0} \leq 0 \quad \Rightarrow |\xi - y| \leq 0 \Rightarrow \xi = y$$

weil $|\ldots|$ nie < 0!

weiter geht's auf der nächsten Seite $\rightarrow$

Sei $x_{n+1} = f(x_n)$ eine Iterationsfolge.

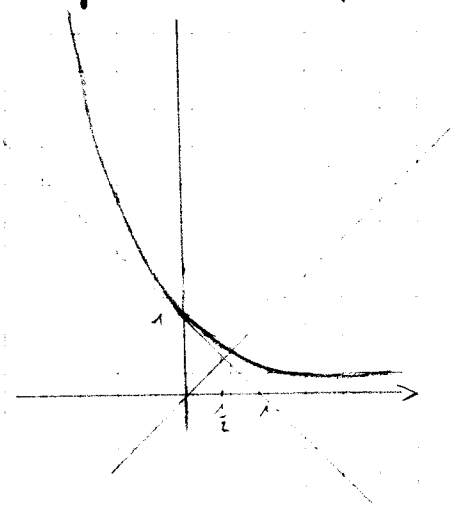
$$|x_{n+1} - \xi| = |f(x_n) - f(\xi)| \le L\,|x_n - \xi| \le L^2\,|x_{n-1} - \xi| \le \ldots \le L^n\,|x_1 - \xi| \to 0$$

$\Rightarrow |x_{n+1} - \xi| \to 0$, also $\lim x_n = \xi$ $\square$.

$\to$ einfaches Verfahren zur Berechnung von Fixpunkten.

Fehlerabschätzung $|x_n - \xi| \le L^n\,|x_0 - \xi| \le L^n\,]b-a[$

<u>Bsp.</u>: $x = e^{-x}$ $f(x) = e^{-x}$ ist Kontraktion auf $[\frac{1}{2}, \infty[$



$$e^{-x} \ge 1 - x \quad (3.8)$$

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \le e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1 \quad (3.8)$$

$x \ge 1 - x$

$2x \ge 1$

$x \ge \frac{1}{2}$

Iterationsfolge:

$x_0 = 1$, $x_1 = e^{-1}$, $x_2 = e^{-\frac{1}{e}}, \ldots$

$\lim x_n \overset{\text{numerisch}}{=} 0{,}567\ldots = \xi$

<u>Satz</u>: $f: [a,b] \circlearrowleft$ stetig, monoton wachsend

Dann konvergiert jede Iterationsfolge $x_{n+1} = f(x_n)$ gegen einen FP von f.

<u>Beweis</u>: Sei $x_0 \in [a,b] \to f(x_0) = x_1$

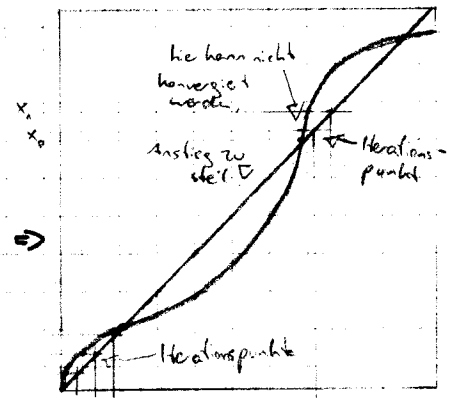
Fall 1: $x_0 \le x_1 \overset{f \text{ monoton}}{\Rightarrow} \underbrace{f(x_0)}_{x_1} \le \underbrace{f(x_1)}_{x_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$ (x_n) mon. w. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim x_n = \xi$ existiert $\in [a,b]$

$x_{n+1} = f(x_n)$ weil f stetig, $\xi = f(\xi)$ ξ ist FP.

$x = f(\xi)$



Fall 2: $x_1 > x_0$

$\downarrow$ f mon. w.

$f(x_1) = x_2 \le x_1 = f(x_0) \Rightarrow x_2 \le x_1$

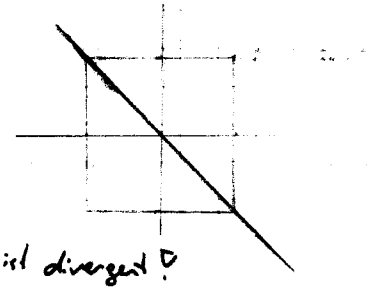
$x_3 \le x_2$

$\vdots$

$x_0 \ge x_1 \ge x_2 \ge \ldots \Rightarrow (x_n)$ fallend, $x_n \to \xi$

$\Rightarrow$ Rest analog zu Fall 1. $\square$.

Frage: f monoton fallend, gilt auch dann?



Bsp: $f(x) = -x$ auf $[-1,1]$

$x_0 \mapsto f(x_0) = -x_0 \mapsto f(-x_0) = f \circ f(x_0) = x_0$

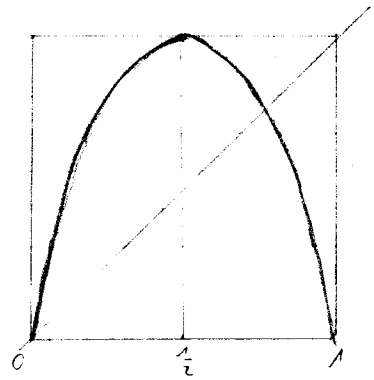
$x_0 \mapsto -x_0$ Iterationsfolge: $\langle x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots \rangle$ ist divergent!

Satz: $f:[a,b] \circlearrowleft$ stetig, monoton fallend

Dann konvergiert jede Iterationsfolge zu einem FP oder zu einem Punkt der Periode 2.

Übung: $f \circ f$ betrachten, vorigen Satz anwenden

wichtig!



$f:[a,b] \circlearrowleft$ stetig

$f(x_n) = x_{n+1}$

Kompliziertes Verhalten möglich!

z.B. $f(x) = 4x(1-x)$ auf $[0,1]$

Für die meisten Startpunkte x_0 in $[0,1]$ liegt die Iterationsfolge x_n dicht im Intervall $[0,1]$ $\Rightarrow$ alle $x \in [0,1]$ sind HCJ!

4) Differentiation

4.1 Die Ableitung einer Funktion

→ historisch im 17. Jh aus 2 Problemen entstanden

1) Tangente an eine Kurve legen

a) Berechnen des Schnittwinkels zweier Kurven (Descartes)
b) Berechnung von Maximum & Minimum (→ Tangente horizontal) (Fermat)

Das Tangentenproblem wurde bereits in der Antike behandelt
→ Kegelschnitte, Archimedische Spirale

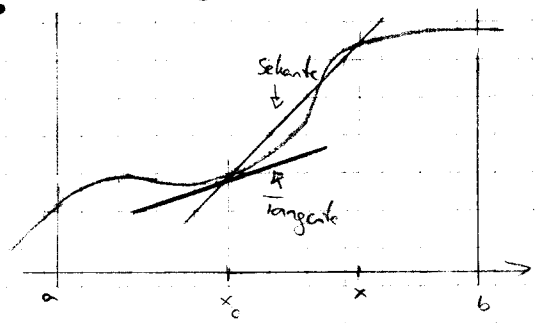
2) Momentangeschwindigkeit eines nicht gleichförmig bewegten Körpers (Galilei, Newton)
→ wichtig in der Astronomie (Keplersche Gesetze)

In gewissen Kurven (Kreis, Ellipse) gilt: Tangente = Gerade, die die Kurve in 1 Punkt schneidet

allg.: Tangente = Grenzlage der Sekante

Def: $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$ (oder allg. $x_0 \in D(f)$, x_0 ein HP von $D(f)$). Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert, dann heißt f an der Stelle x_0 differenzierbar. Der Grenzwert heißt Ableitung von f an der Stelle x_0. Man schreibt $f'(x_0)$. Die Gerade $y = y_0 + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ (mit $y_0 = f(x_0)$) ist die Tangente von f im Punkt x_0, d.h. $f'(x_0)$ = Anstieg der Tangente.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \text{Grenzwert des Sekantenanstiegs}$$



Bsp: 1) $f(x) = ax+b$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{(ax+b)-(ax_0+b)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = a$$

2) $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-1}\right) = x_0^{n-1} + x_0 x_0^{n-2} + \ldots + x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}$$

oder:

3) $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \frac{\cancel{x_0^n} + nh x_0^{n-1} + \binom{n}{2} h^2 x_0^{n-2} + \ldots + h^n - \cancel{x_0^n}}{h} = \text{h herausheben \& kürzen}$$

$$= \lim_{h \to 0} n x_0^{n-1} + \binom{n}{2} h x_0^{n-2} + \binom{n}{3} h^2 x_0^{n-3} + \ldots + h^{n-1} = n x^{n-1} \quad \text{(weil alles andere} \to 0)$$

4) $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

5) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x_0 - x}{x x_0 \cdot (x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

6) $f(x) = e^x$ $\quad e^x < \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} < e^{x_0}$ für $x < x_0$ (siehe 3.8)

$e^{x_0} < \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} < e^x$ für $x > x_0$ (siehe 3.8)

$x \to x_0 : e^x \to e^{x_0}$ (weil e^x stetig, siehe 3.8)

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \quad \text{nach dem Sandwichsatz} \quad \text{oder} \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 = e^0$$

? müsste das nicht 0 sein ?

7) $f(x) = \log x \quad (x > 0) \qquad \frac{1}{v} > \frac{\log u - \log v}{u - v} > \frac{1}{u} \qquad u > v > 0$ (siehe 3.9)

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}$$

4.2 Satz: f ist differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f$ ist stetig in x_0

Beweis: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: a$ existiere $\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a \right| < 1$ für

$0 < |x-x_0| < \delta \quad \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right| < |a|+1 =: L \qquad |f(x)-f(x_0)| \leq L \cdot |x-x_0|$

Unterschied zu Lipschitz: x_0 ist fest! ▽ für $|x-x_0| < \delta$

$\Rightarrow f$ ist stetig in x_0 □.

2. Beweis: $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)-f(x_0)) = \lim\limits_{x \to x_0} (x-x_0) \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x-x_0) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

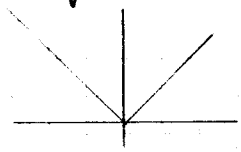
$= 0 \cdot f'(x)$

$= 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ f ist stetig in x_0

▽ Umkehrung des Satzes ist falsch ▽

Bsp: $f(x) = |x|$ ist stetig, aber nicht differenzierbar in $x_0 = 0$



$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} \frac{|x|-0}{x-0} &= \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0-} \frac{|x|-|0|}{x-0} &= \lim_{x \to 0-} -\frac{x}{x} = -1 \end{aligned}\right\} \neq$$

$\exists$ Funktionen, die stetig, aber <u>nirgends</u> differenzierbar sind

z.B. • Weierstraß (1872) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$ $\quad 0 < a < 1,\ b \in \mathbb{N},\ ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$

• Takagi (1908): $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} z(2^k x) \quad z(x) = \min|x-k| \quad k \in \mathbb{Z}$

4.3 Rechenregeln für die Ableitung

f, g seien differenzierbar in x_0. Dann sind auch $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ (falls $g \neq 0$) differenzierbar und es gilt:

1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$ <u>Produktregel</u>

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ <u>Quotientenregel</u>

Beweise:

1) $\Rightarrow$ ergibt sich direkt aus den Rechenregeln für Grenzwerte

2) Produktregel:

wie kommt man auf den Schritt? $-a \quad +a \quad =0$

$$(fg)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\, g(x) + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \cdot f(x_0) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{weil } f \text{ differenzierbar}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} g(x)}_{\text{weil } g \text{ stetig in } x_0} + \lim_{x\to x_0} f(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\text{weil } g \text{ differenzierbar}}$$

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Wir müssen zeigen, dass dieser lim $\exists$ und von hinten gelesen $\exists$ alle Limiten!

