Gernot Polivka | 12009686 |

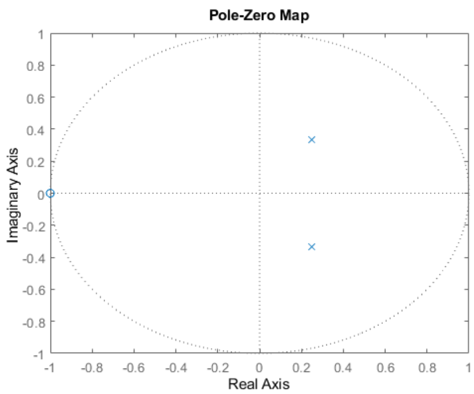
11. Übung

Aufgabe 5.5:

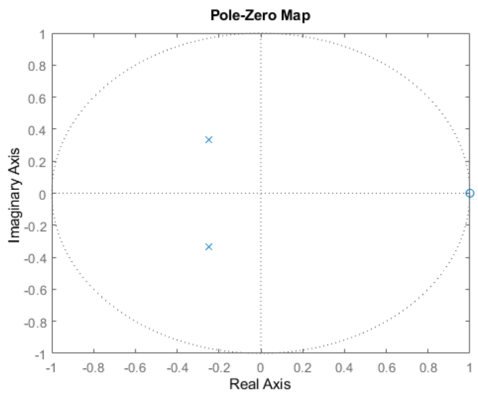
In entsprechender Weise wie bei Analogfiltern, können auch bei digitalen Filtern Frequenztransformationen angewendet werden, um aus einem Tiefpass andere frequenzselektive Filter zu erzeugen. Die einfachste dieser digitalen Frequenztransformationen ist eine Tiefpass-/Hochpasstransformation, bei der z in der Übertragungsfunktion des Tiefpassfilters durch $-z$ ersetzt wird, d.h.

$$\boldsymbol{H_{HP}(z) = H_{TP}(z)|_{z \to -z}}$$

a) **Zeigen Sie anhand der Pol-/Nullstellenform von $H_{TP}(z)$, dass diese Frequenztransformation tatsächlich ein Hochpassfilter liefert. Skizzieren Sie im Pol-/Nullstellendiagramm die Transformation eines konjugiert komplexen Tiefpasspolpaares.**



$\rightarrow$



$$\left(P = \frac{1}{4} \pm j \cdot \frac{1}{3}\right) \rightarrow \left(P = -\frac{1}{4} \mp j \cdot I\right)$$

$$P = R \pm j \cdot I$$

$$H_{TP}(z) = \frac{z+1}{\big(z - (R + j \cdot I)\big) \cdot \big(z - (R - j \cdot I)\big)}$$

$$H_{HP}(z) = \frac{-z+1}{\big(-z - (R + j \cdot I)\big) \cdot \big(-z - (R - j \cdot I)\big)}$$

$$P = -R \mp j \cdot I$$

Spiegelung an der imaginären Achse bewirkt Spiegelung des Betragsverlaufes[1]

$$z \rightarrow -z$$

$$e^{j\theta} \rightarrow -e^{j\theta} = e^{j \cdot (\theta + \pi)}$$

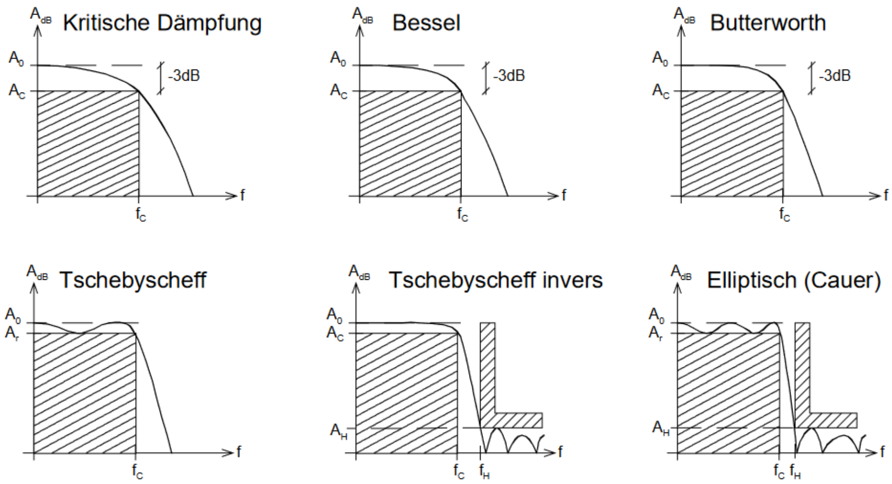
[1] Siehe 5.11b

b) Wie hängen die Tiefpassgrenzfrequenz und die Hochpassgrenzfrequenz zusammen?

