**3. Übung**

**Aufgabe 1.7:**

**Für die gegebenen periodischen Signale bestimme man die Fourierreihenkoeffizienten $c_k$:**

**d)** $\boldsymbol{x[n] = e^{j\frac{2\pi L}{M}n}}$, **$L$ und $M$ ganzzahlig**

$$N = \frac{M}{L}$$

↓ ganzzahlig machen

$$N = \frac{M}{ggT(M,L)}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi L}{M}n} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n \cdot \left(\frac{L}{M} - \frac{k}{N}\right)}$$

Wenn $\frac{L}{M} - \frac{k}{N} \neq \mathbb{N}^0$ ist, heben einander die Summenglieder auf,
weil der Kreis ($\leftrightarrow e^{j\cdots}$) (öfter) vollständig durchlaufen wird.

Wenn $\frac{L}{M} - \frac{k}{N} = \mathbb{N}^0$ ist:

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n \cdot \mathbb{N}^0} = 1$$

$$\frac{L}{M} - \frac{k}{N} = \mathbb{N}^0$$

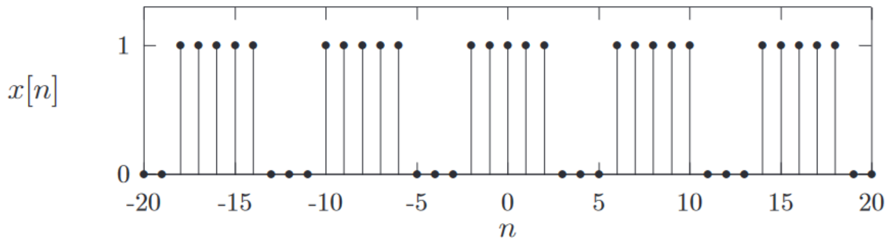
$$k = N \cdot \left(\frac{L}{M} - \mathbb{N}^0\right)$$

Nachdem $k$ nur bis $N-1$ geht ist nur $\mathbb{N}^0 = 0$ relevant.

$$k = \frac{L}{M} \cdot N$$

$$c_k = \delta_N\left(k - \frac{L}{M} \cdot N\right) = \delta_N\left(k - \frac{L}{ggT(M,L)}\right)$$

**e)**




$$N = 8$$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=0}^{7} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=-2}^{2} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{N}2k} + e^{j\frac{2\pi}{N}1k} + e^{0} + e^{-j\frac{2\pi}{N}1k} + e^{-j\frac{2\pi}{N}2k}\right)$$

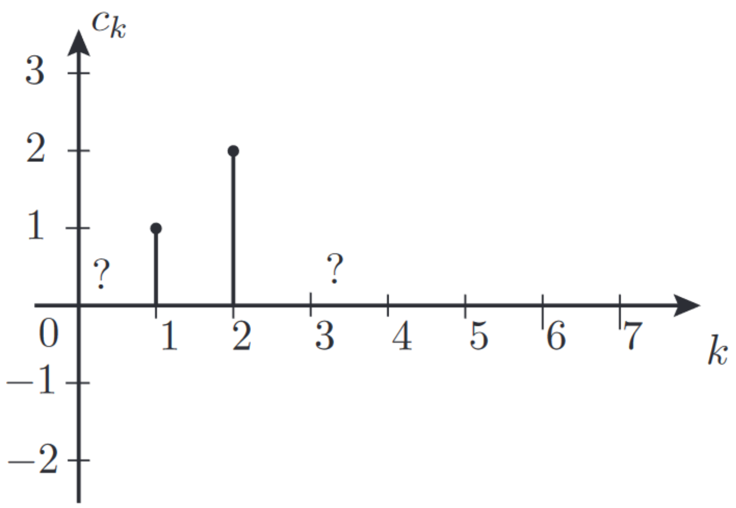
$$= \frac{1}{8} \cdot \left(1 + \left(e^{j\frac{4\pi}{N}k} + e^{-j\frac{4\pi}{N}k}\right) + \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{N}k\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)$$