$\square$.

3) Quotientenregel:

Sei $f=1$: $$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)\, g(x_0)\, (x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{-(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)} = -g'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)^2} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

weil: $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$ für x nahe bei x_0 $\quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ g stetig in x_0

aus der Produktregel folgt der allgemeine Fall:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\, \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

$\square$.

Bsp:

- $(x^2 \cdot e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = (2x+x^2)e^x$
- $(x \cdot \log x)' = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$
- $(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1} = -n x^{-(n+1)}$

4.4 Kettenregel

f differenzierbar in x_0, g differenzierbar in $f(x_0) \Rightarrow g \circ f$ differenzierbar in x_0 und
$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

<u>Beweis:</u> $\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

wesentliche Idee: $\quad g'(f(x))$ $\quad f'(x_0)$

$\Rightarrow$ weil $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$
f stetig

Problem: Es könnte viele x geben mit $f(x) = f(x_0)$ (Dann Div. durch 0!)

Rettung: Definiere $G(y) := \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0 \\ g'(y_0) & y = y_0 \end{cases}$ $\quad y_0 = f(x_0)$

Dann ist G stetig in y_0, weil g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \underbrace{G(f(x))}_{\to G(f(x_0)) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \qquad \text{gilt } \forall x \neq x_0$$

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

<u>Bsp.:</u>

1) $\varphi(x) = x^a = e^{a \log x} \quad (x > 0,\ a \in \mathbb{R})$

$x \xmapsto{f} a \log x \xmapsto{g} e^{a \log x} \qquad g(y) = e^y$

$\varphi'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{a \log x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}$

2) $\varphi(x) = a^x = e^{x \log a} \qquad x \xmapsto{f} x \log a \xmapsto{g} e^{x \log a}$

$\varphi'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \cdot \log a$

3) $\varphi(x) = e^{x^2} \qquad x \xmapsto{f} x^2 \xmapsto{g} e^{x^2}$

$\varphi'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2x e^{x^2}$

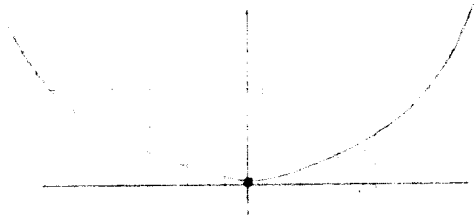
4) $\varphi(x) = x^x = e^{x \log x} \qquad x \xmapsto{f} x \log x \xmapsto{g} e^{x \log x}$

$\varphi'(x) = e^{x \log x} \cdot [x \log x]' = e^{x \log x} \cdot (\log x + 1) = \log x \cdot x^x + x^x$

5) $\varphi(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log x} \qquad$ 6) $\varphi = \left(\frac{1}{f}\right)$

$\varphi'(x) = e^{\frac{1}{x} \log x} \cdot \left(\frac{1}{x} \log x\right)' = \ldots \qquad \varphi' = -\frac{f'}{f^2}$ aus Kettenregel: $x \mapsto f(x) \mapsto \frac{1}{f(x)}$

Bsp: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases}$



f ist nur im Nullpunkt $x_0 = 0$ stetig
f ist in x_0 differenzierbar

$\Rightarrow$ x-Achse = Tangente in $(0,0)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

$$= \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

$y = f(x)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Differentialquotient in Leibnitz-Schreibweise

$dx, dy \ldots$ Differentiale

Kettenregel: $x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g(y) = z = g(f(x))$

$f(x) = y$

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$ $\quad g'(x) = \frac{dz}{dy}$

leichter zu merken!

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ $\quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = dz \cdot \frac{1}{dx}$

•) $\left(\frac{1}{f}\right)' := x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} \frac{1}{f(x)}$ $\quad g(y) = \frac{1}{y}$ $\quad g'(y) = -\frac{1}{y^2}$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x)$

•) $(f^2)'$ $[= (f \cdot f)']$: $\quad x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} f(x)^2$ $\quad g(y) = y^2$

$(f^2)' = 2 f(x) \cdot f'(x)$ man kann jedes Produkt mit Binomen schreiben

•) $(fg)' = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right] \Rightarrow (fg)' = \frac{1}{4} \cdot \left(2(f+g) \cdot (f'+g') - 2 \cdot (f-g) \cdot (f'-g')\right] =$

$= \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot (ff' + fg' + f'g + f'g' - (ff' - fg' - f'g + f'g'))\right) =$

$= \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot (ff' + fg' + f'g + f'g' - ff' + fg' + f'g - f'g')\right) =$

$= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (fg' + f'g) = fg' + f'g$

•) Inverse Funktion $\quad x \xmapsto{f} f(x) = y \xmapsto{g} g(y) = x$

$g(f(x)) = x \quad \forall x$ $\qquad g \circ f = f \circ g = id$

$g'(f(x)) \cdot f(x) = 1$

$g'(f(x)) = g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ Abl. für inv. Funktion

Fkt. $\quad$ Umkehrfkt.

$f' = \frac{dy}{dx}$ $\quad g' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$x = g(y)$

Ist die Umkehrfunktion differenzierbar?

4.5 Satz Ableitung der Umkehrfunktion

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei streng monoton, stetig.
$g: [c,d] \to [a,b]$ Umkehrfunktion von f (str. monoton, stetig (3.5))

f sei diffbar in $x_0 \in]a,b[$ und $f'(x_0) \neq 0$
Dann ist g diffbar in $y_0 = f(x_0)$ und $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

← Siehe auch voriges Bsp.
hier sauber aufgeschrieben

Beweis: $\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{1}{f'(x_0)}$ existiert lt. Voraussetzung

setze $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$

Wenn $y \to y_0 \Rightarrow x = g(y) \to x_0 = g(y_0)$, weil g in y_0 stetig ist (siehe 3.5)

$\Rightarrow \lim_{y \to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{f'(x)} = g'(y_0)$ □.

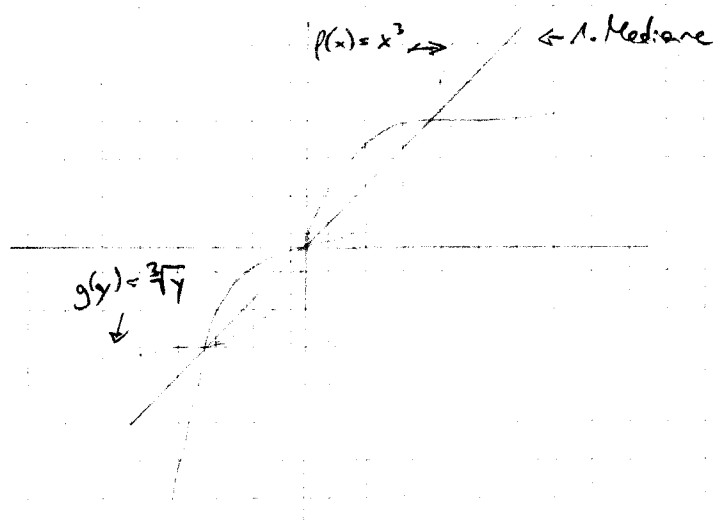
Anschaulich: Graph von g: Spiegelbild des Graphen von f an der 1. Mediane
Tangente an g = Spiegelbild der Tangente an f.
Anstieg $f = h$ $g = \frac{1}{h}$

Bsp: 1)
$y = f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$ $f: \mathbb{R} \to]0,\infty[$
$g(y) = \log y$ $g:]0,\infty[\to \mathbb{R}$
$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$

2)
$y = f(x) = x^3$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g(y) = \sqrt[3]{y}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(0) = 0$ g ist an der Stelle $y_0 = 0$ nicht diffbar → Anstieg ∞ ($g'(0) = +\infty$) ← nicht erlaubt

für $x_0 \neq 0$ ist der Satz anwendbar.

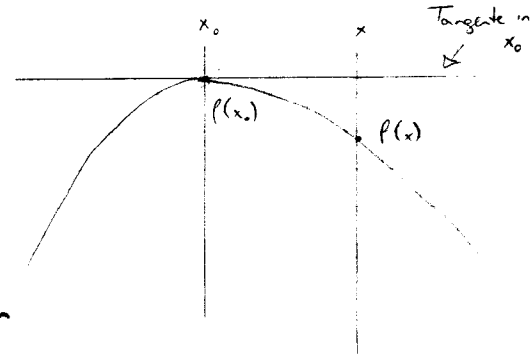


4.6 Maxima und Minima

Satz (Fermat): $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ habe bei $y_0 \in]a,b[$ ein lokales Maximum, d.h. $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x$ in einer Umgebung von x_0.
Ist f diffbar in x_0, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis:

rechtsseitige Ableitung
$$\begin{cases} f(x_0) \ge f(x_0+h) & \forall h \ge 0 \text{ klein} \\ \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0 \\ \left(\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) \Rightarrow f'(x_0) \le 0 \end{cases}$$

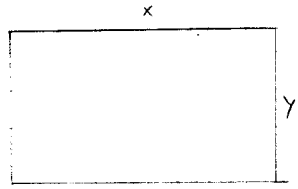


linksseitige Ableitung
$$\begin{cases} f(x_0) \ge f(x_0-h) & \forall h \ge 0 \text{ klein} \\ \dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} \ge 0 \\ \left(\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} = \lim\limits_{x \to x_0-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \ge 0 \Rightarrow f'(x_0) \ge 0 \end{cases}$$

$$f'(x_0) \le 0,\ f'(x_0) \ge 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \qquad \square.$$

Bsp: •) Extremwertaufgaben.