$$\theta_g = \pi - \theta_{g,TP}, \qquad f_g = \frac{f_s}{2} - f_{g,TP}$$

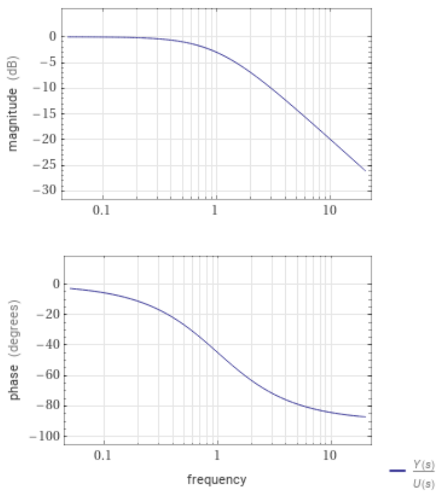
$$f_s \text{ ... Abtastfrequenz}$$

c) Ändert sich die Sperrdämpfung und Durchlasswelligkeit durch diese Transformation?



Die Wellen im Durchlassbereich werden einfach mitgespiegelt, aber in Art und Form nicht geändert.

d) Verifizieren Sie die Wirkungsweise dieser Transformation auch am konkreten Fall eines Tiefpassfilters erster Ordnung, das mit Hilfe der bilinearen $\mathcal{Z}$-Transfromation aus einem normierten analogen Referenztiefpass gewonnen wird.



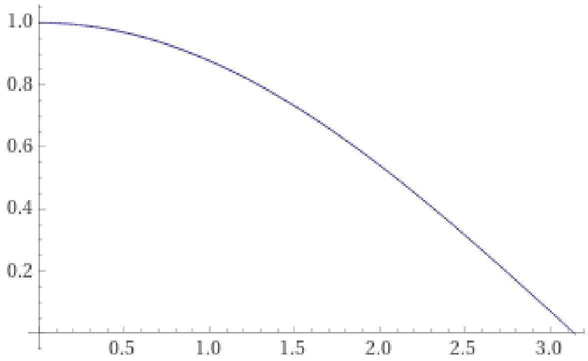
$$H_{TP}(s) = \frac{1}{1+s}$$

Formelsammlung

$$H(z) = H(s)\big|_{s=\frac{1}{v}\cdot\frac{z-1}{z+1}}$$

$$s = \frac{1}{v}\cdot\frac{z-1}{z+1}, \qquad v = \tan\left(\pi\cdot\frac{f_g}{f_s}\right)$$

$$H_{TP}(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{v}\cdot\frac{z-1}{z+1}}$$



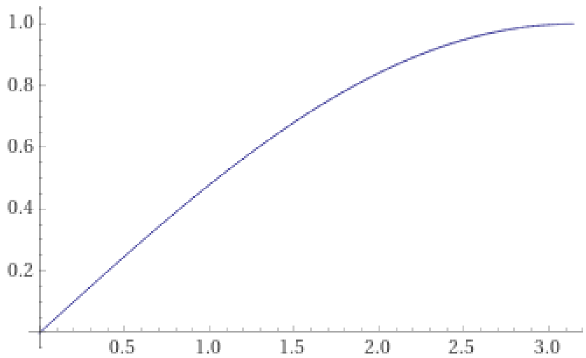
$$H_{HP}(s) = \frac{1}{1-\frac{1}{v}\cdot\frac{z+1}{1-z}}$$

$$(v=1)^{2}$$

$$= \frac{1-z}{1-z-z-1}$$

$$= \frac{z-1}{2z}$$

$$\left|H_{HP}\left(e^{j\theta}\right)\right| = \left|\frac{e^{j\theta}-1}{2\cdot e^{j\theta}}\right|$$



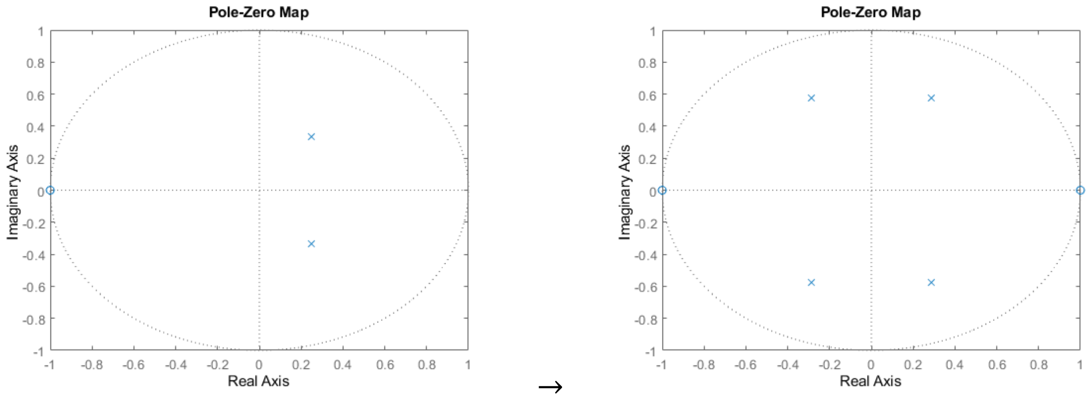
[2] o.B.d.A

e) Wiederholen Sie die vorhergehenden Punkte für die weiteren zwei elementaren Transformationen

$$\boldsymbol{H_{BP}(z) = H_{TP}(z)|_{z\to -z^2}}$$
$$\boldsymbol{H_{BS}(z) = H_{TP}(z)|_{z\to z^2}}$$

a. Verifizieren Sie die gegebene Beziehung anhand der Pol-/Nullstellenform.

