12. Übung

Aufgabe 6.1:

Mit dem aperiodischen Signal $x[n]$, dessen Fouriertransformation $X(e^{j\theta})$ ist, wird gemäß

$$\boldsymbol{y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+mN]}$$

das N-periodische Signal $y[n]$ gebildet. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten c_k der Fourierreihendarstellung von $y[n]$ gegeben sind durch

$$\boldsymbol{c_k = \frac{1}{N} \cdot X\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right), \qquad k = 0, \dots, N-1}$$

Wie hängen diese Koeffizienten c_k mit der N-Punkte DFT zusammen?

Formelsammlung

$$x[n] = x[n+N] = \sum_{n=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \leftrightarrow c_k = c_{k+N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\theta n}, \qquad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (x[n+mN]) \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(x[n+mN] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot(n+mN)} \cdot e^{j2\pi km} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(x[n+mN] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot(n+mN)} \cdot 1 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(x[n+mN] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot(n+mN)} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(x[l] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}l} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot X\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)$$

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = N \cdot c_k$$

Aufgabe 6.2:

Berechnen Sie die N-Punkte DFT $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ für die folgenden N-Punkte Signale:

a) $x[n] = \delta[n-5],\ n = 0 \dots 9,\ N = 10$

Formelsammlung

$$x[(n-N_0)_N] \cdot \mathcal{R}_N[n] \leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0} \cdot X[k]$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$X[k] = e^{-j\frac{2\pi k}{10}\cdot 5}$$

$$= e^{-j\pi k}$$

$$= (-1)^k$$

b) $x[n] = \delta[n+5],\ n = -9 \dots 0,\ N = 10$

Formelsammlung

$$x[(n-N_0)_N] \cdot \mathcal{R}_N[n] \leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0} \cdot X[k]$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$X[k] = e^{j\frac{2\pi k}{10}\cdot 5}$$

$$= e^{j\pi k}$$

$$= (-1)^k$$

c) $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}n},\ n = 0 \dots 19,\ N = 20$

Formelsammlung

$$e^{j\frac{2\pi m}{N}n} \leftrightarrow N \cdot \delta[k-m]$$

$$m = 2$$

$$X[k] = 20 \cdot \delta[k-2]$$

d) $\boldsymbol{x[n] = \sigma[n] - \sigma[n-5],\ n = 0 \dots 9,\ N = 10}$

Formelsammlung

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N_1 \\ 1 & N - N_1 \le n \le N-1 \\ 0 & sonst \end{cases} \leftrightarrow X[k] = \frac{\sin\left((2N_1+1)\cdot\frac{\pi k}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}$$

$$x[n-N_0] \leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0} \cdot X[k]$$

Symmetrisch zu $n = 0$ verschieben

$$x[n+2] = \sigma[n+2] - \sigma[n-3]$$

$$N = 10, \qquad N_1 = 2$$

$$(N - N_1 \to n = 8 \to n = -2), \qquad (N - 1 \to n = 9 \to n = -1)$$

$$X[k] = e^{-j\frac{2\pi k}{10}\cdot 2} \cdot \frac{\sin\left((2\cdot 2+1)\cdot\frac{\pi k}{10}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{10}\right)}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi k}{5}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{10}\right)}$$

e) $\boldsymbol{x[n] = \alpha^{|n|},\ n = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2} - 1,\ |\alpha| < 1,\ N\ gerade}$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \alpha^{|n|} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= -1 + \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{0} \alpha^{-n} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \alpha^{n} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= -1 + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} \left(\frac{\alpha}{e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}\right)^n + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\alpha \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^n$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