Unter allen Rechtecken mit geg. Umfang u bestimme das mit größter Fläche:



$2x + 2y = u$ $\qquad$ Fl. $= x \cdot y = x \cdot (\frac{u}{2} \cdot x)$ $\Rightarrow$ Max

$y = \frac{u}{2} - x$

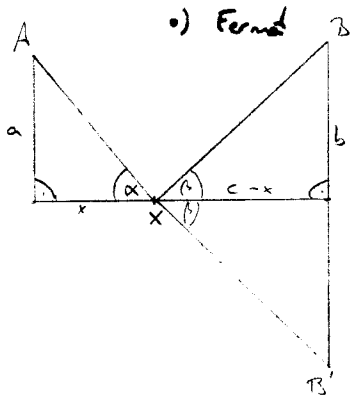
$f(x) = x(\frac{u}{2} - x) = x\frac{u}{2} - x^2$ $\qquad$ sinnvoll für $x \in [0, \frac{u}{2}]$, $f(0) = f(\frac{u}{2}) = 0$

$f'(x) = \frac{u}{2} - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{u}{4}$
$\Rightarrow y = \frac{u}{4}$

$\Rightarrow$ Quadrat, Fl. $= (\frac{u}{4})^2 = \frac{u^2}{16}$

2. Abl. ist unnötig, weil $f: [0, \frac{u}{2}] \to \mathbb{R}$ stetig $\overset{3.10}{\Rightarrow} \exists x_0 \in [0, \frac{u}{2}]$ wo f Max. annimmt.
Da $f(0) = f(\frac{u}{2}) = 0$ und $f(u) > 0 \Rightarrow x_0 \in]0, \frac{u}{2}[\underset{4.6}{\Rightarrow} f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{u}{4}$

•) Fermat



Suche X auf Geraden mit $\overline{AX}, \overline{BX}$ $\Rightarrow$ Min

$A(0,a),\ B(c,b),\ X(x,0) \qquad x \in [0,c]$

$f(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(c-x)^2}$

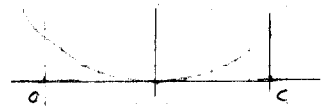
$f'(x) =$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}} \cdot 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{b^2+(c-x)^2}} \cdot 2 \cdot (c-x) \cdot (-1) =$

$= \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \dfrac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \dfrac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$

$\Rightarrow \cos\beta = \cos\alpha \Rightarrow \beta = \alpha$

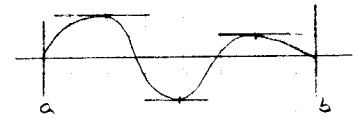
$f'(0) < 0$
$f'(0) > 0$



nur 1 Stelle mit Abl. = 0, muss Minimum sein

4.7 Satz von Rolle

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in jedem Punkt $x_0 \in]a,b[$ diffbar.
$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, z \in]a,b[: f'(z) = 0$



Beweis: Nach Satz vom Maximum (3.10)
$\exists\, x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = m \le f(x) \le M = f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$

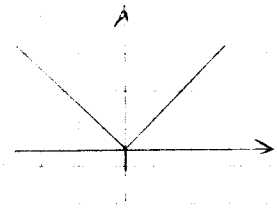
Fall 1: Ang. $f(a) = f(b) < M \Rightarrow x_2 \neq a,b \Rightarrow x_2 \in]a,b[\overset{4.6}{\Rightarrow} f'(x_2) = 0$

Fall 2: Ang. $f(a) = f(b) > m \Rightarrow x_1 \neq a,b \Rightarrow x_1 \in]a,b[\overset{4.6}{\Rightarrow} f'(x_1) = 0$

Fall 3: Ang. $f(a) = f(b) = m = M \Rightarrow f(x) \equiv f(a) = \text{const.} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Bsp.: Differenzierbarkeit wichtig!

$|x| \Leftarrow$ Satz falsch, weil f im Min. nicht diffbar



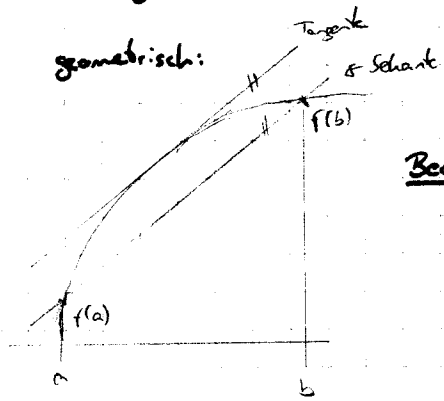
wichtigster Satz des Kapitels

4.8 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, stetig, im offenen Intervall $]a,b[$ diffbar.

Dann gibt es ein $z \in]a,b[$ mit $f'(z) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

geometrisch:



„Zu jeder Sekante im Graphen einer stetigen Funktion findet sich eine parallele Tangente"

Beweis: auf Rolle zurückführen

$g(x) = f(x) - kx$. Wähle k so, dass
$g(a) = g(b) \Leftrightarrow f(a) - ka = f(b) - kb$
$kb - ka = f(b) - f(a)$
$\Leftrightarrow k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

nach 4.7: $\exists\, z \in]a,b[: g'(z) = 0$

$g'(x) = f'(x) - k \qquad f'(z) - k = 0 \Rightarrow f'(z) = k = \overbrace{\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}^{0} = 0$ □.

4.9 Monotonie etc.

Satz: $f: I \to \mathbb{R}$ I Intervall, f diffbar in I

1) $f'(x) = 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow f(x) = \text{const.}$ auf I
2) $f'(x) \ge 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow f$ monoton wachsend ↗
3) $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow f$ streng mon. wachsend ↑
4) $f'(x) \le 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow f$ monoton fallend ↘
5) $f'(x) < 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow f$ streng mon. fallend ↓
6) $|f'(x)| \le L \ \forall x \in I \Leftrightarrow f$ ist L-stetig mit Lipschitzkonstante L, d.h. $|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y| \ \forall x, y \in I$

Bew. 1) $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(z) = 0 \Rightarrow f(b) = f(a) \ \forall a, b \in I \Rightarrow f$ const.

mit passenden Ungleichheitszeichen 2)–5) —— " —— $\gtreqless 0 \Rightarrow f(b) \gtreqless f(a) \ \forall a \le b \in I \Rightarrow f$ ↗ ↘ ↑ ↓

6) $|f'(z)| \le L \Rightarrow \left|\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \le L \Rightarrow |f(b) - f(a)| \le L \cdot |b - a| \quad \forall a < b \in I$ □.

$\boxed{\text{Umkehrung: einfach}}$ Bsp: f ↗ $\Rightarrow \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \ge 0 \to f'(x) \ge 0 \quad \forall x \in I, \forall h > 0$

4.10 Satz: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar, $f'(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Dann gibt es $C \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = ce^x$

Beweis: Betrachte $C(x) := f(x)e^{-x}$

$$C'(x) = f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= e^{-x} \cdot [f'(x) - f(x)] = 0$$

$$\overset{4.9.1}{\Rightarrow} C(x) = \text{const.} = c \Rightarrow c = f(x)e^{-x} \Rightarrow f(x) = ce^x \qquad \square.$$

allg: $f'(x) = af(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = ce^{ax}$ (Übungsbsp)

$x = 0$: $f(0) = ce^0 = c$, $f(x) = f(0) \cdot e^{ax}$

oft: statt x: t ... Zeit

$f'(t) = af(t)$ $\qquad f(t) = f(0)\, e^{at}$

$a > 0$ Wachstumsprozess (exponentiell)
$a < 0$ z.B radioaktiver Zerfall $\rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta t} \approx \frac{df}{dt} = af(t)$

Bsp: $f'(x) = \frac{a}{x} f(x)$ $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$, fest $\Rightarrow f(x) = cx^a$ (Übungsbsp)

4.11 Höhere Ableitungen

$f: I \to \mathbb{R}$ I ... Intervall $\subseteq \mathbb{R}$ $\qquad f$ sei in jedem Pkt von I diffbar $\Rightarrow f': I \to \mathbb{R}$

f' können wir wieder ableiten (wenn's geht) $\leftarrow$ es gibt stetige nicht diffbare Funktionen

$f'' := (f')'$ $\qquad \boxed{f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}}$

Physik: $y(t)$ .... $0,t$
$y'(t) = \dot{y}(t)$ ... Geschwindigkeit $\qquad F = m \cdot a = m \cdot \ddot{y}$
$\ddot{y}(t)$ ... Beschleunigung

etc. $f^{(n)}(x)$ ... n-te Ableitung

Bsp: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ $\qquad$ Polynom $\qquad p(0) = a_0$

$p'(x) = a\ a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$ $\qquad p'(0) = a_1$

$p''(x) = 2a_2 + \ldots + n \cdot (n-1) a_n x^{n-2}$ $\qquad p''(0) = 2a_2$

...

$p^{(n)}(x) = n!\, a_n$ $\qquad p^{(n)}(0) = n!\, a_n$

$p^{(n+1)}(x) = 0$

$\Rightarrow$ Jedes Polynom kann man zu Tode differenzieren

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Taylorsche Formel für Polynome

<u>Anwendung:</u> $p(x) = (x+a)^n \qquad p(0) = a^n$

$p'(x) = n\cdot(x+a)^{n-1} \qquad p'(0) = n\cdot a^{n-1}$

$p''(x) = n\cdot(n-1)\cdot(x+a)^{n-2} \qquad p''(0) = n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}$

$\dots \qquad \dots$

$p^{(k)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(x+a)^{n-k} \qquad \frac{p^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n}{k}a^{n-k}$

$$p(x) = \boxed{(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}x^k}$$ Binomischer Lehrsatz

4.12 Maximum, Minimum (noch einmal)

<u>Satz</u>: Sei f diffbar in einer Umgebung von x_0. $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)$ existiere und $f''(x_0)<0$. Dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales strektes Maximum, d.h. $\exists\, \varepsilon>0: \forall x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ mit $x \neq x_0$: $f(x)<f(x_0)$

<u>Bem</u>. $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0 \Rightarrow$ bei x_0 lokales strektes Minimum

<u>Beweis</u>: $f''(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{h} < 0$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0: \frac{f'(x_0+h)}{h} < 0$ für $h \in]-\varepsilon,\varepsilon[\setminus\{0\}$

1. Fall: $\Rightarrow$ für $h \in]0,\varepsilon[$: $f'(x_0+h)<0 \overset{4.9.3}{\Rightarrow} f \downarrow$ in $[x_0, x_0+\varepsilon[$

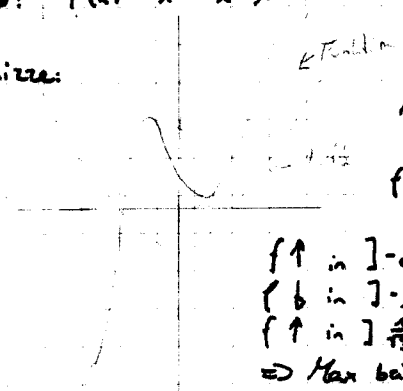
2. Fall: $\Rightarrow$ für $h \in]-\varepsilon,0[$: $f'(x_0+h)>0 \overset{4.9.3}{\Rightarrow} f \uparrow$ in $]x_0-\varepsilon, x_0]$

$\Rightarrow f(x) < f(x_0)$ für $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\setminus\{x_0\}$ $\square$.