$$H_{BP}(z) = H_{TP}(z)|_{z\to -z^2}$$



→

$$\left(N = -1, \qquad P = \frac{1}{4} \pm j \cdot \frac{1}{3}\right) \to$$

$$\left(N = \pm 1, \qquad P = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \mp \frac{j}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{I - j \cdot R}, \qquad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{j}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{I + j \cdot R}\right)$$

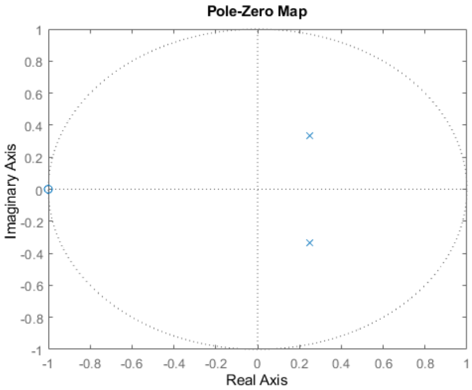
$$H_{TP}(z) = \frac{z+1}{\big(z - (R + j\cdot I)\big)\cdot\big(z - (R - j \cdot I)\big)}$$

$$H_{BP}(z) = \frac{-z^2+1}{\big(-z^2 - (R + j\cdot I)\big)\cdot\big(-z^2 - (R - j \cdot I)\big)}$$

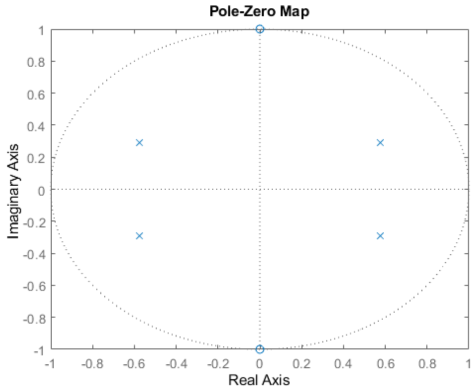
Durch die Duplizierung/Spiegelung der Pol- und Nullstellen erhält der Betragsverlauf eine zusätzliche Flanke. Weil die Pole in die Mitte und nach oben verschoben werden ist die Distanz zu den Polen relativ zu den Nullstellen bei $\theta = \frac{\pi}{2}$ geringer als bei $\theta = 0 \to$ Bandpass.[3]

[3] Siehe 5.11b

$$H_{BS}(z) = H_{TP}(z)|_{z \to z^2}$$



$\rightarrow$



$$\left(N = -1, \qquad P = \frac{1}{4} \pm j \cdot \frac{1}{3}\right) \rightarrow \left(N = \pm 1, \qquad P = \pm\sqrt{R \pm j \cdot I}\,\right)$$

$$H_{TP}(z) = \frac{z+1}{\big(z - (R + j \cdot I)\big) \cdot \big(z - (R - j \cdot I)\big)}$$

$$H_{BS}(z) = \frac{z^2+1}{\big(z^2 - (R + j \cdot I)\big) \cdot \big(z^2 - (R - j \cdot I)\big)}$$

Im Vergleich zu der vorherigen Transformation kommt noch eine Drehung hinzu. Weil die Pole von der Mitte weg und nach unten verschoben werden ist die Distanz zu den Polen relativ zu den Nullstellen bei $\theta = \frac{\pi}{2}$ größer als bei $\theta = 0 \rightarrow$ Bandsperre.[4]

b. Wie hängen die Grenzfrequenzen der Filter zusammen?

Hochpass

$$z \rightarrow -z$$

$$e^{j\theta} \rightarrow -e^{j\theta} = e^{j\cdot(\theta+\pi)}$$

$$\theta_g = \pi - \theta_{g,TP}, \qquad f_g = \frac{f_s}{2} - f_{g,TP}$$

Bandpass

$$z \rightarrow -z^2$$

$$e^{j\theta} \rightarrow -e^{j2\theta} = e^{j\cdot 2(\theta+\pi)}$$

$$\theta_g = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\theta_{g,TP}}{2}, \qquad f_g = \frac{f_s}{4} \pm \frac{f_{g,TP}}{2}$$