$$= -1 + \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}\right)^{\frac{N}{2}+1}}{1 - \frac{\alpha}{e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}} + \frac{1 - \left(\alpha \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^{\frac{N}{2}}}{1 - \alpha \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= -1 + \frac{1 - \frac{\alpha^{\frac{N}{2}+1}}{e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot\left(\frac{N}{2}+1\right)}}}{1 - \frac{\alpha}{e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}} + \frac{1 - \alpha^{\frac{N}{2}} \cdot e^{-j\pi k}}{1 - \alpha \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= -1 + \frac{1 - \frac{\alpha^{\frac{N}{2}+1}}{(-1)^k \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}}{1 - \frac{\alpha}{e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}} + \frac{1 - \alpha^{\frac{N}{2}} \cdot (-1)^k}{1 - \alpha \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= -1 + \frac{1 - \alpha^{\frac{N}{2}+1} \cdot (-1)^k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k}}{1 - \alpha \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k}} + \frac{1 - \alpha^{\frac{N}{2}} \cdot (-1)^k}{1 - \alpha \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= \frac{1 - \alpha^{\frac{N}{2}+1} \cdot (-1)^k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k} - 1 + \alpha \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k}}{1 - \alpha \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k}} + \frac{1 - \alpha^{\frac{N}{2}} \cdot (-1)^k}{1 - \alpha \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= \alpha \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N}} \cdot \frac{1 - \alpha^{\frac{N}{2}} \cdot (-1)^k}{1 - \alpha \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k}} + \frac{1 - \alpha^{\frac{N}{2}} \cdot (-1)^k}{1 - \alpha \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

Aufgabe 6.3:

$X[k]$ sei die N-Punkte DFT des N-Punkte Signals $x[n]$. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

a) **Aus $x[n] = -x[N-1-n]$ folgt $X[0] = 0$.**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] = -\sum_{n=0}^{N-1} x[N-1-n]$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = -\sum_{n=N-1}^{0} x[N-1-n]$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = -\sum_{n=-N+1}^{0} x[N-1+n]$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = -\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$0 = -0$$

b) **Ist N gerade und $x[n] = x[N-1-n]$, dann ist $X\left[\frac{N}{2}\right] = 0$.**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$X\left[\frac{N}{2}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}n\frac{N}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot (-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot (-1)^n = -\sum_{n=0}^{N-1} x[N-1-n] \cdot (-1)^n$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot (-1)^n = -\sum_{n=N-1}^{0} x[N-1-n] \cdot (-1)^n$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot (-1)^n = -\sum_{n=-N+1}^{0} x[N-1+n] \cdot (-1)^n$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot (-1)^n = -\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot (-1)^n$$

$$0 = -0$$

c) $\sum_{n=0}^{N-1}|\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]|^2 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1}|\boldsymbol{X}[\boldsymbol{k}]|^2$

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot X^*[k]$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \cdot x^*[l] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}lk} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \left(|x[n]|^2 \cdot \sum_{l=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k\cdot(l-n)} \right) \right)$$

$$\downarrow^{1}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

Aufgabe 6.7:

In dieser Aufgabe sollen Sie eine effiziente Methode zur Anwendung der DFT auf reellwertige Signale untersuchen. Standardprogramme zur Berechnung der DFT sind in der Regel so organisiert, dass ein komplexwertiges N-Punkte Signal in das zugehörige komplexwertige N-Punkte Spektrum transformiert wird. Durch die Ausrichtung auf komplexwertige Signale ist die Transformation reellwertiger Signale ineffizient. Wegen der Symmetrieeigenschaften der DFT für reellwertige Signale genügt die Berechnung von $\frac{N}{2}$ Frequenzpunkten (N ganzzahlig). Daher ist auch nur eine $\frac{N}{2}$-Punkte DFT notwendig, wobei jedoch das reellwertige N-Punkte Signal $x[n]$ in ein komplexwertiges $\frac{N}{2}$-Punkte Signal $x_c[n]$ gepackt werden muss. Das kann beispielsweise durch die folgende Aufspaltung des gegebenen reellwertigen Signals $x[n]$ geschehen:

$$\boldsymbol{x_1[n] = x[2n], \qquad n = 0 \ldots \frac{N}{2} - 1}$$

$$\boldsymbol{x_2[n] = x[2n+1], \qquad n = 0 \ldots \frac{N}{2} - 1}$$

$$\boldsymbol{x_c[n] = x_1[n] + j \cdot x_2[n], \qquad n = 0 \ldots \frac{N}{2} - 1}$$

[1] Summe nur $\neq 0$, wenn $l = n$ – sonst 0

a) Berechnen Sie die N-Punkte DFT $X[k]$ des reellwertigen Signals $x[n]$ aus der $\frac{N}{2}$-Punkte DFT $X_c[k]$ des komplexwertigen Signals $x_c[n]$. Geben Sie die Symmetrieeigenschaften von $X[k]$ an. Wie kann der spezielle Wert $X\left[\frac{N}{2}\right]$ berechnet werden?

