8. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

1. Die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung: X sei exponentialverteilt mit Parameter λ. Zeigen Sie
$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$
(wenn X als Wartezeit interpretiert wird, dann bedeutet das, dass die bedingte Verteilung der restlichen Wartezeit nicht davon abhängt, wie lange schon gewartet wurde; die Exponetialverteilung "vergisst" also, wie lange sie uns schon hat warten lassen).

2. Zeigen Sie, dass eine Markovkette in diskreter Zeit genau dann als Diskretisierung einer Markovkette in stetiger Zeit erhalten werden kann, wenn die Spur ihrer Übergangsmatrix P größer als 1 ist.

3. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger
$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
Bestimmen Sie die Übergangsmatrizen $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

4. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
Bestimmen Sie die Klassen von kommunizierenden Zuständen, die Übergangsmatrizen $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

5. Eine Markovkette mit drei Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger
$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
Bestimmen Sie die Übergangsmatrizen $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

6. Eine Markovkette mit fünf Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Absorptionswahrscheinlichkeiten im absorbierenden Zustand 1.

7. Bestimmen Sie im vorigen Beispiel die mittleren Absorptionszeiten.

Partielle Lösungen kommen morgen/übermorgen.