[4] Siehe 5.11b

$$z \to z^2$$
$$e^{j\theta} \to e^{j2\theta} = e^{j\cdot 2\theta}$$
$$\theta_{g1} = \frac{\theta_{g,TP}}{2}, \qquad f_{g1} = \frac{f_{g,TP}}{2}$$
$$\theta_{g2} = \pi - \frac{\theta_{g,TP}}{2}, \qquad f_{g2} = \frac{f_s}{2} - \frac{f_{g,TP}}{2}$$

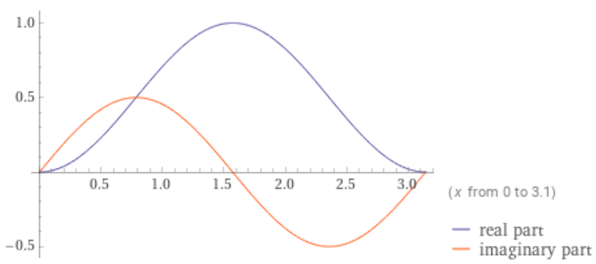
c. Ändert sich die Sperrdämpfung und Durchlasswelligkeit durch diese Transformation?

Nein.
Die Betragsverläufe werden um verschiedene Achsen gespiegelt,
es ändert sich aber nie deren Form.

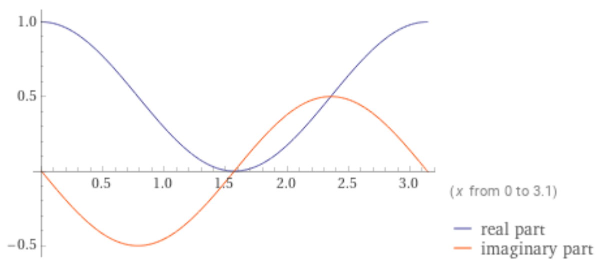
d. Verifizieren Sie die Wirkungsweise der Transformationen an einem konkreten Beispiel.

$$H_{TP}(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{v} \cdot \frac{z-1}{z+1}}$$
$$(v = 1)$$[5]

$$z \to -z^2$$
$$H_{BP}(z) = \frac{1}{1 + \frac{-z^2-1}{-z^2+1}}$$
$$\left|H_{BP}(e^{j\theta})\right| = \left|\frac{1}{1 - \frac{1+e^{j2\theta}}{1-e^{j2\theta}}}\right|$$



$$z \to z^2$$
$$H_{BS}(z) = \frac{1}{1 + \frac{z^2-1}{z^2+1}}$$
$$\left|H_{BS}(e^{j\theta})\right| = \left|\frac{1}{1 + \frac{e^{j2\theta}-1}{e^{j2\theta}+1}}\right|$$



[5] o.B.d.A

Aufgabe 5.8:

Von einem digitalen Filter mit reellwertigen Koeffizienten sei die Impulsantwort gegeben:

$$\boldsymbol{h_1[n] = a^n \cdot \sigma[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n]}$$

Mit diesem Filter wird nun ein neues Filter mit der Impulsantwort $\boldsymbol{h[n] = h_1[n] + h_1[-n]}$ gebildet.

a) **Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $\boldsymbol{H(z)}$ des neuen Filters.**

Formelsammlung

$$\alpha^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1, \qquad \forall z$$

$$x[-n] \leftrightarrow X(z^{-1}), \qquad \frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}}$$

$$h_1[n] = a^n \cdot \sigma[n] - \frac{1}{2} \cdot \delta[n]$$

$$H_1(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{1}{2}$$

$$H_1(z^{-1}) = \frac{1}{1 - a \cdot z} - \frac{1}{2}$$

$$H(z) = H_1(z) + H_1(z^{-1})$$

$$= \frac{z}{z-a} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1-a\cdot z} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{z}{z-a} + \frac{1}{1-a\cdot z} - 1$$

$$= \frac{z \cdot (1 - a \cdot z) + z - a}{(z-a)\cdot(1-a\cdot z)} - 1$$

$$= \frac{z - a \cdot z^2 + z - a - (z-a)\cdot(1-a\cdot z)}{(z-a)\cdot(1-a\cdot z)}$$

$$= \frac{z - a \cdot z^2 + z - a - z + a + a \cdot z^2 - a^2 \cdot z}{(z-a)\cdot(1-a\cdot z)}$$

$$= \frac{z - a^2 \cdot z}{(z-a)\cdot(1-a\cdot z)}$$

$$= \frac{z \cdot (1-a^2)}{(z-a)\cdot(1-a\cdot z)}$$

$$= \frac{z \cdot (a^2 - 1)}{a \cdot (z-a) \cdot \left(z - \frac{1}{a}\right)}$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich und skizzieren Sie das Pol-/Nullstellendiagramm von $H(z)$.

