Institute of Telecommunications
Technische Universität Wien
G. Doblinger, N. Goertz 1-2016

1 Fourierreihen zeitkontinuierlicher period. Signale

$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$	$\Longleftrightarrow$	$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-j\frac{2\pi k}{T}t}\, dt$
$x(t-T_0)$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-j\frac{2\pi k}{T}T_0} c_k$
$e^{j\frac{2\pi m}{T}t} x(t)$	$\Longleftrightarrow$	c_{k-m}
$x^*(t)$	$\Longleftrightarrow$	c^*_{-k}
$x(-t)$	$\Longleftrightarrow$	c_{-k}
$x(at), \quad a > 0$	$\Longleftrightarrow$	$c_k, \quad$ Periode $\frac{T}{a}$
$\int_0^T x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau$	$\Longleftrightarrow$	$T c_k d_k, \quad x,\, y$ gleiche Periode
$x(t)y(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \, d_{k-l}, \quad x,\, y$ gleiche Periode
$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	$\Longleftrightarrow$	$\Re e\{c_k\}$
$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	$\Longleftrightarrow$	$j\Im m\{c_k\}$
$\Re e\{x(t)\}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}(c_k + c^*_{-k})$
$j\Im m\{x(t)\}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}(c_k - c^*_{-k})$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$\Longleftrightarrow$	$j\frac{2\pi k}{T}\, c_k$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$ mit $c_0 = 0$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{T}{j2\pi k} c_k$

Einige Fourierreihen[1]

$e^{j\frac{2\pi}{T}t}$	$\Longleftrightarrow$	$\delta[k-1]$
$\cos\frac{2\pi}{T}t$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+1]$
$\sin\frac{2\pi}{T}t$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2j}\delta[k-1] - \frac{1}{2j}\delta[k+1]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{T} \quad \forall k$
$x(t) = \begin{cases} 1 & \lvert t\rvert \le T_1 \\ 0 & T_1 < \lvert t\rvert \le \frac{T}{2} \end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\sin\frac{2\pi k}{T}T_1}{k\pi}$
$\left\lvert\cos\frac{2\pi}{T}t\right\rvert \quad$ (Periode $\frac{T}{2}$)	$\Longleftrightarrow$	$\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{1-(2k)^2}$

[1] $\delta(t)$ ist die Diracsche Deltafunktion, $\delta[k]$ ist der Einsimpuls.

2 Fouriertransformation zeitkontinuierlicher Signale

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$	$\Longleftrightarrow$	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$
$x(t-T_0)$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-j\omega T_0} X(j\omega)$
$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$\Longleftrightarrow$	$X(j(\omega-\omega_0))$
$x^*(t)$	$\Longleftrightarrow$	$X^*(-j\omega)$
$x(-t)$	$\Longleftrightarrow$	$X(-j\omega)$
$x(at)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
$(x*y)(t)$	$\Longleftrightarrow$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
$x(t)y(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi}(X*Y)(j\omega)$
$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	$\Longleftrightarrow$	$\Re e\{X(j\omega)\}$
$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	$\Longleftrightarrow$	$j\Im m\{X(j\omega)\}$
$\Re e\{x(t)\}$	$\Longleftrightarrow$	$X_e(j\omega) = \frac{1}{2}(X(j\omega) + X^*(-j\omega))$
$j\Im m\{x(t)\}$	$\Longleftrightarrow$	$X_o(j\omega) = \frac{1}{2}(X(j\omega) - X^*(-j\omega))$
$tx(t)$	$\Longleftrightarrow$	$j\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$\Longleftrightarrow$	$(j\omega)^n X(j\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

Einige Fouriertransformationspaare

$\delta(t-T_0)$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-j\omega T_0}$
$e^{j\omega_0 t}$	$\Longleftrightarrow$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\Longleftrightarrow$	$\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$
$\sin\omega_0 t$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$	$\Longleftrightarrow$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$
$\sigma(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{-at}\sigma(t), \quad \Re e\{a\} > 0$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-at}\sigma(t), \quad \Re e\{a\} > 0$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$

Einige Fouriertransformationspaare (Fortsetzung)