Anwendung auf Kurvendiskussionen

Bsp: $f(x) = x^3 - x + 1 = 0$ ← Wie viele Nullstellen hat diese Funktion? mind. 1, höchstens 3

Skizze:



min. 1 Nullstelle in $]-2,1[$

$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 0.577$

$f\uparrow$ in $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$, weil $f'(x)>0$
$f\downarrow$ in $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$, weil $f'(x)<0$
$f\uparrow$ in $]\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty[$, weil $f'(x)>0$
$\Rightarrow$ Max bei $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, Min bei $\frac{1}{\sqrt{3}}$. $\Rightarrow f$ hat <u>genau eine</u> Nullstelle

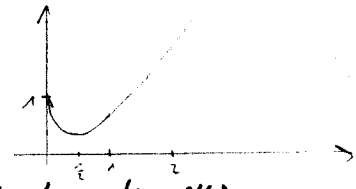
$f''(x) = 6x > 0 \Rightarrow$ bei $x = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ lokales Minimum
$f''(x) = 6x < 0 \Rightarrow$ bei $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ lokales Maximum
$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}} + 1 > 0$

Bsp: $f(x) = x^x \quad (x > 0)$
$= e^{\log x} > 0$

$f'(x) = x^x \cdot (\log x + 1) = 0 \iff \log x = -1 \iff x = \frac{1}{e}$

$f''(x) = x^x \cdot (\log x + 1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x} > 0 \quad \Rightarrow$ Funktion ist überall konvex

bei $x = \frac{1}{e}$: Minimum



$\lim\limits_{x \to \infty} x^x = \infty$, weil $\lim\limits_{n \to \infty} n^n = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$, weil $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$

4.13 Verallgemeinerter Mittelwertsatz (Cauchy, 1821)

$f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig, diffbar in $]a,b[$.

$g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$. Dann gibt es ein $z \in]a,b[$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$

<u>Bem</u>: $g(x) = x \Rightarrow$ MWS (4.8)

<u>Beweis</u>: $\varphi(x) = f(x) - k g(x)$

Wählen k so, dass $\varphi(a) = \varphi(b)$. $f(a) - k g(a) = f(b) - k g(b)$

$$\boxed{k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

$g(a) \neq g(b)$, denn sonst wäre
$g(a) = g(b) \overset{4.8}{\Rightarrow} \exists z: g'(z) = 0$ ↯

$\varphi(a) = \varphi(b) \overset{\text{Rolle 4.7}}{\Longrightarrow} \exists z: \varphi'(z) = 0$

$\varphi'(z) = f'(z) - k g'(z) = 0 \Rightarrow \boxed{k = \frac{f'(z)}{g'(z)}}$ □.

4.14 Regel von de l'Hospital (einfache Version)

(1696) ☞ wichtigste Ideen kommen eig. von Jakob Bernoulli

$f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ diffbar, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$. Es gelte: $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$

Falls $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

„unbestimmte Form" $\frac{0}{0}$ oben und unten getrennt ▷ differenzieren.

Beweis: Definiere $f(a) = g(a) = 0 \Rightarrow f, g$ stetig auf $[a,b[$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \overset{4.13}{=} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad \text{für ein } z \in [a, x]$$

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \to a+} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

$x \to a+$, dann auch $z \to a+$ ____ □.

Bsp:

•) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x \to 1} \frac{a x^{a-1}}{b x^{b-1}} = \frac{a}{b}$ ← $b \neq 0$! $\quad \frac{x^a - 1}{x^b - 1} = \frac{\frac{x^a - 1^a}{x - 1}}{\frac{x^b - 1^b}{x - 1}} = \frac{(x^a)'}{(x^b)'} = \frac{a}{b}$ an der Stelle $x = 0$

•) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = (e^x)' = 1$ an der Stelle $x = 0$

•) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x \cdot \log a}{b^x \cdot \log b} = \frac{\log a}{\log b}$ $\quad b \neq 1,\ a, b > 0$

Die Regel von l'Hospital gilt auch in folgenden Fällen:

1) $\lim\limits_{x \to b-}$

2) $a = -\infty$ oder $b = +\infty$

3) der errechnete GW $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ist $\pm\infty$

4) unbestimmte Form ist $\frac{\infty}{\infty}$, d.h. $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$

Bsp:

•) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to \infty} e^x = +\infty$

•) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\infty/\infty}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$ ← Man kann iterieren! ← Bew., dass e^x stärker als $p(x)$.

•) $\lim\limits_{x \to 0+} x \log x \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim\limits_{x \to 0+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\infty/\infty}{=} \lim\limits_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0+} -\frac{x}{1} = -0 = 0$

4.15 Taylorscher Lehrsatz

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ (I Intervall), $(n+1)$mal differenziert, $x_0, x \in I$.

Dann gilt: $$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{n\text{-tes Taylorsches Polynom}} + \underbrace{R_{n+1}(x)}_{n+1\text{stes Restglied}}$$

mit $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $\quad$ ξ liegt zwischen x_0 und x

„Lagrangesche Formel des Restglieds" (es gibt einige andere)

vgl. Gleichung der Tangente $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

Beweis: $n=0$: $f(x) = f(x_0) + R_1(x) = f(x_0) + f'(\xi)\cdot(x-x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$ ← MWS (4.8)

$n=1$: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + R_2(x) \Rightarrow R_2(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$ ← Diff. zw. Fkt & Tang.

$R_2(x_0) = 0$ $\qquad$ $f(x_0), f'(x_0) = \text{const.}$

$R_2'(x) = f'(x) - 0 - f'(x_0)\cdot 1$

$R_2'(x_0) = 0$

$R_2''(x) = f''(x) \quad \forall x \in I$ ← höhere Abl. vom Restglied = höhere Abl. der Fkt.

vMWS: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$

$$\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} = \frac{R_2(x) - R_2(x_0)}{(x-x_0)^2 - 0} \overset{\text{vMWS}}{\underset{4.12}{=}} \frac{R_2'(x_1)}{2(x_1-x_0)} = \frac{f'(x_1)-f'(x_0)}{2\cdot(x_1-x_0)} = \frac{1}{2}\cdot f''(x_2)$$

$f(x) = R_2$

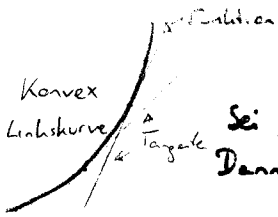
$g(x) = (x-x_0)^2$ $\quad$ x_1 zw. x_0 und x

$\{a,b\} = \{x, x_0\}$ $\quad$ x_2 zw. x_0 und x_1

$\Rightarrow R_2(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2$ $\qquad$ $\xi = x_2 \dots$ zwischen x_0 und x_1

Für $n \geq 2$ analog (z.B. mit vollständiger Induktion) $\square$.

Folgerung: $n=1$: $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\text{Tangente in } x_0 \text{ (1. Taylor-Polynom)}} + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2$



Sei f zweimal diffbar auf I und $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

Dann gilt: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x+x_0)$ $\qquad$ Funktion $\geq$ Tangente

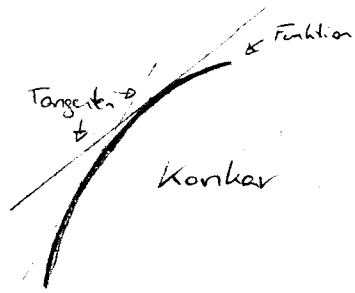
↳ Solche Fkt nennt man **konvex**.

z.B. $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$

Falls $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x, x_0 \in I$

$\Rightarrow$ Funktion $\leq$ Tangente $\Rightarrow$ Konkav

z.B. $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \log x$



→ Rechenbsp siehe nächste Seite

Bsp: $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}\cdot(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ $\quad x_0 = 0,\ n = 1$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + R_2(x),\ R_2(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)x^2$
$= -\frac{1}{8}\cdot(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}\cdot x^2 < 0$ $\quad \xi$ zw. 0 und x

Taylorpolynom, Tang. in x_0

für $x > 0$: $x > \xi > 0$

$R_2(x) < -\frac{x^2}{8}$

$n = 2$: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_3$

$R_3(x) = \frac{1}{3!} f'''(\xi)x^3$

$\sqrt{n+1} = \sqrt{n} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{n}}}_{\frac{1}{2}f'(x_0)\cdot(x-x_0)} + \ldots$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$
$x_0 = n,\ x = n+1$

z.B. $n = 3$

$\sqrt{10} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} = 3 + \frac{1}{6} = 3.16\ldots$

$\Rightarrow$ schneller Weg, um Wurzeln abzuschätzen

4.16 Taylorreihen

Wenn f beliebig oft diffbar ist, dann nennt man:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

die Taylorreihe von f im Punkt x_0.

Fragen: 1) Für welche x konvergiert die Taylorreihe?
Sicher für $x = x_0$. Sonst auch?
2) Falls sie konvergiert, ist dann ihr Limes $= f(x)$?

$\Rightarrow$ Beides gilt im Allgemeinen nicht!

Da $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$ gilt: $T_n(x) \to f(x) \Leftrightarrow R_{n+1}(x) \to 0$ $\quad n \to \infty$

T_n ... n-tes Taylorpolynom = n-te Partialsumme der Taylorreihe

Also: Wenn das Restglied: $R_{n+1}(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, dann konvergiert die Taylorreihe gegen $f(x)$.

Bsp: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$
$f^{(n)}(0) = 1$

Taylorreihe $(x=0) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\overset{4.15}{\Rightarrow} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_{n+1}(x)}$ mit $0 < \xi < x$ oder $x < \xi < 0$

Fall $x > 0$: $R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \leq \underbrace{e^x}_{\text{const}} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ für $n \to \infty$, x fest

Fall $x < 0$: $|R_{n+1}(x)| = e^\xi \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \overset{\text{weil } \xi < 0}{\leq} 1 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ für $n \to \infty$

$$\boxed{\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

$\frac{x^n}{n!} \to 0 \quad \forall x$

$\frac{(2x)^n}{n!}$ fallend für $n \geq 2x$

$\frac{2x \cdot 2x \cdot 2x \cdot \ldots \cdot 2x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$

$\frac{(2x)^n}{n!} \leq M \quad / : 2^n$

$\frac{x^n}{n!} \leq \frac{M}{2^n} \to 0$

Analog: Taylorreihen von:

$\log(1+x)$, $\sqrt{1+x}$, $(1+x)^a$

$\Rightarrow$ zur Übung rechnen! (Prüfungsbsp?)

Bsp: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \ldots$ $f^{(n)}(x) = \frac{n! \cdot (-1)^n}{(1+x)^{n+1}}$

$x_0 = 0 \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n$

Taylorreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ .... geometrische Reihe

wissen: $= \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$ konvergiert für $|x| < 1$

Obwohl $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $\forall x \neq -1$ bel. oft diffbar ist, konvergiert T nur für $-1 < x < 1$.