Formelsammlung

$$\Re e\{x[n]\} \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left[X[k] + X^*[-k]\right]$$

$$j \cdot \Im m\{x[n]\} \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left[X[k] - X^*[-k]\right]$$

$$x[n - N_0] \leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0} \cdot X[k]$$

Symmetrien

$$\Re e\{X[k]\} = gerade$$

$$\Im m\{X[k]\} = ungerade$$

$$X[k] = X^*[N-k], \qquad k = \frac{N}{2} \dots N-1$$

$$x_c[n] = x_1[n] + j \cdot x_2[n] = x[2n] + j \cdot x[2n+1]$$

$$X_1[k] = \Re e\{x[n]\} = \frac{1}{2} \cdot \left[X_c[k] + X_c^*[-k]\right], \qquad k = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

$$X_2[k] = \Im m\{x[n]\} \leftrightarrow \frac{1}{2j} \cdot \left[X_c[k] - X_c^*[-k]\right], \qquad k = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} x[2n-1] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot(2n-1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk}$$

$$= X_1[k] + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \cdot X_2[k]$$

$$X\left[\frac{N}{2}\right] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}2n\frac{N}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n-1] \cdot e^{-j\frac{2\pi N}{N\,2}\cdot(2n-1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] \cdot e^{-j2\pi n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n-1] \cdot e^{-j2\pi n} \cdot e^{j\pi}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] \cdot e^{-j2\pi n} - \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n-1]$$

b) **Für die Berechnung einer (komplexwertigen) N-Punkte DFT seien näherungsweise $N \cdot \log_2(N)$ Arithmetikoperationen notwendig. Wie viele Operationen benötigt dann die hier untersuchte Methode? Welcher Geschwindigkeitsteigerungsfaktor ergibt sich daraus für $N = 1024 = 2^{10}$?**

$$A = \frac{N}{2} \cdot \log_2\left(\frac{N}{2}\right)$$

$$= \frac{N}{2} \cdot (\log_2(N) - \log_2(2))$$

$$= \frac{N}{2} \cdot (\log_2(N) - 1)$$

$$G = \frac{N \cdot \log_2(N)}{\frac{N}{2} \cdot (\log_2(N) - 1)}$$

$$= \frac{2^{10} \cdot \log_2(2^{10})}{\frac{2^{10}}{2} \cdot (\log_2(2^{10}) - 1)}$$

$$= \frac{20}{9}$$

Aufgabe 6.9:

Gegeben ist ein (zeitdiskretes) Signal $x[n] = \delta[n] - \delta[n-3]$.

a) **Berechnen Sie die Fouriertransformation $X(e^{j\theta})$ des zeitdiskreten Signals.**

Formelsammlung

$$\delta[n - N_0] \leftrightarrow e^{-j\theta N_0}$$

$$X(e^{j\theta}) = 1 - e^{-j3\theta}$$

b) Tasten Sie nun dieses kontinuierliche Spektrum ab $X[k] = X(e^{j\theta})|_{\theta=\frac{2\pi}{N}k}$ für $N = 4$.

$$X[k] = X\left(e^{j\frac{\pi}{2}k}\right)$$
$$= 1 - e^{-j\frac{3\pi}{2}k}$$

c) Setzten Sie $x[n]$ periodisch fort, sodass ein periodisches Signal mit Periode 4 entsteht (s. Glg. 7.6 im Skriptum). Berechnen Sie von diesem die Fourierkoeffizienten.

Formelsammlung

$$\tilde{x}[n] = x[n \,\%\, N], \qquad \forall n$$
$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$c_k = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{3} \tilde{x}[n] \cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}n}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{3} (\delta[n] - \delta[n-3]) \cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}n}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(1 - e^{-j\frac{3\pi}{2}k}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot X[k]$$

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $X[k]$ und den c_k?

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot X[k]$$

e) Führen Sie nun die Abtastung von $X(e^{j\theta})$ mit einem anderen Wert für N durch und verwenden Sie den gleichen Wert von N für die periodische Fortsetzung von $x[n]$ und die Berechnung der Fourierreihenkoeffizienten.

Rechnungen bleiben gleich – nur N ersetzen.