Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Stefan Wurm, BSc

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2016

Vorzubereiten bis: 21. April 2016 — 10. März 2016

2. Übungsblatt

Kreuzen Sie **bis zwei Stunden vor Übungsbeginn** auf TUWEL (`https://tuwel.tuwien.ac.at`) jene Aufgaben, die Sie gerechnet haben und in der Übung präsentieren können.

Mit * gekennzeichnete Beispiele **dürfen** Sie mit MATLAB bearbeiten, jene mit ! **müssen** mit MATLAB gelöst werden. Bringen Sie Ihren Code auf USB-Stick oder eigenem Rechner (mit VGA-Anschluss) mit.

Bei Unklarheiten wenden Sie sich bitte gerne an `stefan.wurm@tuwien.ac.at` oder posten Sie in das TUWEL-Forum.

Aufgabe 1:
(!) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme $A_i\vec{x} = \vec{b}$, mit $i = 1, 2$ und den beiden Koeffizientenmatrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.00001 \end{pmatrix}$$

und jeweils der Inhomogenität $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Inhomogenität mit Störung $\tilde{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 0.99999 \\ 1.00001 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Konditionszahlen der beiden Matrizen $\kappa(A_i)$, $i = 1, 2$ bezüglich einer Norm Ihrer Wahl und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}.$$

***a)** Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.

b) Lösen Sie für die Vektoren $\vec{b} = (1, 1)^T$, $\Delta\vec{b}_1 = (\delta, \delta)^T$ und $\Delta\vec{b}_2 = (\delta, -\delta)^T$ mit einer kleinen reellen Zahl $\delta > 0$ die Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$, $A(\vec{x} + \Delta\vec{x}_1) = \vec{b} + \Delta\vec{b}_1$ und $A(\vec{x} + \Delta\vec{x}_2) = \vec{b} + \Delta\vec{b}_2$. Vergleichen Sie die jeweiligen relativen Fehler

$$\frac{\|\Delta\vec{x}_1\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} \quad \text{und} \quad \frac{\|\Delta\vec{x}_2\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty}$$

mit der allgemeinen Fehlerschätzung

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

Aufgabe 3:
(!) In TUWEL steht eine Datei `daten.csv` für Sie zum Downloaden bereit. Importieren Sie die Datei in MATLAB. Interpretieren Sie die erste Spalte als N Stützstellen x_j und die zweite Spalte als dazugehörige Funktionswerte f_j.

Bestimmen Sie zu den Stützpunkten dasjenige Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ zweiten Grades, welches die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{j=1}^{N} (p(x_j) - f_j)^2$$

minimiert.

Hinweis: Bemerkung auf Seiten 49-50, Matlab Befehl `csvread`.

Aufgabe 4:
Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 217 & = & 780x & + & 563y \\ 254 & = & 913x & + & 659y \end{array}$$

sind zwei Näherungslösungen gegeben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für beide Näherungen die Norm der Residuen $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_2$. Welche Lösung würden Sie deshalb als exakter einstufen? Bestimmen Sie noch die exakte Lösung und erklären Sie was passiert.

Aufgabe 5:
(!) Vollziehen und rechnen Sie Beispiel 1.3 im Skriptum zur VO nach und berechnen Sie jeweils auch die Konditionszahlen $\kappa_2(A)$ und $\kappa_\infty(A)$.

Aufgabe 6:
Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $1 \leq n \leq m$ eine Matrix und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ein gegebener Vektor. Zeigen Sie:

- Eine Lösung der *Gaußschen Normalgleichungen*

  $$A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}$$

  ist auch eine Lösung des *Minimierungsproblems*

  $$\|A\vec{x} - \vec{b}\|_2 \to \min$$

  für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

- Jede Lösung des Minimierungsproblems ist auch Lösung der Gaußschen Normalgleichungen.

Aufgabe 7:
Informieren Sie sich über die Cholesky-Zerlegung (Definition, Voraussetzungen, Konstruktion, Aufwand, ...) und diskutieren Sie den Unterschied zur LU-Zerlegung. Weiters schreiben Sie ein MATLAB-Programm zur Cholesky-Zerlegung einer symmetrischen tridiagonalen Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, das ist eine Matix der Form $T = (t_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit $t_{ij} \neq 0$, $\forall i, j$ mit $|i - j| \leq 1$, $t_{ij} = 0$, $\forall i, j$ mit $|i - j| > 1$ und $t_{ij} = t_{ji}$.