$e^{-a\|t\|}, \quad \Re e\{a\} > 0$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\dfrac{\sin \omega_c t}{\pi t}$	$\Longleftrightarrow$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & \|\omega\| < \omega_c \\ 0 & \|\omega\| > \omega_c \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} 1 & \|t\| \leq T_1 \\ 0 & \|t\| > T_1 \end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$2\dfrac{\sin \omega T_1}{\omega}$
$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\|t\|}{T_1} & \|t\| \leq T_1 \\ 0 & \|t\| > T_1 \end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$4\dfrac{\sin^2 \frac{\omega T_1}{2}}{T_1 \omega^2}$
$e^{-at^2}, \quad a > 0$	$\Longleftrightarrow$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\dfrac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	$\Longleftrightarrow$	$(j\omega)^n$
t^n	$\Longleftrightarrow$	$2\pi j^n \dfrac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$
$\|t\|$	$\Longleftrightarrow$	$-\dfrac{2}{\omega^2}$

Dualität der Fouriertransformation

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \Longleftrightarrow & X(j\omega) \\ X(jt) & \Longleftrightarrow & 2\pi x(-\omega) \end{array}$$

Parsevalsche Beziehung für aperiodische Signale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Parsevalsche Beziehung für periodische Signale:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Poissonsche Summenformel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

3 Fourierreihen zeitdiskreter periodischer Signale

$x[n] = x[n+N] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$	$\Longleftrightarrow$	$c_k = c_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$
$x[n-N_0]$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0}\, c_k$
$e^{j\frac{2\pi m}{N}n}\, x[n]$	$\Longleftrightarrow$	c_{k-m}
$x^*[n]$	$\Longleftrightarrow$	c^*_{-k}
$x[-n]$	$\Longleftrightarrow$	c_{-k}
$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n-m]$	$\Longleftrightarrow$	Nc_kd_k, x, y gleiche Periode
$x[n]y[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\sum_{l=0}^{N-1} c_l\, d_{k-l}$, x, y gleiche Periode
$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$\Longleftrightarrow$	$\Re e\{c_k\}$
$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$\Longleftrightarrow$	$j\Im m\{c_k\}$
$\Re e\{x[n]\}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}(c_k + c^*_{-k})$
$j\Im m\{x[n]\}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}(c_k - c^*_{-k})$
$x[n] - x[n-1]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\right) c_k$
$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$ mit $c_0 = 0$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} c_k$

Einige Fourierreihen[2]

$e^{j\frac{2\pi m}{N}n}$	$\Longleftrightarrow$	$\delta[k-m]$
$\cos\frac{2\pi m}{N}n$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}\delta[k-m] + \frac{1}{2}\delta[k+m]$
$\sin\frac{2\pi m}{N}n$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2j}\delta[k-m] - \frac{1}{2j}\delta[k+m]$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-mN]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{N} \quad \forall k$
$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N_1 \\ 1 & N - N_1 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{N}\frac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\pi k}{N}\right)}{\sin\frac{\pi k}{N}}$

[2]Bei den Beziehungen ist die Periodizität von c_k mit der Periode N zu berücksichtigen.

4 Fouriertransformation zeitdiskreter Signale

$x[n] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} X(e^{j\theta})\, e^{j\theta n} d\theta$	$\Longleftrightarrow$	$X(e^{j\theta}) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\theta n}$
$x[n-N_0]$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-j\theta N_0} X(e^{j\theta})$
$e^{j\theta_0 n} x[n]$	$\Longleftrightarrow$	$X(e^{j(\theta-\theta_0)})$
$x^*[n]$	$\Longleftrightarrow$	$X^*(e^{-j\theta})$
$x[-n]$	$\Longleftrightarrow$	$X(e^{-j\theta})$
$(x * y)[n]$	$\Longleftrightarrow$	$X(e^{j\theta})Y(e^{j\theta})$
$x[n]y[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi}(X * Y)(e^{j\theta})$
$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$\Longleftrightarrow$	$\Re e\{X(e^{j\theta})\}$
$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$\Longleftrightarrow$	$j\Im m\{X(e^{j\theta})\}$
$\Re e\{x[n]\}$	$\Longleftrightarrow$	$X_e(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\theta}) + X^*(e^{-j\theta}))$
$j\Im m\{x[n]\}$	$\Longleftrightarrow$	$X_o(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\theta}) - X^*(e^{-j\theta}))$
$nx[n]$	$\Longleftrightarrow$	$j\dfrac{dX(e^{j\theta})}{d\theta}$
$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\theta}} X(e^{j\theta}) + \pi X(e^{j0})\delta_{2\pi}(\theta)$

