9. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

Warteschlangen mit beschränktem Warteraum:

1. In einer Warteschlange mit einem Server gibt es insgesamt N Plätze (ein Platz beim Server, $N-1$ Plätze für Wartende). Die Zwischenankunftszeiten und Bedienzeiten sind exponentialverteilt mit Parameter λ bzw. μ. Wenn ein Kunde ankommt, wenn das System voll besetzt ist, dann wird er weggeschickt. Die Anzahl $X(t)$ von Kunden, die zur Zeit t anwesend sind, kann durch einen Geburts- und Todesprozess dargestellt werden. Bestimmen Sie die infinitesimalen Parameter dieses Prozesses.

2. Bestimmen Sie im vorige Beispiel die stationäre Verteilung $(\pi_0, \ldots, \pi_N)$.

3. Setzen Sie im vorigen Beispiel $\lambda = 1$ und $\mu = 1.5$. Wie groß muss N sein, damit die Blockierwahrscheinlichkeit π_N kleiner als 0.1 ist?

4. In einem Warteschlangensytem gibt es s Server und keinen Warteraum (d.h., wenn alle Server besetzt sind, werden ankommende Kunden weggeschickt). Wieder sollen Zwischenankunftszeiten und Bedienzeiten exponentialverteilt sein. Bestimmen Sie die infinitesimalen Parameter des enstprechenden Geburts- und Todesprozesses.

5. Bestimmen Sie im vorige Beispiel die stationäre Verteilung $(\pi_0, \ldots, \pi_s)$.

6. Setzen Sie im vorigen Beispiel $\lambda = 1$ und $\mu = 1.5$. Wie groß muss N sein, damit die Blockierwahrscheinlichkeit π_s kleiner als 0.1 ist?

7. Die Stufenmethode: in einer Warteschlange mit einem Server sind die Zwischenankunftszeiten Exponentialverteilt mit Parameter λ, die Bedienzeiten haben eine Gammaverteilung mit den Parametern k und μ. Dieses System kann man analysieren, indem man sich vorstellt, dass jeder ankommende Kunde k "Stufen" mitbringt, die jeweils eine exponentialverteilte (mit Parameter μ) Zeit benötigen, um abgearbeitet zu werden. Die Anzahl $X(t)$ von Stufen, die sich zur Zeit t im System befinden, lässt sich durch eine durch eine Markovkette beschreiben. Bestimmen Sie ihre infinitesimalen Parameter. überlegen Sie auch, wie sich aus $X(t)$ die Anzahl der anwesenden Kunden bestimmen lässt.

partielle Lösungen

1. $\lambda_N = 0$, $\lambda_i = \lambda, i = 0, \ldots, N-1$.
2. $\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$ mit $\rho = \lambda/\mu$.
3. $N = 4$
4. $\mu_i = \mu i, i = 1, dots, s$.
5. $\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \rho^n/n!}$ mit $\rho = \lambda/\mu$.
6. $N = 3$.
7. $q_{n,n+k} = \lambda$.