**Aufgabe 1.8:**

**Gegeben ist ein unvollständiges Spektrum eines reellen, periodischen, mittelwertfreien Signals mit Periode $N = 4$:**




**Bestimmen Sie aus diesen Angaben das Zeitsignal $x[n]$, sowie die fehlenden Fourierreihenkoeffizienten $c_0$ und $c_3$.**

Mittelwertfreiheit[1]

$$c_0 = 0$$

Reelles Signal[2]

$$c_k = c_{N-k}^*$$

$$\begin{aligned} c_3 &= c_{4-3}^* \\ &= c_1^* \\ &= 1 \end{aligned}$$

Signal im Zeitbereich

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

[1] Der Gleichanteil (Anteil mit Frequenz $f = 0$) muss 0 sein.
[2] Realteil ist symmetrisch zur $y$-Achse (gerade)
Imaginärteil ist punktsymmetrisch zum Ursprung (ungerade)

$$x[0] = c_0 + c_1 + c_2 + c_3$$
$$= 0 + 1 + 2 + 1$$
$$= 4$$

$$x[1] = c_1 \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 1\cdot 1} + c_2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 1} + c_3 \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 3\cdot 1}$$
$$= e^{j\frac{\pi}{2}} + 2 \cdot e^{j\pi} + e^{j\frac{3\pi}{2}}$$
$$= 0 - 2 + 0$$
$$= -2$$

$$x[2] = c_1 \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 1\cdot 2} + c_2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 2} + c_3 \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 3\cdot 2}$$
$$= e^{j\pi} + 2 \cdot e^{j2\pi} + e^{j3\pi}$$
$$= -1 + 2 - 1$$
$$= 0$$

$$x[3] = c_1 \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 1\cdot 3} + c_2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 3} + c_3 \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}\cdot 3\cdot 3}$$
$$= e^{j\frac{3\pi}{2}} + 2 \cdot e^{j3\pi} + e^{j\frac{9\pi}{2}}$$
$$= 0 - 2 + 0$$
$$= -2$$

**Aufgabe 2.1:**

**Beweisen Sie für jedes der durch Eingangs-/Ausgangsbeziehungen gegebenen Systeme die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Systemeigenschaften *Linearität, Zeitinvarianz, Kausalität* und *Stabilität*. Wo es möglich ist, geben Sie die Impulsantwort $\boldsymbol{h[n]}$ des Systems an.**

$$\boldsymbol{x} \ldots \text{Eingangssignal}$$
$$\boldsymbol{y} \ldots \text{Ausgangssignal}$$

**Linearität**

$$\boldsymbol{x[n] = a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]}$$
$$\downarrow$$
$$\boldsymbol{y[n] = a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[n]}$$

**Zeitinvarianz:**

$$\boldsymbol{x[n + n_0] \to y[n + n_0]}$$

**Kausalität**

$$\boldsymbol{y[n] = \cdots + x[n + k] \cdot \ldots, \qquad k \leq 0}$$

**BIBO-Stabilität**

$$\boldsymbol{(\ |x[n]| < M < \infty\ )}$$
$$\boldsymbol{|y[n]| < C \cdot M < \infty}$$

**Impulsantwort**

$$\boldsymbol{x[n] \to \delta[n]}$$

**a)** $\boldsymbol{y[n] = x[n] - x[n-1]}$

Linearität

$$x[n] = a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]$$
$$\downarrow$$
$$y[n] = (a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]) - (a \cdot x_1[n-1] + b \cdot x_2[n-1])$$
$$= a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n] - a \cdot x_1[n-1] - b \cdot x_2[n-1]$$
$$= a \cdot (x_1[n] - x_1[n-1]) + b \cdot (x_2[n] - x_2[n-1])$$
$$= a \cdot y_1 + b \cdot y_2$$
$$\to \text{linear}$$

Zeitinvarianz

$$x[n+n_0]-x[n-1+n_0]$$
$$=x[(n+n_0)]-x[(n+n_0)-1]$$
$$=y[n+n_0]$$
$$\rightarrow \text{zeitinvariant}$$

Kausalität

$$y[n]=x[n]-x[n-1]$$
$$\rightarrow \text{kausal}$$

BIBO-Stabilität

$$|x[n]|<M<\infty$$
$$|y[n]|<C\cdot M<\infty$$
$$---$$
$$y[n]=x[n]-x[n-1]$$
$$y[n]<M+M$$
$$y[n]<2\cdot M$$
$$\rightarrow \text{BIBO-stabil}$$