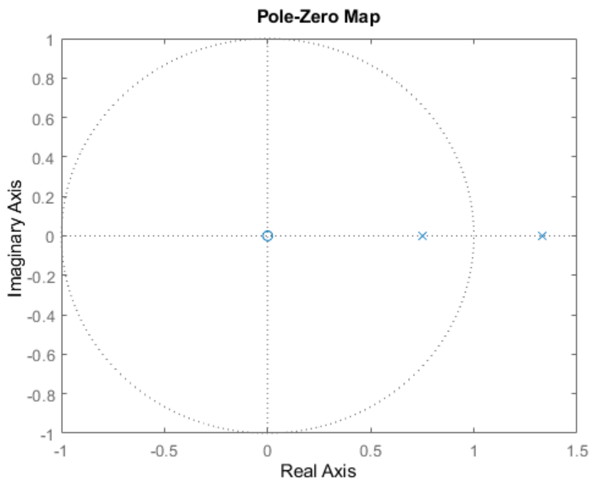
$$H_1(z) \leftrightarrow |z| > |\alpha|$$

$$H_1(z^{-1}) \leftrightarrow \frac{1}{\infty} < |z| < \frac{1}{|a|}$$

$$H(z) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} > |z| > |a|$$

$$|a| < 1$$

$$N = 0, \qquad P = a, \frac{1}{a}, \qquad a = 0.75$$



c) Berechnen und skizzieren Sie Betrags- und Phasenverlauf des Frequenzgangs $H(e^{j\theta})$.

$$H(z) = \frac{z \cdot (a^2 - 1)}{a \cdot (z - a) \cdot \left(z - \frac{1}{a}\right)}$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{e^{j\theta} \cdot (a^2 - 1)}{a \cdot (e^{j\theta} - a) \cdot \left(e^{j\theta} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$\arg\left(H(e^{j\theta})\right) = \arg\left(\frac{e^{j\theta} \cdot (a^2 - 1)}{a \cdot (e^{j\theta} - a) \cdot \left(e^{j\theta} - \frac{1}{a}\right)}\right)$$

$$= \arg\left(e^{j\theta} \cdot (a^2 - 1)\right) - \arg\left(a \cdot (e^{j\theta} - a) \cdot \left(e^{j\theta} - \frac{1}{a}\right)\right)$$

$$= \theta - \arg\left((e^{j\theta} - a) \cdot \left(e^{j\theta} - \frac{1}{a}\right)\right)$$

$$= \theta - \arg\left(\left(\cos(\theta) - a + j \cdot sin(\theta)\right) \cdot \left(\cos(\theta) - \frac{1}{a} + j \cdot sin(\theta)\right)\right)$$

$$= \theta - \arg\left(\cos^2(\theta) - a \cdot \cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{1}{a} \cdot \cos(\theta) + 1 - \frac{1}{a} \cdot j \cdot \sin(\theta) + j \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) - a \cdot j \cdot \sin(\theta) - \sin^2(\theta)\right)$$

$$= \theta - \arg\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 1 - \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \cos(\theta) + j \cdot 2\sin(\theta)\cos(\theta) - \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot j \cdot \sin(\theta)\right)$$

$$= \theta - \arg\left(2 \cdot \cos^2(\theta) - \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot (\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)) + j \cdot 2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)$$

$$= \theta - \arg\left(2 \cdot \cos^2(\theta) - \frac{a^2+1}{a} \cdot \cos(\theta) - \frac{a^2+1}{a} \cdot j \cdot \sin(\theta) + j \cdot 2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)$$

$$= \theta - \arg\left(\cos(\theta) \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta) - \frac{a^2+1}{a}\right) + j \cdot \sin(\theta) \cdot \left(2\cos(\theta) - \frac{a^2+1}{a}\right)\right)$$

$$= \theta - \tan^{-1}\left(\frac{\sin(\theta) \cdot \left(2\cos(\theta) - \frac{a^2+1}{a}\right)}{\cos(\theta) \cdot \left(2 \cdot \cos(\theta) - \frac{a^2+1}{a}\right)}\right)$$

$$= \theta - \tan^{-1}\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)$$

$$= \theta - \tan^{-1}(\tan(\theta))$$

$$= \theta - \theta$$

$$= 0$$

$$\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right| = \left|\frac{e^{j\theta} \cdot (a^2 - 1)}{a \cdot (e^{j\theta} - a) \cdot \left(e^{j\theta} - \frac{1}{a}\right)}\right|$$

$$= (1 - a^2) \cdot \left|\frac{1}{a \cdot (e^{j\theta} - a) \cdot \left(e^{j\theta} - \frac{1}{a}\right)}\right|$$

$$= (1 - a^2) \cdot \left|\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e^{j2\theta} - e^{j\theta} \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) + 1}\right|$$

$$= (1 - a^2) \cdot \left|\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e^{j2\theta} + 1 - e^{j\theta} \cdot \frac{a^2+1}{a}}\right|$$

$$= (1 - a^2) \cdot \left|\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e^{j\theta} \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) - e^{j\theta} \cdot \frac{a^2+1}{a}}\right|$$

$$= (1-a^2)\cdot\left|\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{e^{j\theta}\cdot 2\cdot\cos(\theta)-e^{j\theta}\cdot\frac{a^2+1}{a}}\right|$$

$$= (1-a^2)\cdot\left|\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{e^{j\theta}\cdot\left(2\cdot\cos(\theta)-\frac{a^2+1}{a}\right)}\right|$$

$$= \frac{1-a^2}{1+a^2}\cdot\left|\frac{1}{\frac{2a}{1+a^2}\cdot\cos(\theta)-1}\right|$$

d) Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort $a[n]$ des neuen digitalen Filters.