Einige Fouriertransformationspaare[3]

$\delta[n-N_0]$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-j\theta N_0}$
$e^{j\theta_0 n}$	$\Longleftrightarrow$	$2\pi\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0)$
$\cos\theta_0 n$	$\Longleftrightarrow$	$\pi\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) + \pi\delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)$
$\sin\theta_0 n$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{j}\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) - \frac{\pi}{j}\delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)$
$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{2\pi}{N}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \dfrac{2\pi k}{N}\right)$
$\sigma[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\theta}} + \pi\delta_{2\pi}(\theta)$
$a^n\sigma[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\theta}}$
$\dfrac{\sin\alpha n}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < \pi$	$\Longleftrightarrow$	$X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \le \lvert\theta\rvert \le \alpha \\ 0 & \alpha < \lvert\theta\rvert < \pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1 & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0 & \lvert n\rvert > N_1 \end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$

[3] Bei den Beziehungen ist die 2π–Periodizität im Frequenzbereich zu berücksichtigen. $\delta_{2\pi}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi k)$.

Parsevalsche Beziehung für aperiodische zeitdiskrete Signale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| X(e^{j\theta}) \right|^2 d\theta$$

Parsevalsche Beziehung für periodische zeitdiskrete Signale:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

Mit $x[n] = x[n+N]$ und den Fourierreihenkoeffizienten $c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$.

5 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

In den Beziehungen sind $x[n]$ und $y[n]$ N-Punkte Signale, d.h. sie sind für das Intervall $n \in [0, N-1]$ definiert und besitzen daher eine endliche Länge N. Die Notation $x[(n)_N] = x[n \text{ modulo } N]$ ist die periodische Fortsetzung des N-Punkte Signals $x[n]$. Mit der Rechteckfunktion

$$\mathcal{R}_N[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{gilt} \qquad x[n] = x[(n)_N]\mathcal{R}_N[n].$$

Merkregel: In den DFT-Formeln ist ein N-Punkte Signal stets als die Grundperiode ($n \in [0, N-1]$) eines periodischen zeitdiskreten Signals zu betrachten.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \quad \Longleftrightarrow \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$x[(n-N_0)_N]\mathcal{R}_N[n] \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0}\, X[k]$$

$$e^{j\frac{2\pi m}{N}n}\, x[n] \quad \Longleftrightarrow \quad X[(k-m)_N]\mathcal{R}_N[k]$$

$$x^*[n] \quad \Longleftrightarrow \quad X^*[(-k)_N]\mathcal{R}_N[k]$$

$$x^*[(-n)_N]\mathcal{R}_N[n] \quad \Longleftrightarrow \quad X^*[k]$$

$$\left(\sum_{m=0}^{N-1} x[(m)_N]\, y[(n-m)_N] \right) \mathcal{R}_N[n] \quad \Longleftrightarrow \quad X[k]Y[k]$$

$$x[n]y[n] \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[(m)_N]Y[(k-m)_N] \right) \mathcal{R}_N[k]$$

$$\tfrac{1}{2}\left[x[(n)_N] + x^*[(-n)_N] \right] \mathcal{R}_N[n] \quad \Longleftrightarrow \quad \Re e\{X[k]\}$$

$$\tfrac{1}{2}\left[x[(n)_N] - x^*[(-n)_N] \right] \mathcal{R}_N[n] \quad \Longleftrightarrow \quad j\Im m\{X[k]\}$$

$$\Re e\{x[n]\} \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\left[X[(k)_N] + X^*[(-k)_N] \right] \mathcal{R}_N[k]$$

$$j\Im m\{x[n]\} \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\left[X[(k)_N] - X^*[(-k)_N] \right] \mathcal{R}_N[k]$$

Einige DFT Beispiele[4]

$e^{j\frac{2\pi m}{N}n}$	$\Longleftrightarrow$	$N\delta[k-m]$
$\cos\frac{2\pi m}{N}n$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{N}{2}\delta[k-m]+\frac{N}{2}\delta[k+m-N]$
$\sin\frac{2\pi m}{N}n$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{N}{2j}\delta[k-m]-\frac{N}{2j}\delta[k+m-N]$
$\delta[n]$	$\Longleftrightarrow$	1
$x[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le N_1\\ 1 & N-N_1\le n\le N-1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\pi k}{N}\right)}{\sin\frac{\pi k}{N}}$

6 $\mathcal{Z}$–Transformation

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\mathcal{C}}X(z)z^{n-1}dz \qquad \Longleftrightarrow \qquad X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

Die in der Tabelle angegebenen Bereiche sind die Konvergenzringe der zweiseitigen $\mathcal{Z}$–Transformation und können in einzelnen Fällen auch größer sein.