Impulsantwort

$$h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

**b)** $\boldsymbol{y[n] = x[n] \cdot x[n-1]}$

Linearität

$$x[n] = a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]$$

$$\downarrow$$

$$y[n] = x[n] \cdot x[n-1]$$

$$= (a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]) \cdot (a \cdot x_1[n-1] + b \cdot x_2[n-1])$$

$$\rightarrow \text{nicht linear}$$

Zeitinvarianz

$$x[n + n_0] \cdot x[n - 1 + n_0]$$

$$= x[(n + n_0)] \cdot x[(n + n_0) - 1]$$

$$= y[n + n_0]$$

$$\rightarrow \text{zeitinvariant}$$

Kausalität

$$y[n] = x[n] \cdot x[n-1]$$

$$\rightarrow \text{kausal}$$

BIBO-Stabilität

$$|x[n]| < M < \infty$$

$$|y[n]| < C \cdot M < \infty$$

$$---$$

$$y[n] = x[n] \cdot x[n-1]$$

$$y[n] < M^2$$

$$\rightarrow \text{BIBO-stabil}$$

**c)** $\boldsymbol{y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k]}$

Linearität

$$x[n] = a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]$$

$$\downarrow$$

$$y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]$$

$$= \sum_{k=n-2}^{n+4} a \cdot x_1[n] + \sum_{k=n-2}^{n+4} b \cdot x_2[n]$$

$$= a \cdot y_1 + b \cdot y_2$$

$$\rightarrow \text{linear}$$

Zeitinvarianz

$$\sum_{k=n-2}^{n+4} x[k + n_0]$$

$$= \sum_{k=n-2+n_0}^{n+4+n_0} x[k]$$

$$= \sum_{k=(n+n_0)-2}^{(n+n_0)+4} x[k]$$

$$y[n + n_0]$$

$$\rightarrow \text{zeitinvariant}$$

Kausalität

$$y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k]$$

$$= x[n-2] + x[n-1] + x[n] + x[n+1] + x[n+2] + x[n+3] + x[n+4]$$

$$\rightarrow \text{akausal}$$

BIBO-Stabilität

$$|x[n]| < M < \infty$$

$$|y[n]| < C \cdot M < \infty$$

$$---$$

$$y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k]$$

$$y[n] < 7 \cdot M$$

$$\rightarrow \text{BIBO-stabil}$$

Impulsantwort

$$y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k]$$

$$h[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} \delta[k]$$

$$= \delta[n-2] + \delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1] + \delta[n+2] + \delta[n+3] + \delta[n+4]$$

$$= \sigma[n+4] - \sigma[n-2]$$

**d)** $\boldsymbol{y[n] = x[n] + x[-n]}$

Linearität

$$x[n] = a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]$$

$$\downarrow$$

$$y[n] = (a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]) + (a \cdot x_1[-n] + b \cdot x_2[-n])$$

$$= a \cdot (x_1[n] + x_1[-n]) + b \cdot (x_2[n] + x_2[-n])$$

$$= a \cdot y_1 + b \cdot y_2$$

$$\rightarrow \text{linear}$$

Zeitinvarianz

$$x[n+n_0] + x[-n+n_0]$$

$$\neq y[n+n_0] = x[n+n_0] + x[-(n+n_0)]$$

$$\rightarrow \text{zeitvariant}$$

Kausalität

$$y[n] = x[n] + x[-n]$$

$y[5] = x[5] + x[-5]$ ← in Ordnung

$y[-5] = x[-5] + x[5]$ ← von Zukunft anhängig

$$\rightarrow \text{akausal}$$

BIBO-Stabilität

$$|x[n]| < M < \infty$$
$$|y[n]| < C \cdot M < \infty$$
$$---$$
$$y[n] = x[n] + x[-n]$$
$$y[n] < 2 \cdot M$$
$$\rightarrow \text{BIBO-stabil}$$