$$H(z)=\frac{z}{z-a}+\frac{1}{1-a\cdot z}-1$$

$$=\frac{z}{z-a}+\frac{z^{-1}}{z^{-1}-a}-1$$

Formelsammlung

$$\alpha^n\cdot\sigma[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-\alpha}$$

$$x[-n]\leftrightarrow X(z^{-1})$$

$$\alpha^{-n}\cdot\sigma[-n]\leftrightarrow\frac{z^{-1}}{z^{-1}-\alpha}$$

$$h[n]=a^n\cdot\sigma[n]+\alpha^{-n}\cdot\sigma[-n]-\delta[n]$$

$$a[n]=h[n]*\sigma[n]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\cdot\sigma[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a^k\cdot\sigma[k]+\alpha^{-k}\cdot\sigma[-k]-\delta[k])\cdot\sigma[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a^k\cdot\sigma[k]\cdot\sigma[n-k])+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\alpha^{-k}\cdot\sigma[-k]\cdot\sigma[n-k])-\sigma[n]$$

$$=-\sigma[n]+\sum_{k=0}^{\infty}(a^k\cdot\sigma[n-k])+\sum_{k=-\infty}^{0}(\alpha^{-k}\cdot\sigma[n-k])$$

$$= -\sigma[n] + \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k + \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^k \cdot \sigma[n+k])$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

$$\downarrow$$

$$n \geq 0$$

$$= -\sigma[n] + \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k + \sum_{k=0}^{\infty} a^k$$

$$= -\sigma[n] + \sigma[n] \cdot \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + \frac{1}{1 - a}$$

$$= -\sigma[n] + \sigma[n] \cdot \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + \frac{1}{1 - a}$$

$$= -1 + \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + \frac{1}{1 - a}$$

$$= \frac{1 - a^{n+1} + 1 - 1 + a}{1 - a}$$

$$= \frac{1 + a - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$n < 0$$

$$= -\sigma[n] + \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k + \sum_{k=-n}^{\infty} \alpha^k$$

$$= -\sigma[n] + \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k - \sum_{k=0}^{-n-1} \alpha^k \right)$$

$$= -\sigma[n] + \sigma[n] \cdot \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + \frac{1}{1 - a} - \frac{1 - a^{-n}}{1 - a}$$

$$= \frac{1}{1 - a} - \frac{1 - a^{-n}}{1 - a}$$

$$= \frac{a^{-n}}{1 - a}$$

Aufgabe 5.11:

In diesem Beispiel wird ein digitales Hann-Filter untersucht, das folgende Übertragungsfunktion aufweisen soll:

$$\boldsymbol{H(z) = K \cdot \frac{1 - z^{-6}}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})}}$$

a) **Zeichnen Sie das Pol-/Nullstellendiagramm für $H(z)$ und beachten Sie dabei eine eventuelle Aufhebung von Pol- und Nullstellen.[6]**

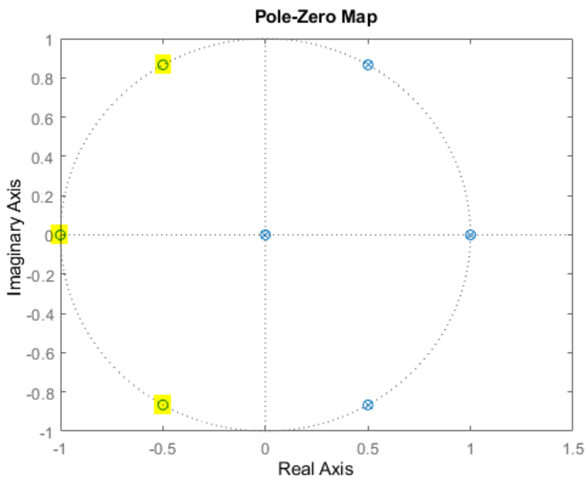
$$(1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2}) = 0$$
$$= 1 - z^{-1} - z^{-1} + z^{-2} + z^{-2} - z^{-3}$$
$$= z^3 - 2z^2 + 2z - 1$$

(Nullstelle bei $z = 1$)

$$\frac{z^3 - 2z^2 + 2z - 1}{z - 1} = z^2 - z + 1 = 0$$

$$P_1 = 1, \qquad P_{2,3} = \frac{1}{2} \pm j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$N = 0, e^{j\frac{2\pi}{6} \cdot k}, \qquad P = 0{,}1, \frac{1}{2} \pm j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$



[6] Die Nullstelle bei $z = 0$ kommt von der Polstelle im Nenner und die Polstelle bei $z = 0$ von der Polstelle im Zähler.