$x[n]$	$\Leftrightarrow$	$X(z)$	$R_{x_-}<\|z\|<R_{x_+}$
$y[n]$	$\Leftrightarrow$	$Y(z)$	$R_{y_-}<\|z\|<R_{y_+}$
$ax[n]+by[n]$	$\Leftrightarrow$	$aX(z)+bY(z)$	$\max(R_{x_-},R_{y_-})<\|z\|<\min(R_{x_+},R_{y_+})$
$x[n+n_0]$	$\Leftrightarrow$	$z^{n_0}X(z)$	$R_{x_-}<\|z\|<R_{x_+}$
$z_0^n x[n]$	$\Leftrightarrow$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$\|z_0\|R_{x_-}<\|z\|<\|z_0\|R_{x_+}$
$nx[n]$	$\Leftrightarrow$	$-z\,\frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x_-}<\|z\|<R_{x_+}$
$x^*[n]$	$\Leftrightarrow$	$X^*(z^*)$	$R_{x_-}<\|z\|<R_{x_+}$
$x[-n]$	$\Leftrightarrow$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_{x_+}}<\|z\|<\frac{1}{R_{x_-}}$
$\Re e\{x[n]\}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2}(X(z)+X^*(z^*))$	$R_{x_-}<\|z\|<R_{x_+}$
$j\Im m\{x[n]\}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2}(X(z)-X^*(z^*))$	$R_{x_-}<\|z\|<R_{x_+}$
$(x*y)[n]$	$\Leftrightarrow$	$X(z)Y(z)$	$\max(R_{x_-},R_{y_-})<\|z\|<\min(R_{x_+},R_{y_+})$
$x[n]\,y[n]$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\mathcal{C}}\frac{X(v)}{v}Y\left(\frac{z}{v}\right)\,dv$	$R_{x_-}R_{y_-}<\|z\|<R_{x_+}R_{y_+}$
$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{1-z^{-1}}\,X(z)$	$\max(R_{x_-},1)<\|z\|<R_{x_+}$

[4] In den Formeln gilt $0\le n\le N-1$, $0\le k\le N-1$ und $0\le m\le N-1$.

Zeitverschiebung für die einseitige $\mathcal{Z}$–Transformation:

$$x[n+n_0] \quad\Leftrightarrow\quad z^{n_0}\left(X(z)-\sum_{n=0}^{n_0-1}x[n]z^{-n}\right),\qquad n_0>0$$

$$x[n-n_0] \quad\Leftrightarrow\quad z^{-n_0}\left(X(z)+\sum_{n=1}^{n_0}x[-n]z^{n}\right),\qquad n_0>0$$

Residuensatz für die inverse $\mathcal{Z}$–Transformation:

Rechtsseitiges Signal ($x[n]=0$ für $n<0$):

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\mathcal{C}}X(z)z^{n-1}\,dz=\sum_{|z_k|<R_x}\mathrm{Res}_k\{X(z)z^{n-1}\}\qquad n=0,1,2,\ldots$$

Alle Residuen im Gebiet innerhalb von $\mathcal{C}$ werden aufsummiert, wobei der Radius von $\mathcal{C}$ größer als der Konvergenzradius R_x sein muß.

Linksseitiges Signal ($x[n]=0$ für $n>0$):

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\mathcal{C}'}X\left(\frac{1}{z}\right)z^{-n-1}\,dz=\sum_{|z'_k|<\frac{1}{R_x}}\mathrm{Res}_k\left\{X\left(\frac{1}{z}\right)z^{-n-1}\right\}\qquad n=0,-1,\ldots$$

Alle Residuen im Gebiet innerhalb von $\mathcal{C}'$ werden aufsummiert, wobei der Radius von $\mathcal{C}'$ größer als $\frac{1}{R_x}$ sein muß.