4.15 $\Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + R_{n+1}(x)$ $\quad R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}} \cdot x^{n+1}$ für $0 < \xi < x$ oder $x < \xi < 0$

Fall: $0 < \xi < x \Rightarrow |R_{n+1}(x)| \leq x^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, $x < 1$

Fall: $x < \xi < 0 \Rightarrow |R_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{n+2}} \to 0$ falls $\frac{|x|}{1-|x|} < 1$

$|x|$ ist Abschätzung für ξ

$\Rightarrow$ Lagrangesches Restglied hilft nix für $-1 < x \leq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad |x| < 1 - |x|$
$2|x| < 1$
$|x| < \frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2} < x < 0$

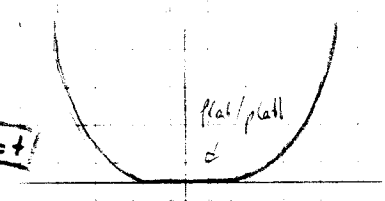
4.17 Beispiel von Cauchy (1823)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist überall bel. oft diffbar ..... C^∞

Alle Abl. in $x_0 = 0$ sind $= 0$ $\quad f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$ Taylorreihe $\equiv 0$, Restglied $R_{n+1}(x) = f(x)$



flat/platt

platt in $x_0 = 0$
$\rightarrow$ Ableitungen nähern sich der x-Achse extrem schnell

Beweis: $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \qquad x \neq 0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \qquad \boxed{t = \frac{1}{x^2} = t}$$

Ableitung aus der Definition

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = 0$$

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} + e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{6}{x^4}\right) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) \qquad x \neq 0$$

$$f''(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^4} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2t^2}{e^t} = 0$$

Vermutung: $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad P_n$ hat Grad k, Polynom

$f^{(n)}(0) = 0$

Beweis durch Induktion: $n = 1, 2$ ✓

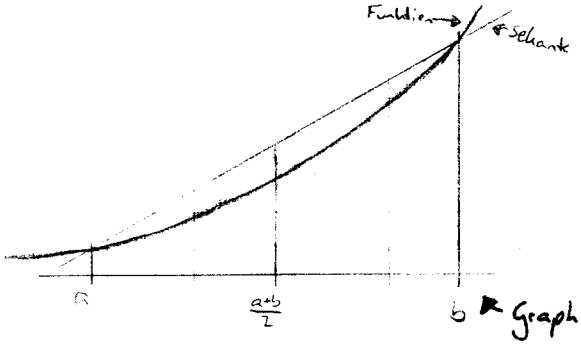
$$f^{(n+1)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left[\frac{2}{x^3} \cdot P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) + P_{3n}'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_{3n+3}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_{3n+1}\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ t \to +\infty}} \frac{P_{3n+1}(\sqrt{t})}{e^t} = 0, \text{ weil } \frac{t^k}{e^t} \to 0 \text{ für } t \to +\infty \quad \forall k.$$

4.18. Konvexe Funktionen

$f: I \to \mathbb{R}$ (I Intervall) heißt <u>konvex</u>, falls $f((1-t)a+tb) \le (1-t)\cdot f(a) + t\, f(b)$
$\forall a, b \in I,\ \forall t \in [0,1]$



z.B. $t = \frac{1}{2}$: $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$

f strikt (streng) konvex $<$
f konkav $\ge$
f strikt (streng) konkav $>$

Graph ist unterhalb der Sekante

Jansensche Ungleichung – (1906)

$f: I \to \mathbb{R}$ konvex $\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ $\quad x_i \in I,\ p_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
p_i ... „Gewichte"

Spezialfall: $n=2$: $p_1 x_1 + p_2 x_2$ $\quad p_1 = t \quad p_2 = 1-t$
$x_1 = a \quad x_2 = b$ $\Rightarrow$ Def. der Konvexität

$p_i = \frac{1}{n}$: $f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$

Man kann die Jansensche Ungleichung analog zu 1.7 zeigen

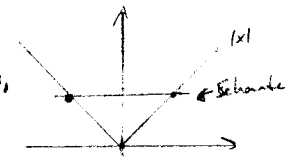
<u>Satz</u>: Wenn f zweimal diffbar ist und $f''(x) \ge 0\ \forall x \in I \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ erfüllt die Jansensche Ungl. und ist daher konvex.

<u>Beweis</u>: $a := \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \in I$ $\quad$ Tangente $\tau(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$

$f'' \ge 0 \overset{4.15}{\Rightarrow} f(x) \ge \tau(x)\ \forall x \in I$

$f(a) = \tau(a) = \tau\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \overset{\tau \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} p_i\, \tau(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ $\leftarrow$ Fkt. unter der Sekante

Bsp: $f(x) = |x|$ ist konvex, aber nicht diffbar



Bsp:

$I = [0, \infty[$

$f(0) = 1,\ f(x) = 0 \quad x > 0$

$\Rightarrow$ ist konvex, aber nicht stetig!

<u>Bemerkungen</u>: (ohne Beweise)

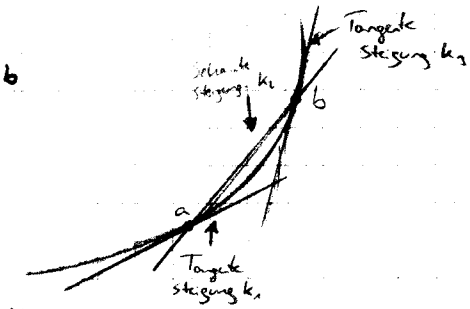
- $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ konvex $\Rightarrow f$ stetig. die einseitige Ableitungen existieren in jedem Punkt.
- f' existiert überall, bis auf höchstens abzählbar viele Punkte
- f'' existiert „fast überall" $\leftarrow$ Definition im 2. Semester
- Es gilt: Wenn f diffbar ist $\Rightarrow$ (f ist konvex $\Leftrightarrow f'(x) \nearrow$)
- Ist f 2x diffbar $\Rightarrow$ (f ist konvex $\Leftrightarrow f''(x) \ge 0\ \forall x$)

Bsp: f konvex, diffbar $\Rightarrow f'(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'(b) \quad \forall a<b$

vgl. $f(x)=e^x$ (3.8)

$$e^a < \frac{e^b-e^a}{b-a} < e^b \quad a<b$$

$$k_1 \le k_2 \le k_3$$



Bsp: $f(x) = (e^{x_1}e^{x_2}e^{x_3}\dots e^{x_n})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n}}$

$$e^{\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}} \le \frac{e^{x_1}+e^{x_2}+\dots+e^{x_n}}{n} \qquad e^{x_i}=a_i>0$$

$$(a_1a_2a_3\dots a_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \qquad \leftarrow AGM \quad (1.7)$$

allg: $p_i \ge 0 \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \qquad a_1^{p_1}a_2^{p_2}a_3^{p_3}\dots a_n^{p_n} \le \sum_{i=1}^n p_i a_i \quad$ ← gewichtetes AGM

Bsp: $f(x)=x^r \quad (r>1,\ x>0) \quad f'(x)=rx^{r-1} \quad f''(x)=r\cdot(r-1)x^{r-2} > 0$

$$\Rightarrow \left(\sum p_i x_i\right)^r \le \sum p_i x_i^r \Rightarrow \sum p_i x_i \le \left(\sum p_i x_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

$p_i = \frac{1}{n}$: $\quad \frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n} \le \left(\frac{x_1^r+x_2^r+x_3^r+\dots+x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$

$M_r(x_1,\dots,x_n) = \sqrt[r]{\frac{x_1^r+x_2^r+\dots x_n^r}{n}}$ .... [redacted] Mittel von Grad r $(r\in\mathbb{R})$

$M_r(x_1,\dots x_n;p_1\dots p_n) = \left(\sum p_i x_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$ .... gewichtetes Mittel Grad r

$r=1$	arithmetisches Mittel
$r=2$	quadratisches Mittel
$r=-1$	harmonisches Mittel

$$M_{-1}(x,y) = \left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y}$$

Satz: (Mittelungleichung)

$x_i>0,\ p_i \ge 0 \quad \sum p_i = 1$

1) $r<s \Rightarrow M_r(x_i;p_i) \le M_s(x_i;p_i)$

2) $\lim_{r\to 0} M_r =$ geometrisches Mittel

3) $\lim_{r\to+\infty} M_r(x_1,\dots,x_n) = \max x_i$

4) $\lim_{r\to-\infty} M_r(x_1,\dots x_n) = \min x_i$

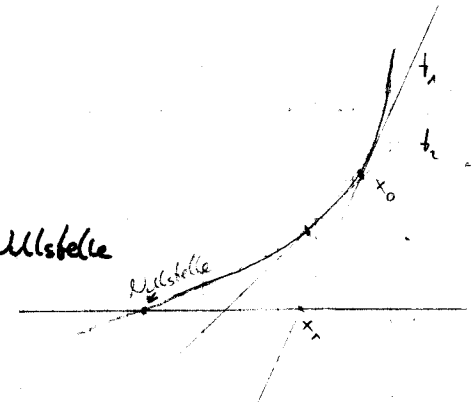
Übung: $\lim_{r\to 0} \log M_r$

$\Rightarrow$ Regel von de l'Hospital

4.19 Newtonverfahren

Suchen Nullstelle $f(x)=0$

Tangenten konvergieren gegen die Nullstelle



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$

$f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ← Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse

$x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x)$ Diese Funktion wird iteriert

Iterationsfolge (x_n) : $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ vgl. (3.11)

$f(x) = 0 \iff \varphi(x) = x$ Nullstelle von f = Fixpunkt von φ

$\varphi'(x) = 1 - \frac{f' \cdot f' - f \cdot f''}{f'(x)^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}$

Sei $\hat{x}$ eine Nullstelle von f: $f(\hat{x}) = 0$, sei $f'(\hat{x}) \neq 0$

$\Rightarrow \varphi(\hat{x}) = \hat{x}$, $\varphi'(\hat{x}) = 0$ $\Rightarrow \exists$ Intervall $]\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta[$ wo $|\varphi'(x)| < 1$

(falls φ' stetig, also f'' stetig) dort ist φ ein Kontraktion

$\overset{2.\text{FPSatz}}{\underset{3.11}{\Longrightarrow}}$ $\forall x_0 \in]\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta[$: Iterationsfolge $\in]\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta[$ $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ und $x_n \to \hat{x}$

Wie schnell konvergiert das?

$\varphi(x) - \hat{x} = \varphi(x) - \varphi(\hat{x}) = \underbrace{\varphi'(\hat{x})}_{0} \cdot (x - \hat{x}) + \varphi''(\xi) \cdot (x - \hat{x})^2$ ← Taylor $n=1$, ξ zwischen x und $\hat{x}$

$|\varphi(x) - \hat{x}| \leq \underbrace{\max_{\xi \in I} |\varphi''(\xi)|}_{= c,\ \text{falls } \varphi'' \text{ stetig, also falls } f'' \text{ ex. und stetig}} \cdot (x - \hat{x})^2$

$\Rightarrow$ quadratische Konvergenz

Bsp: $f(x) = x^p - a = 0$ $x = \sqrt[p]{a}$

$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^p - a}{p x^{p-1}} = x \cdot \frac{p-1}{p} + \frac{a}{p x^{p-1}}$

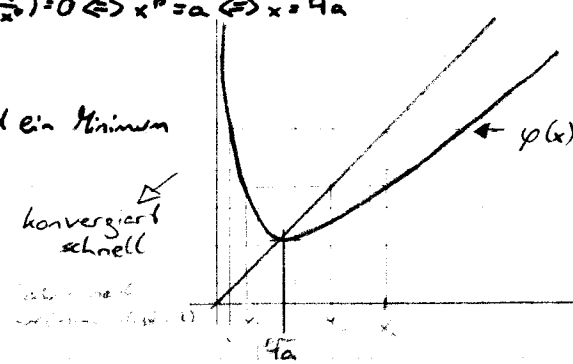
vgl. 3.6
$p = 2$: $\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{a}{x})$
↳ Heronsches Verfahren (1.2)

$\varphi'(x) = \frac{p-1}{p} + \frac{1-p}{p} a x^{-p} = \frac{p-1}{p} \cdot (1 - \frac{a}{x^p}) = 0 \iff x^p = a \iff x = \sqrt[p]{a}$