**e)** $\boldsymbol{y[n] = x[2n]}$

Linearität

$$x[n] = a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]$$
$$\downarrow$$
$$y[n] = a \cdot x_1[2n] + b \cdot x_2[2n]$$
$$= a \cdot y_1 + b \cdot y_2$$
$$\rightarrow \text{linear}$$

Zeitinvarianz

$$x[2n + n_0]$$
$$\neq y[n + n_0] = x[2 \cdot (n + n_0)]$$
$$\rightarrow \text{zeitvariant}$$

Kausalität

$$y[n] = x[2n]$$
$$y[5] = x[10]$$
$$\rightarrow \text{akausal}$$

BIBO-Stabilität

$$|x[n]| < M < \infty$$
$$|y[n]| < C \cdot M < \infty$$
$$---$$

$$y[n] = x[2n]$$
$$y[n] < M$$
$$\rightarrow \text{BIBO-stabil}$$

**f)** $\boldsymbol{y[n] = \frac{1}{n+0.5} \cdot x[n]}$

Linearität

$$x[n] = a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]$$
$$\downarrow$$
$$y[n] = \frac{1}{n+0.5} \cdot (a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n])$$
$$= \frac{a}{n+0.5} \cdot x_1[n] + \frac{b}{n+0.5} \cdot x_2[n]$$
$$= a \cdot y_1 + b \cdot y_2$$
$$\rightarrow \text{linear}$$

Zeitinvarianz

$$\frac{1}{n+0.5} \cdot x[n+n_0]$$
$$\neq y[n+n_0] = \frac{1}{(n+n_0)+0.5} \cdot x[n+n_0]$$
$$\rightarrow \text{zeitvariant}$$

Kausalität

$$y[n] = \frac{1}{n+0.5} \cdot x[n]$$
$$\rightarrow \text{kausal}$$

BIBO-Stabilität

$$|x[n]| < M < \infty$$
$$|y[n]| < C \cdot M < \infty$$
$$---$$

$$y[n] = \frac{1}{n + 0.5} \cdot x[n]$$

$$y[n] < \frac{1}{0.5} \cdot M$$

$$y[n] < 2 \cdot M$$

$$\rightarrow \text{BIBO-stabil}$$

**g) $\boldsymbol{y[n] = x[n-1] + x[n] - x[n+1]}$**

Linearität

$$x[n] = a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]$$

$$\downarrow$$

$$y[n] = (a \cdot x_1[n-1] + b \cdot x_2[n-1]) + (a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]) - (a \cdot x_1[n+1] + b \cdot x_2[n+1])$$

$$= a \cdot (x_1[n-1] + x_1[n] - x_1[n+1]) + b \cdot (x_2[n-1] + x_2[n] - x_2[n+1])$$

$$= a \cdot y_1 + b \cdot y_2$$

$$\rightarrow \text{linear}$$

Zeitinvarianz

$$x[n - 1 + n_0] + x[n + n_0] - x[n + 1 + n_0]$$

$$x[(n + n_0) - 1] + x[(n + n_0)] - x[(n + n_0) + 1]$$

$$= y[n + n_0]$$

$$\rightarrow \text{zeitinvariant}$$

Kausalität

$$y[n] = x[n-1] + x[n] - x[n+1]$$

$$\rightarrow \text{akausal}$$

BIBO-Stabilität

$$y[n] = x[n-1] + x[n] - x[n+1]$$

$$y[n] < 3 \cdot M$$

$$\rightarrow \text{BIBO-stabil}$$

Impulsantwort

$$h[n] = \delta[n-1] + \delta[n] - \delta[n+1]$$

**Aufgabe 2.2:**

**Ein lineares, zeitinvariantes LTI-System habe die Impulsantwort $\boldsymbol{h[n] = \alpha^n \cdot \sigma[n]}$. Berechnen Sie die Systemantworten $\boldsymbol{y[n]}$ auf folgende Eingangssignale:**

$$\boldsymbol{y[n] = (x * h)[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]}$$