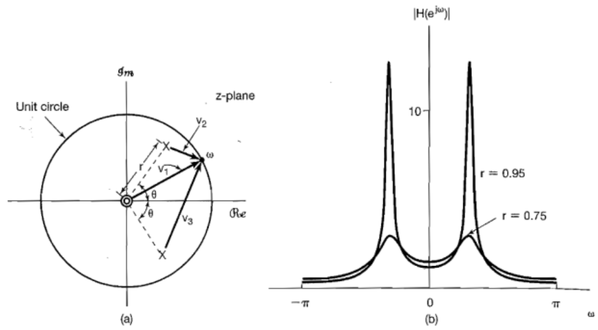
b) Welchen Filtergrad hat das gegebene Filter? Was für ein Filtertyp (Bandpass, Hilbert-Transformator, etc.) liegt vor?

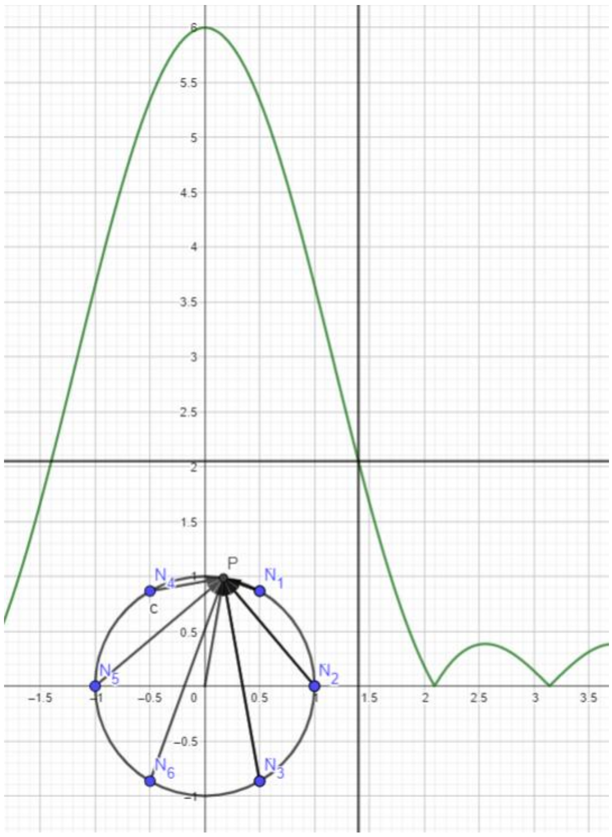
„Die Nullstellen linearphasiger FIR-Filter liegen in der komplexen z-Ebene entweder direkt am Einheitskreis oder gespiegelt am Einheitskreis.“ [7]

→ linearphasig

„Das Rauschen wird mit zunehmender Filterordnung (= Anzahl der Pole) vergrößert […]“ [8]

→ 3. Ordnung





[7] „Zeitdiskrete Signale und Systeme“, Gerhard Doblinger, S.132

[8] https://www.umit-tirol.at//data.cfm?vpath=vorlesungen/2_vo_gbsv S.10

$\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ kann direkt aus dem Pol-/Nullstellendiagramm abgeschätzt werden:[9,10]

$$\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right| = \frac{\prod_{n=0}^{N}\left|v_n(\theta)\right|}{\prod_{p=0}^{P}\left|v_p(\theta)\right|}$$

$$\downarrow$$

(im Falle des 1.ten Bildes)

$$\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right| = \frac{|v_1|^2}{|v_2| \cdot |v_3|}$$

$$\rightarrow \text{Tiefpassfilter}$$

(weil der Abstand zu den Nullstellen für höhere Frequenzen $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ kleiner wird)

c) Wie ist der Faktor K zu wählen, damit $H(e^{j0}) = 1$ ist?

$$H(z) = K \cdot \frac{1 - z^{-6}}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})}$$

$$H\left(e^{j\theta}\right) = K \cdot \frac{1 - e^{-j6\theta}}{(1 - e^{-j\theta}) \cdot (1 - e^{-j\theta} + e^{-j2\theta})}$$

$$1 = K \cdot \lim_{\theta \to 0} \left|\frac{1 - e^{-j6\theta}}{(1 - e^{-j\theta}) \cdot (1 - e^{-j\theta} + e^{-j2\theta})}\right|$$

$$= K \cdot \lim_{\theta \to 0} \left|\frac{1 - e^{-j6\theta}}{1 - e^{-j\theta} + e^{-j2\theta} - e^{-j\theta} + e^{-j2\theta} - e^{-j3\theta}}\right|$$

$$= K \cdot \lim_{\theta \to 0} \left|\frac{1 - e^{-j6\theta}}{1 - 2 \cdot e^{-j\theta} + 2 \cdot e^{-j2\theta} - e^{-j3\theta}}\right|$$