φ hat bei $\sqrt[p]{a}$ den einzigen FP, und ein Minimum

Für $x > \sqrt[p]{a}$ ist $\varphi'(x) < \frac{p-1}{p} < 1$

Für $x_n > \sqrt[p]{a}$: $x_n \downarrow \hat{x} = \sqrt[p]{a}$



4.20 Iterationsfolgen, Fixpunkte

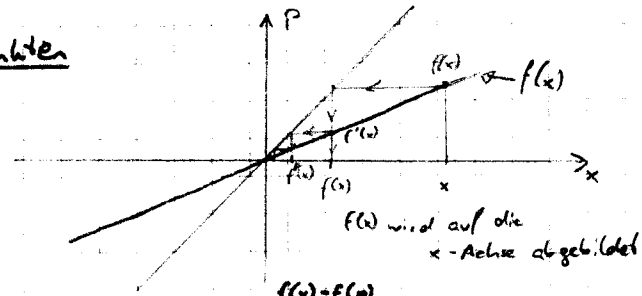
$f: I \to I$ $\quad$ I Intervall

$x \in I \Rightarrow x_1 = f(x),\ x_2 = f(x_1) = f(f(x)), \dots$

3.11: f monoton wachsend, stetig $\Rightarrow$ jede Iterationsfolge konv. zu FP von f

f Kontraktion $\Rightarrow \exists$ genau einen FP $\hat{x}$, jede Iterationsfolge konv. zu $\hat{x}$

Verhalten in der Umgebung zu Fixpunkten



Sei $p = f(p)$ $\quad$ f diffbar in p

$f(x) - p = f(x) - f(p) = f'(p)\cdot(x-p)$

Fall I: $0 < f'(p) < c < 1 \Rightarrow$ für x nahe p gilt: $0 < \underbrace{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}_{f'(p)} < c < 1$

für $p < x \Rightarrow f(x) > p$, $\quad f(x) - p < c(x-p)$

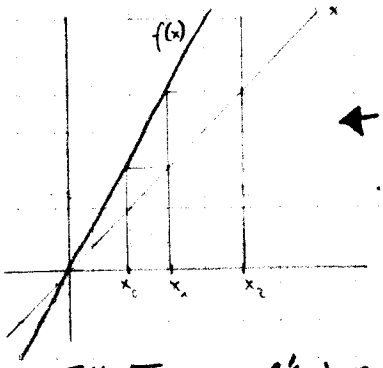
$|f^n(x) - p| < c^n |x-p|$

$x_n \to p \qquad \to 0$

$f^n = f \circ f \circ f \dots \circ f$ $\quad$ p = anziehender (stabiler) Fixpunkt

x_n konvergiert monoton gegen p

Fall II: $f'(p) > 1$



$f(x) - p \approx \underbrace{f'(p)}_{>1}(x-p)$

x_n divergiert monoton weg von p

p abstoßender (instabiler) Fixpunkt $\quad$ (wenn $f' > 1$)

Fall III: $-1 < f'(p) < 0$

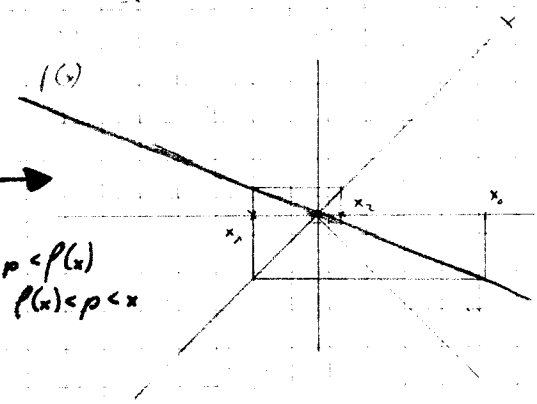
$|f(x) - p| = \underbrace{|f'(p)|}_{<1} \cdot |x-p|$

$x_n \to p$ oszillierend

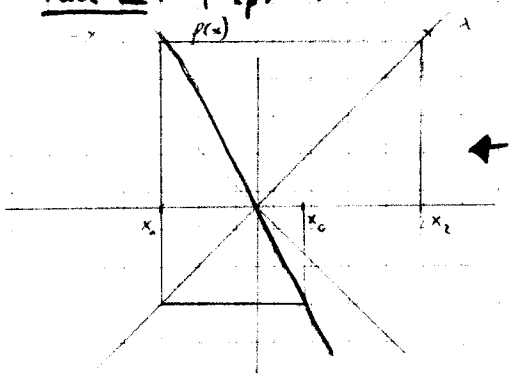
p anziehend

$x < p < f(x)$

oder $f(x) < p < x$



Fall IV: $f'(p) < -1$



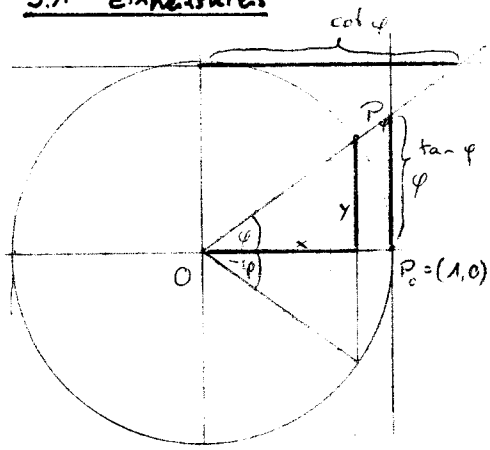
x_n divergiert oszillierend weg von p

$|f(x) - p| > |x-p|$

$x < p < f(x)$ oder $f(x) < p < x$

5. Die Winkelfunktionen

5.1 Einheitskreis



$k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$P_\varphi \in k$ Koordinaten $\boxed{\begin{array}{l} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{array}}$

$\varphi = \sphericalangle P_0 O P_\varphi$ (in Bogenmaß)

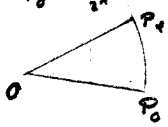
vgl. 1.4 - regelmäßige 2^n Ecke

Ecken: $P_0, P_{2^n}^1, P_{2^n}^2, \dots, P_{2^n}^{2^n-1}$

$P_{2^n}^k = P_{\frac{k}{2^n}\cdot 2\pi}$ liegen dicht auf k

$\forall \varphi \in [0, 2\pi[: P_\varphi$ als GW (Int. Sch.) der $P_{2^n}^k$

Bogen: $\overset{\frown}{P_0 P_{2^n}^k} = \frac{k}{2^n} 2\pi$

Fläche: 

$= \frac{k}{2^n}\pi$

} mit Intervallschachtelung ein- / umgeschrieben regelmäßige 2^n-Ecken $n \to \infty$ (1.4)

Für $\varphi \in [0, 2\pi[$: Bogen: $\overset{\frown}{P_0 P_{2^n}^k} = \varphi$ Fläche 

$= \frac{\varphi}{2}$

$\cos, \sin : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$

periodisch fortsetzen $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi$
$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi$

$\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ gerade Fkt.
$x^2 + y^2 = 1$ $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ ungerade Fkt.

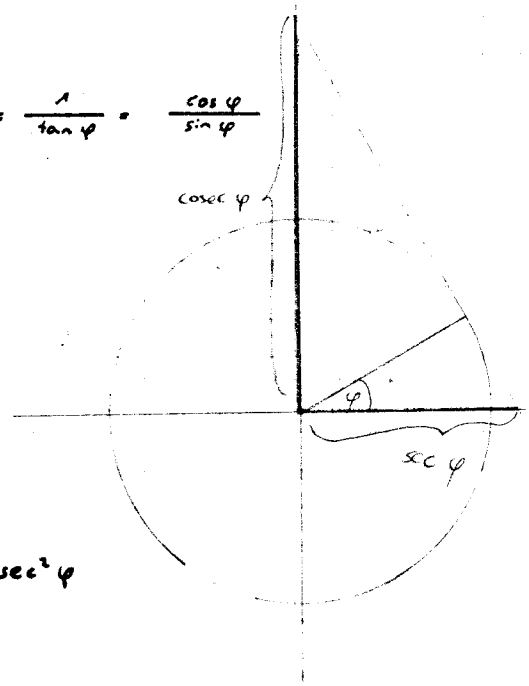
Weitere Winkelfunktionen:

Def: $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ $\cot\varphi = \frac{1}{\tan\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$

Andere Winkelfunktionen, die fast nicht mehr verwendet werden:

$\sec\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}$ Sekans

$\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$ Cosekans

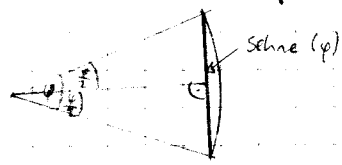


Anwendung: z.B. $(\tan\varphi)' = \frac{1}{\cos^2\varphi} = \operatorname{cosec}^2\varphi$

5.2 Geschichte

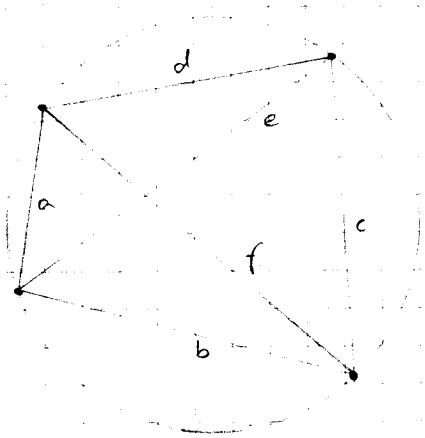
Ptolemäus (Buch: Almagest 150 n. Chr.) → Sehnentafeln

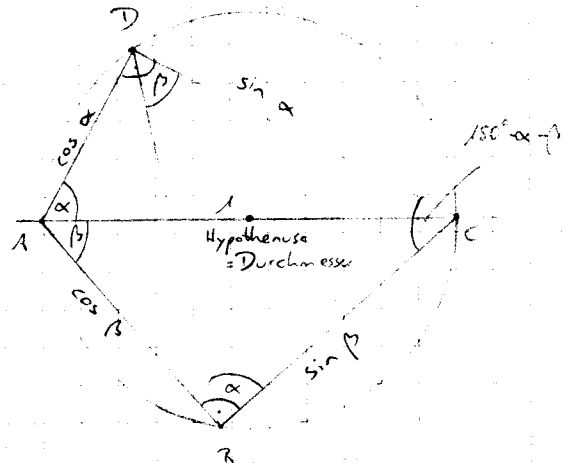
Sehne $(\varphi) = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$



Peuerbach (1432–1461, Wien)
Regiomontus (1436–1476, Wien)
} führen moderne Winkelfkt. ein
Beziehungen zw. sin, cos, tan

Satz von Ptolemäus für Sehnenvierecke





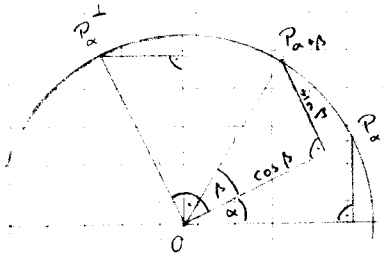
$ef = ac + bd$

$\overline{BD} = \sin(180° - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = ac + bd$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

5.3 Summensätze



$\overline{OP_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ $\quad \overline{OP_\alpha^\perp} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\overline{OP_{\alpha+\beta}} = \cos\beta \cdot \overline{OP_\alpha} + \sin\beta \cdot \overline{OP_\alpha^\perp}$

$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \cos\beta \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \sin\beta \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

„sico cosi, coco sisi
aber wie?"