**a)** $\boldsymbol{x[n] = \sigma[n]}$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \cdot \sigma[k] \cdot \sigma[n-k]$$

$$= \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} \alpha^k$$

$$\downarrow$$

Geometrische Summenformel

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

$$\downarrow$$

$$= \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \cdot \sigma[n]$$

**b)** $\boldsymbol{x[n] = \sigma[-n], \ |\alpha| < 1}$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \cdot \sigma[k] \cdot \sigma[k-n]$$

$$n \leq 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$$

$$\downarrow$$

Geometrische Summenformel

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

$$\downarrow$$

$$= \frac{1-\alpha^{\infty}}{1-\alpha}$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\boldsymbol{n > 0}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot \sigma[k-n]$$
$$= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k \cdot \sigma[k-n]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^k \cdot \sigma[k-n]) - \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha^k \cdot \sigma[k-n])$$

↓

Geometrische Summenformel

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

↓

$$= \frac{1-\alpha^{\infty}}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$
$$= \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

$$y[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & n \leq 0 \\ \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} & n > 0 \end{cases}$$

**c)** $\boldsymbol{x[n] = \sigma[n] + \sigma[-n+N] - 1}$

$$x[n] = \sigma[n] + \sigma[-n+N] - 1$$
$$= \sigma[n] - \sigma[n-(N+1)]$$
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha^k \cdot \sigma[k] \cdot \sigma[n-k]) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha^k \cdot \sigma[k] \cdot \sigma[n-k-(N+1)])$$

↓ vgl. a)

$$= \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \cdot \sigma[n] - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot \sigma[n-k-(N+1)]$$

$$= \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \cdot \sigma[n] - \sigma[n-(N+1)] \cdot \sum_{k=0}^{n-(N+1)} \alpha^k$$

$$\downarrow$$

Geometrische Summenformel

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

$$\downarrow$$

$$= \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \cdot \sigma[n] - \frac{1-\alpha^{n-(N+1)+1}}{1-\alpha} \cdot \sigma[n-(N+1)]$$

$$= \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \cdot \sigma[n] - \frac{1-\alpha^{n-N}}{1-\alpha} \cdot \sigma[n-N-1]$$

**d)** $\boldsymbol{x[n] = \sigma[n+N] \cdot \sigma[-n+N]}$

$$x[n] = \sigma[n+N] \cdot \sigma[-n+N]$$

$$= \sigma[n+N] - \sigma[n-(N+1)]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha^k \cdot \sigma[k] \cdot \sigma[n-k+N]) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha^k \cdot \sigma[k] \cdot \sigma[n-k-(N+1)])$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^k \cdot \sigma[n-k+N]) - \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^k \cdot \sigma[n-k-(N+1)])$$

$$= \sigma[n+N] \cdot \sum_{k=0}^{n+N} (\alpha^k) - \sigma[n-(N+1)] \cdot \sum_{k=0}^{n-(N+1)} (\alpha^k)$$

$$\downarrow$$

Geometrische Summenformel

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

$$\downarrow$$

$$= \frac{1-\alpha^{n+N+1}}{1-\alpha} \cdot \sigma[n+N] - \frac{1-\alpha^{n-N}}{1-\alpha} \cdot \sigma[n-N-1]$$

e) $\boldsymbol{x[n] = \beta^n \cdot \sigma[n]}$, **auch für** $\boldsymbol{\beta = \alpha,\ |\alpha| < 1, |\beta| < 1}$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \cdot \sigma[k] \cdot \beta^{n-k} \cdot \sigma[n-k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot \beta^{n-k} \cdot \sigma[n-k]$$

$$= \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \cdot \beta^{n-k}$$

$$= \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \cdot \beta^n \cdot \beta^{-k}$$

$$= \sigma[n] \cdot \beta^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

$$\downarrow$$

Geometrische Summenformel

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

$$\downarrow$$

$$= \sigma[n] \cdot \beta^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}$$

$$= \frac{\beta^n - \frac{\alpha^{n+1}}{\beta}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}} \cdot \sigma[n]$$

$$= \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} \cdot \sigma[n]$$

$$\alpha = \beta$$

$$y[n] = \lim_{\alpha \to \beta} \left(\frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}\right) \cdot \sigma[n]$$

$$\downarrow l'hospital$$

$$= \lim_{\alpha \to \beta} \left(\frac{-(n+1) \cdot \alpha^n}{-1}\right) \cdot \sigma[n]$$

$$= (n+1) \cdot \alpha^n \cdot \sigma[n]$$