

## 7. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

1. Spieler A und B spielen folgendes Spiel: eine Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal “KKZ” oder “KZZ” erscheint; im ersten Fall gewinnt A, im zweiten B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt.
2. Bestimmen Sie im vorigen Beispiel die mittlere Spieldauer.
3. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Klassen von kommunizierenden Zuständen, die Absorptionswahrscheinlichkeiten und die mittleren Absorptionszeiten für die einzelnen Zustände.

4. Eine Markovkette hat die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i,i+2} = p, p_{i,i-1} = q = 1 - p, i \in \mathbb{Z}.$$

Wann ist diese Kette rekurrent? (überlegen Sie, dass die Differenzen  $X(t+1) - X(t)$  unabhängig sind. Damit  $X(t) = X(0)$  ist, müssen doppelt so viele Schritte nach unten gemacht worden sein wie nach oben. Damit kann man  $p_{ii}(t)$  bestimmen).

5. In Level 1 eines (zugegebenermaßen nicht sehr spannenden) Computerspiels sitzt Supermorio zu Beginn in einer Höhle. Außer der Höhle gibt es auf diesem Level noch das Schloss. Supermorio bewegt sich zufällig zwischen diesen beiden Orten hin und her und kann außerdem sterben oder in den nächsten Level aufsteigen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind wie folgt:

	Höhle	Schloss	Tod	Aufsteigen
Höhle	0	0.7	0.2	0.1
Schloss	0.6	0	0.1	0.3

Bei jedem Besuch in der Höhle findet Supermorio zwei Goldstücke, bei jedem Besuch im Schloss 5.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Supermorio den nächsten Level erreicht?

6. Fortsetzung: wie lange bleibt Supermorio im Mittel in diesem Level?
7. Fortsetzung: wie viele Goldmünzen hat Supermorio im Mittel, wenn er aufsteigt?

## Ergebnisse

1.  $2/3$
2.  $16/3$
3.  $a_i = 1$ ,  $m_1 = 8/3$ .
4.  $p_{ii}(3n) = \binom{3n}{2n} p^n q^{2n}$ , und mit Stirling: rekurrent für  $p = 1/3$ , sonst transient.
5.  $31/58$
6.  $85/29$
7.  $3730/899$