Merkspruch

alternativ:

1) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ = Drehung um $\measuredangle\alpha = D_\alpha$

$D_{\alpha+\beta} = D_\beta \cdot D_\alpha$ <u>Matrizen</u>

2) in $\mathbb{C}$: $\cos\alpha + i\sin\alpha = \operatorname{cis}\alpha$ Vorgriff: $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$

$\operatorname{cis}(\alpha+\beta) = \operatorname{cis}\alpha \cdot \operatorname{cis}\beta$

Spezialfälle:

$\beta = -\alpha$: $\cos 0 = 1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

$\beta = \frac{\pi}{2}$: $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - \sin\alpha \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = -\sin\alpha$

und $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \cos\alpha \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = \cos\alpha$

$\beta = \alpha$: $\boxed{\begin{array}{l} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \end{array}}$ $\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$ $\Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

z.B. für $\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \sqrt{\frac{1+\cos 90°}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

für $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\Rightarrow$ für $\frac{\pi k}{2^n}$ kann man explizite Formeln für sin, cos, tan finden

kleine Varianten der Spezialfälle:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta}$

$\alpha+\beta = x \quad \alpha-\beta = y \qquad \alpha = \frac{x+y}{2} \quad \beta = \frac{x-y}{2}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

5.4 Vielfache von Winkeln

$$\cos 3t = \cos(2t+t) = \cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t = (2\cos^2 t - 1)\cos t - \overbrace{2\sin^2 t}^{1-\cos^2 t} \cos t =$$

$$= 2\cos^3 t - \cos t - 2\cos t + 2\cos^3 t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t \qquad \sin 3t = -4\sin^3 t + 3\cos t$

$\mathrm{cis}(nt) = (\mathrm{cis}\, t)^n$ folgt mit V.I. aus $\mathrm{cis}(x+y) = \mathrm{cis}(x) + \mathrm{cis}(y)$

$$\boxed{\cos nt + i \sin nt = (\cos t + i \sin t)^n}$$ ← Formel von de Moivre (1730)

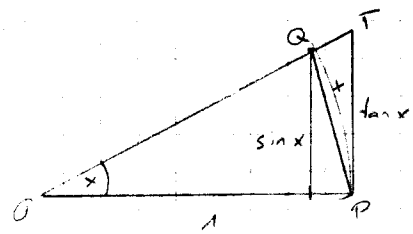
Bsp. $\cos 30° = \cos \frac{\pi}{6} = x \qquad 4x^3 - 3x = 0$ (mit $\cos 3t$)

$\cos 3 \cdot 30° = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad x^2 = \frac{3}{4}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

5.5 $\sin x < x < \tan x$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$



Flächen: $\Delta OPQ <$ Kreissektor $OPQ < \Delta OPT$

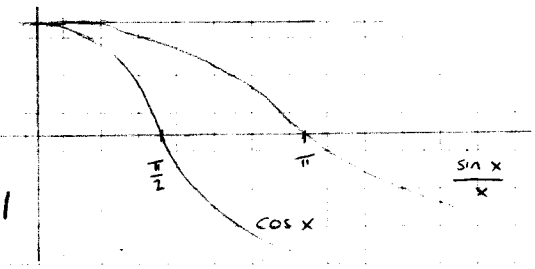
$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$

$\frac{\sin x}{x} < 1 \qquad x < \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$|\sin x - \sin y| = 2 \underbrace{|\cos \ldots|}_{\le 1} \cdot |\sin \frac{x-y}{2}| \le$

$\le 2 \sin \frac{|x-y|}{2} \le 2 \frac{|x-y|}{2} = |x-y|$



$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} |\sin x - \sin y| \le |x-y| \\ |\cos x - \cos y| \le |x-y| \end{array} \quad \forall x, y}$$

⇒ sin, cos sind L-stetig mit $L = 1$

$y = 0$: $|\cos x - 1| \le |x| \Rightarrow 1 - \cos x \le x \qquad x \ge 0$

$1 \ge \cos x \ge 1 - x$

$1 - x \le \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$

! $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ d.h. sin ist in $x_0 = 0$ diffbar, Abl. $= 1$

5.6 $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$= 2^2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2}$$

$$= 2^3 \sin \frac{x}{8} \cos \frac{x}{8} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2}$$

$$\vdots$$

$$= 2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^{n-1}} \dots \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \underbrace{\frac{2^n}{x} \sin \frac{x}{2^n}}_{\to 1} \cos \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^{n-1}} \dots \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2}$$

$$= \frac{\overbrace{\sin \frac{x}{2^n}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{x}{2^n}}_{\to 0}} \quad n \to \infty$$

Euler

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^{n-1}} \dots \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$$

$x = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\frac{2}{\pi} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos \frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}_{\cos \frac{\pi}{4}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}_{\cos \frac{\pi}{8}} \cdot \dots}$$

← Vieta 1593

1. unendl. Produkt jemals (mit richtiger Lösung)

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

1. explizite Formel für π

5.7 Ableitung

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2 \cos \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} = \underbrace{\cos \frac{x+x_0}{2}}_{\to \cos x_0} \cdot \underbrace{\frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}}_{\to 1} \quad x \to x_0$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = (\sin x)' = \cos x$$

analog: $(\cos x)' = -\sin x$

andere Herleitung:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h}{h} = \sin x \cdot \overbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}^{\to 0} + \cos x \cdot \overbrace{\frac{\sin h}{h}}^{\to 1} \xrightarrow[h \to 0]{} \cos x$$

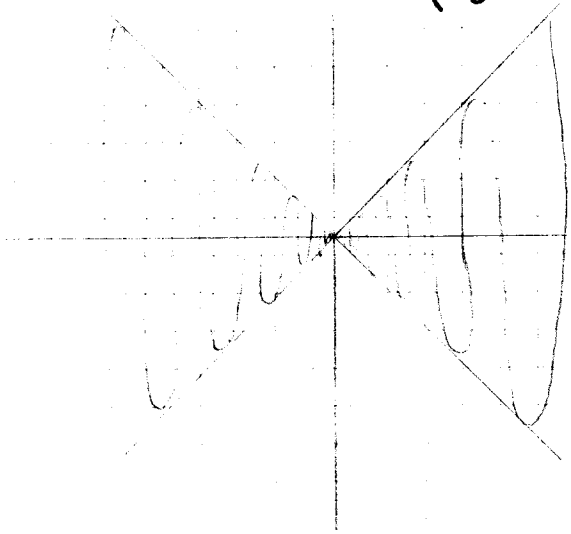
$$\frac{1 - \cos h}{h} \overset{\cdot(1+\cos h)}{=} \frac{1 - \cos^2 h}{(1+\cos h) \cdot h} = \frac{\sin^2 h}{(1+\cos h)\, h} = \overbrace{\frac{\sin h}{h}}^{\to 1} \cdot \overbrace{\frac{\sin h}{1+\cos h}}^{\to 0} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

Bsp: $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ist stetig, weil: $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$



diffbar in $x \neq 0$

$x = 0$: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ existiert nicht

alle Zahlen in $[-1, 1]$ sind HW! ↯

$\Rightarrow f$ nicht diffbar in $x_0 = 0$

Bsp: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

für $x \neq 0$: f ist diffbar. ($\frac{1}{x}$ ist diffbar, der Rest ein Produkt)

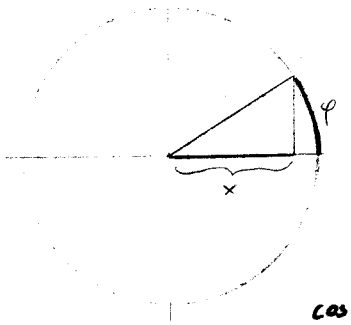
für $x = 0$: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

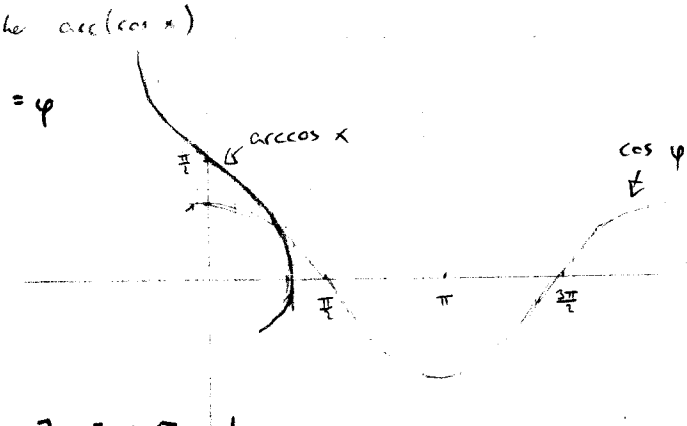
$\Rightarrow f$ ist diffbar ↯ ABER: f' ist nicht stetig!

Tangente in $(0,0)$ = x-Achse $\rightarrow$ Graph von f durchstößt die Tangente ∞ oft, beliebig ~~nahe~~ nahe bei Berührungspunkt

5.8 Umkehrfunktionen

$$\varphi \overset{f}{\longmapsto} \cos\varphi = x \overset{f^{-1}}{\longmapsto} \arccos x = \varphi$$





$\cos: [0,\pi] \to [-1,1]$
$\arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$

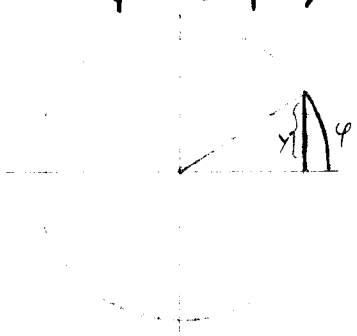
$f(\varphi) = \cos\varphi = x$

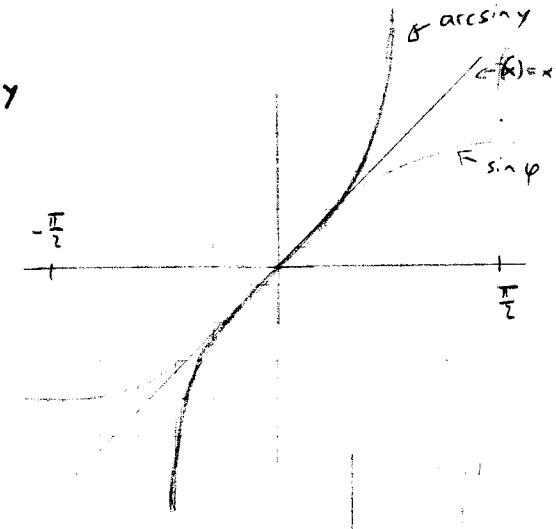
$g(x) = \arccos x = \varphi$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\sin\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

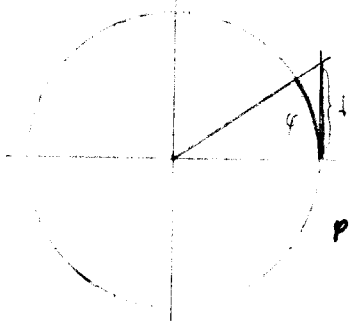
! $\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ $\Rightarrow$ nur sinnvoll für $-1<x<1$.
Anstieg an den Randpunkten $= \infty$

