5. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

1. Die Frage nach der Anzahl der Würfe, die nötig sind, um mit Wahrscheinlichkeit 0.95 mindestens 100 Sechsen zu erhalten, kann man auch so lösen: diese Anzahl ist negativ binomialverteilt, und diese negative Binomialverteilung kann als Summe von unabhängigen geometrischen verteilten Zufallsvariablen (jeweils die Wartezeit bis zur nächsten Sechs). Wenden Sie auf diese Summe den zentralen Grenzwertsatz an und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus der Vorlesung.

2. Bestimmen Sie für eine Zufallsvariable $X \sim B(40, 1/2)$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $[X \leq 8]$, $[X \leq 11]$, $[X \leq 14]$, $[X \leq 17]$ und $[X \leq 20]$

   (a) exakt,

   (b) mit der Normalapproximation ohne Stetigkeitskorrektur,

   (c) mit der Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur.

   (Für Werte, die nicht in der Tabelle stehen, können Sie entweder ein Statistik- oder Mathematikprogramm verwenden, oder die Approximation

$$1 - \Phi(x) = \Phi(-x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5})e^{-x^2/2})$$

3. Bestimmen Sie für eine Zufallsvariable $X \sim B(48, 1/4)$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $[X \leq 5]$, $[X \leq 9]$, $[X \leq 12]$, $[X \leq 15]$ und $[X \leq 18]$

   (a) exakt,

   (b) mit der Normalapproximation ohne Stetigkeitskorrektur,

   (c) mit der Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur.

4. Wie oft muss man Würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen größer als 100 ist, mindestens 0.9 beträgt?

5. Bei einem Spiel kann auf die Ausgänge $1, \ldots, m$ gesetzt werden, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_m$ gezogen werden. Wenn Ausgang i gezogen wird, werden die Einsätze auf i m-fach zurückgezahlt, die anderen verfallen. Ein Spieler spielt nach folgender Strategie: er verteilt sein Kapital K im Verhältnis $q_1 : \ldots : q_m$ (mit $\sum_i q_i = 1$) auf die möglichen Ausgänge und verwendet den Gewinn aus einer Runde als Einsatz in der nächsten.

   (a) Zeigen Sie, dass das Kapital nach n (unabhängigen) Runden

$$K_n = K_0 X_1 \ldots X_n$$

   ist, mit $\mathbb{P}(X_i = mq_j) = p_j$.

(b) Bestimmen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(K_n).$$

(c) Wie sind $q_1, \ldots, q_m$ zu wählen, damit dieser Grenzwert maximal wird?

6. $(X_1, \ldots, X_{100})$ sind unabhängig gleichverteilt auf $[0, 1]$,
$$Y = \prod_{i=1}^{100} X_i.$$
Bestimmen Sie $\mathbb{E}(Y)$ und $\mathbb{P}(Y \geq \mathbb{E}(Y))$.

7. Rundungsfehler: zweistellige Dezimalzahlen der Form $0.ab$ werden auf eine Dezimalstelle gerundet. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz des Rundungsfehlers

   (a) Wenn bei $b = 5$ aufgerundet wird.

   (b) Wenn bei $b = 5$ auf die nächste gerade Ziffer gerundet wird (etwa 0.15 auf 0.2, 0.65 auf 0.6).

   Wie verhält sich der Rundungsfehler, wenn 100 Zahlen addiert werden (geben Sie — näherungsweise — 0.01- und 0.99-Quantile dafür an)?