$$\downarrow \text{(L'Hospital)}$$

$$= K \cdot \lim_{\theta \to 0} \left|\frac{j \cdot 6 \cdot e^{-j6\theta}}{j \cdot 2 \cdot e^{-j\theta} - j \cdot 4 \cdot e^{-j2\theta} + j \cdot 3 \cdot e^{-j3\theta}}\right|$$

$$1 = K \cdot \lim_{\theta \to 0} \left|\frac{6}{2 - 4 + 3}\right|$$

$$K = \frac{1}{6}$$

---

[9] https://engineering.purdue.edu/~mikedz/ee301/OW_Chap10_ZT_PartII.pdf S.1 ff.

[10] Pol- und Nullstellen im Ursprung brauchen nicht berücksichtigt werden.

d) Erfinden Sie ein Schaltbild des digitalen Filters mit Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen.

$$H(z) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - z^{-6}}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})}$$

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-6}}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})} \cdot \frac{1}{6} \cdot X(z)$$

$$A(z) = \frac{1}{6} \cdot X(z)$$

$$= \frac{1}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})} \cdot A(z) - \frac{1}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})} \cdot z^{-6} \cdot A(z)$$

$$= \frac{1}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})} \cdot A(z) - \frac{1}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})} \cdot A(z)_{n-6}$$

$$B(z) = A(z) - A(z)_{n-6}$$

$$= \frac{B(z)}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})}$$

$$Y(z) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2}) = \frac{B(z)}{(1 - z^{-1})}$$

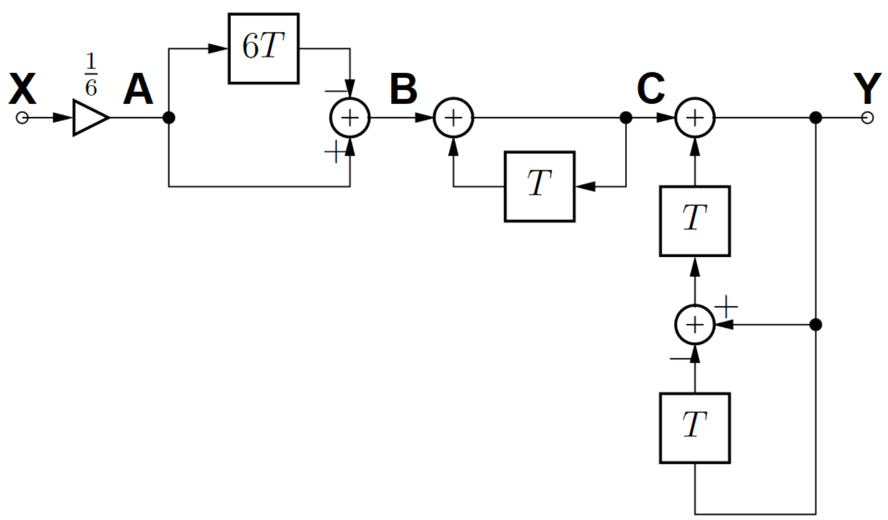
$$C(z) = \frac{B(z)}{(1 - z^{-1})}$$

$$= B(z) + z^{-1} \cdot C(z)$$

$$B(z) + C(z)_{n-1}$$

$$Y(z) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2}) = C(z)$$

$$Y(z) = C(z) + z^{-1} \cdot \left(Y(z) - z^{-1} \cdot Y(z)\right)$$



e) Zeigen Sie, dass das Hann-Filter auch mit einem FIR-Filter realisiert werden kann und bestimmen Sie die Impulsantwort des Filters.

$$H(z) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - z^{-6}}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{(z^{6} - 1) \cdot z^{-6}}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})}$$

$$\downarrow$$

$$N = e^{j\frac{2\pi}{6} \cdot k}$$

$$= \pm 1, \qquad \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{(z-1) \cdot (z+1) \cdot \left(z - \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}\right)\right) \cdot \left(\left(z - \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}\right)\right)\right)}{z^{6} \cdot (1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{(z-1) \cdot (z+1) \cdot (z^{2} - z + 1) \cdot (z^{2} + z + 1)}{z^{6} \cdot (1 - z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1} + z^{-2})}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{(z-1) \cdot (z+1) \cdot (z^{2} - z + 1) \cdot (z^{2} + z + 1)}{z^{6} \cdot (z-1) \cdot z^{-1} \cdot (z^{2} - z + 1) \cdot z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{(z+1) \cdot (z^{2} + z + 1)}{z^{3}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{z^{3} + 2z^{2} + 2z + 1}{z^{3}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3})$$

Formelsammlung

$$x[n + n_0] \leftrightarrow z^{n_0} \cdot X(z)$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$h[n] = \frac{1}{6} \cdot (\delta[n] + 2 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] + \delta[n-3])$$