$\sin: \varphi \longmapsto \sin\varphi = y \qquad \varphi = \arcsin y$



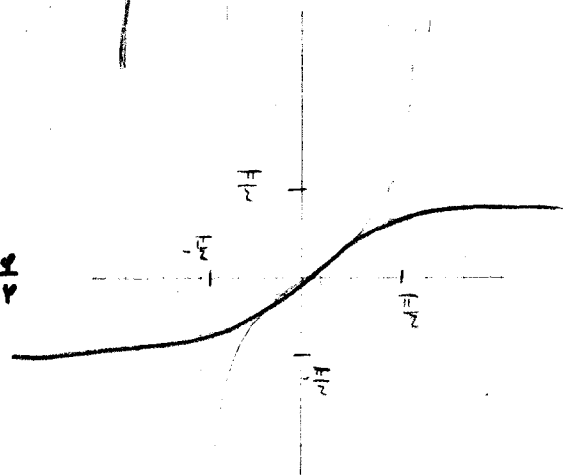


$\tan: \varphi \longmapsto \tan\varphi = t \qquad \arctan t = \varphi$



$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} \tan\varphi = \pm\infty$$



$\tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} \qquad \arctan: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ bei $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ horizontale Asymptote

$$\lim_{t \to \pm\infty} \arctan t = \pm\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}}$!

$$(\arctan t)' = \frac{1}{(\tan\varphi)'} = \frac{1}{1+\tan^2\varphi} = \frac{1}{1+t^2}$$

komplexe Nullstelle $\Rightarrow$
dann als Integral
vgl. $(\log x)' = \frac{1}{x}$

Kleines Kuriosum:

$$\frac{1}{1+t^2} = \left(\frac{1}{1+it}\cdot\frac{1}{1-it}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2i}\cdot\left(\ln(1+it) - \ln(1-it)\right)'$$

$$\boxed{\Rightarrow \arctan t = \frac{1}{2i}\cdot\ln\frac{1+it}{1-it}}$$

$t=0$ ✓

$t=1$: $\arctan 1 = \pi = 2\cdot\ln\frac{1-i}{1+i}$

$\Rightarrow$ Euler

<u>5.9 Satz:</u> $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei 2 mal diffbar, $f''(x) = -f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Dann $\exists\, a,b\in\mathbb{R}: f(x) = a\cos x + b\sin x$, wobei $a = f(0)$, $b = f'(0)$.

<u>Bew:</u>

Trick: $\overset{\text{Hilfsfunktion}}{H(x)} := f(x)^2 + f'(x)^2$

$$H'(x) = 2f(x)\cdot f'(x) + 2f'(x)\cdot f''(x) = 2\cdot f'(x)\cdot\overbrace{\left(f(x)+f''(x)\right)}^{0} = 0$$

$\Rightarrow H(x) = \text{const.} \Rightarrow H(0) = f(0)^2 + f'(0)^2$

Fall I:

$f(0) = f'(0) = 0 \Rightarrow H(0) = 0 \Rightarrow H(x)\equiv 0 \Rightarrow f(x)\equiv 0$

Fall II:

sei $f(0) = a$, $f'(0) = b$ $\qquad g(x) := f(x) - a\cos x - b\sin x$

$$\Rightarrow g''(x) = f''(x) + a\cos x + b\sin x = -g(x)$$

$g(0) = f(0) - a = 0 \qquad g'(0) = f'(0) - b = 0$

$\overset{\text{Fall I}}{\Rightarrow} g(x)\equiv 0 \Rightarrow f(x) = a\cos x + b\sin x$ $\square$.

<u>Anwendung:</u>

$f(x) = \sin(x+z)$ $\quad$ z fest

$f'(x) = \cos(x+z)$

$f''(x) = -\sin(x+z) = -f(x)$

$\Rightarrow \sin(x+z) = a\cos(x) + b\sin(x) \qquad a = \sin(z),\ b = \cos(z)$

$\Rightarrow \sin(x+z) = \sin(z)\cos(x) + \cos(z)\sin(x)$

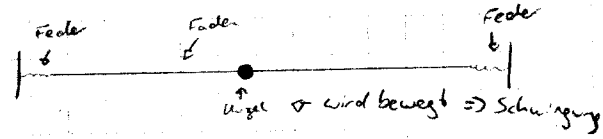
$\Rightarrow$ Summensatz neu bewiesen

PHYSIK: $\quad$ Newton: Kraft = m · Beschl. $\qquad y(t)$ Auslenkung zur Zeit t

Hooke: Kraft = $-k\cdot y(t)$ $\qquad y(0)$ Ruhelage

$m = \ddot{y}(t) = -k\cdot y(t)$

$\ddot{y}(t) = -\omega^2 y \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$

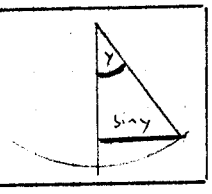


$y(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = r\cos(\omega t + \varphi)$ $\Rightarrow$ harmonische Schwingung

Pendel:

$\ddot{y} = -k\cdot\sin y$

$y = 0$



Energie: $\frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2}y^2 = \frac{my^2}{2} + \frac{k}{2}y^2$

macht alles überhaupt Sinn?

$\Rightarrow$ falsch abgeschrieben? Buchstaben verwechselt?

5.10 Taylorreihe

$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0 \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \sin x \qquad f^{IV}(0) = 0$

$\dots$

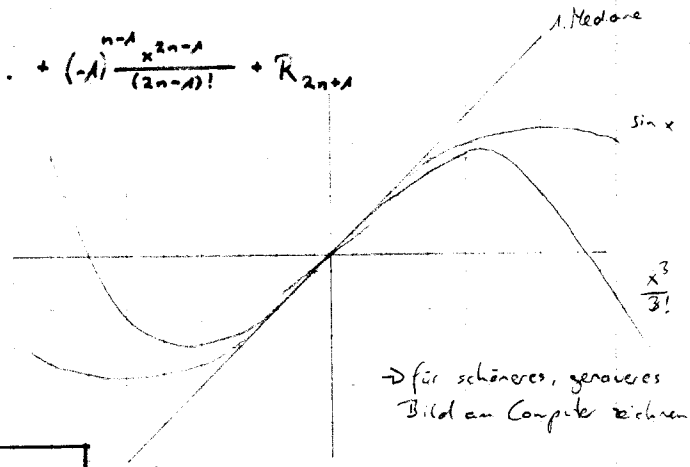
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{R_{n+1}(x)}_{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

$$\sin(x) = x + \left(-1 \cdot \frac{x^3}{3!}\right) + \left(1 \cdot \frac{x^5}{5!}\right) + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

$$\underbrace{R_{2n+1} = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \underbrace{\cos \xi}_{\in [-1,1]}}_{= R_{2n+1}(x) \to 0}$$

$n \to \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}$



→ für schöneres, genaueres Bild am Computer zeichnen

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \end{aligned}}$$

Wichtig!

analog für cos:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

π ... Definiert als 1. positive Nullstelle der Sinusfunktion (nur eine von vielen Def.)

weitere Taylorreihen: zB. $\arctan x$, mit Integral

5.11 Die Eulersche Formel

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Beweis:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \dots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots =$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}_{\sin x} = \cos x + i \sin x \qquad \square.$$

Spezialfälle:

$x = 2\pi$	$e^{2\pi i} = 1$	$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	$x = \pi$	$e^{\pi i} = -1$

→ Formel für den allgemeinen Punkt im EK

⇒ Exp. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist nicht mehr injektiv! ↳ siehe VO komplexe Analysis

$$z = r\overbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}^{\text{wäre cis } \varphi} = r \cdot e^{i\varphi}$$

→ und deshalb wird cis φ kaum verwendet

Summensätze: $e^{i(x+y)} = e^{ix} + e^{iy} \qquad e^{inx} = (e^{ix})^n$

- $\cos(x+y) + i \sin(x+y) = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$ ⇔ Summensätze von sin, cos
- $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$ ← de Moivre

Es wird alles einfacher, wenn man ins Komplexe geht

5.12 Wurzel aus komplexen Zahlen

$z^n = a \quad a, z \in \mathbb{C}, \; n \in \mathbb{N}$

$a = |a| e^{i\theta}$ $\qquad r^n e^{in\varphi} = |a| e^{i\theta} \Leftrightarrow r^n = |a|, \; e^{in\varphi} = e^{i\theta} \Leftrightarrow$

$z = r e^{i\varphi}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt[n]{a}, \; n\varphi = \theta, \; \theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \ldots \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}$

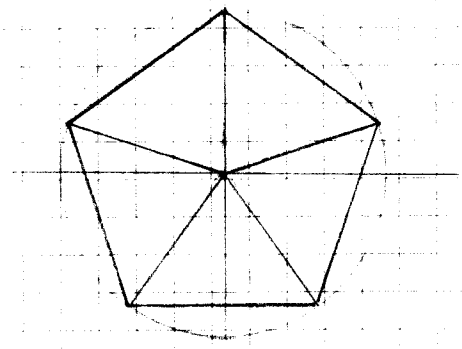
$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Spezialfall: $a = 1$

$z^n = 1 \qquad z = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$

$k = 0, \; z = 1, \; n = 5$

$\Rightarrow$ Ecken des regelmäßigen n-Ecks



5.13 Gleichung 3. Grades

$x^3 = px + q \qquad x = \sqrt[3]{\frac{p}{2} + \sqrt{d}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{d}} \qquad d = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$

$x = u + v \quad \Rightarrow$ Lösungsformel von Cardano (grausig)

$\Rightarrow$ braucht kein Mensch und keine Maschine.

hat 3 reelle Lösungen $\Leftrightarrow p > 0, \; 27q^2 < 4p^3$

$x^3 + px + q = 0$

$\frac{p^2}{4} - q > 0$

$p^2 > 4q$

Vieta (1591) $\qquad$ eleganter als Cardano

Ansatz: $\boxed{x = r\cos\varphi}$

$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = 4 \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^3 - 3\frac{x}{r} \qquad / \cdot \frac{r^3}{4}$

$\Rightarrow \frac{r^3}{4}\cos 3\varphi = x^3 - \frac{3}{4}r^2 x \Rightarrow x^3 = \underbrace{\frac{3}{4}r^2}_{\to p} x + \underbrace{\frac{r^3}{4}\cos 3\varphi}_{\to q}$

$\frac{3}{4}r^2 = p \qquad \Rightarrow r = \sqrt{4\frac{p}{3}}$

$\frac{r^3}{4}\cos 3\varphi = q \qquad \Rightarrow \cos 3\varphi = \frac{4q}{r^3} = \frac{4q}{\sqrt{\frac{4^3 p^3}{3^3}}} = \frac{\sqrt{27q^2}}{\sqrt{4p^3}} < 1$

$\Rightarrow \varphi_0 = \frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}$

$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{2\pi}{3}, \; \varphi_2 = \varphi_0 + \frac{4\pi}{3} \quad \Rightarrow$ auch Lösungen