Achtung: Durch $z^{\pm n-1}$ kann für $n=0$ ein zusätzlicher Pol bei $z=0$ auftreten. Daher sollte bei der inversen $\mathcal{Z}$–Transformation der Fall $n=0$ getrennt behandelt werden!

Einfacher Pol $z_{\infty k}$ von $X(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$:

$$\mathrm{Res}_k\{X(z)z^{n-1}\}=\lim_{z\to z_{\infty k}}\left((z-z_{\infty k})\frac{P(z)}{Q(z)}z^{n-1}\right)$$

M–facher Pol $z_{\infty k}$ von $X(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$:

$$\mathrm{Res}_k\{X(z)z^{n-1}\}=\frac{1}{(M-1)!}\frac{d^{M-1}}{dz^{M-1}}\left((z-z_{\infty k})^M\frac{P(z)}{Q(z)}z^{n-1}\right)\Bigg|_{z\to z_{\infty k}}$$

Residuum im Unendlichen:

$$\mathrm{Res}_{z=\infty}\{X(z)z^{n-1}\}=-\mathrm{Res}_{z=0}\left\{X\left(\frac{1}{z}\right)z^{-n-1}\right\}$$

Anfangswertsatz der einseitigen $\mathcal{Z}$–Transformation:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Endwertsatz der einseitigen $\mathcal{Z}$–Transformation:

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

Eingeschaltetes periodisches Signal:

$$x[n] = x_p[n]\sigma[n] \quad \Longleftrightarrow \quad X(z) = \frac{z^N}{z^N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} x_p[n]z^{-n}\right)$$

mit $x_p[n] = x_p[n+N]$

Einige $\mathcal{Z}$–Transformationspaare

$\delta[n]$	$\Longleftrightarrow$	1	$\forall z$
$\sigma[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-\sigma[-n-1]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\alpha^n\sigma[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-\alpha^n\sigma[-n-1]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$n\sigma[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-n\sigma[-n-1]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\sin\alpha n\ \sigma[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z\sin\alpha}{z^2-2z\cos\alpha+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos\alpha n\ \sigma[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z(z-\cos\alpha)}{z^2-2z\cos\alpha+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\rho^n\sin\alpha n\ \sigma[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\rho z\sin\alpha}{z^2-2\rho z\cos\alpha+\rho^2}$	$\lvert z\rvert > \rho$
$\rho^n\cos\alpha n\ \sigma[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z(z-\rho\cos\alpha)}{z^2-2\rho z\cos\alpha+\rho^2}$	$\lvert z\rvert > \rho$
$\sin(\alpha n+\varphi)\ \sigma[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z^2\sin\varphi+z\sin(\alpha-\varphi)}{z^2-2z\cos\alpha+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\frac{1}{n},\quad n>0$	$\Longleftrightarrow$	$\log_e\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\frac{1-e^{-\alpha n}}{n}\ \sigma[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha+\log_e\frac{z-e^{-\alpha}}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1,\ \alpha>0$
$\frac{\sin\alpha n}{n}\ \sigma[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha+\arctan\left(\frac{\sin\alpha}{z-\cos\alpha}\right)$	$\lvert z\rvert > \cos\alpha$ $\alpha>0$

Normierte Form der bilinearen $\mathcal{Z}$–Transformation

Mit

$$s = \frac{1}{v}\,\frac{z-1}{z+1}, \quad v = \tan \pi \frac{f_g}{f_s}$$

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{1}{v}\,\frac{z-1}{z+1}}$$

wird ein analoges Filter mit der Übertragungsfunktion $H_a(s)$ (dabei ist $s/2\pi$ normiert auf die analoge Bezugsfrequenz f_{a_g}) in ein digitales Filter mit der Übertragungsfunktion $H(z)$ und der Bezugsfrequenz f_g übergeführt (f_s ist die Abtastfrequenz).

7 Multiratensignalverarbeitung

In den angegebenen Formeln sind der Unterabtastfaktor M und der Überabtastfaktor L ganzzahlig ($M, L \in \mathbb{N}$).

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
x[n] & \Longleftrightarrow & X(e^{j\theta}) \\
 & & X(z) \\
y[n] = x[Mn] & \Longleftrightarrow & Y(e^{j\theta}) = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j(\theta-2\pi k)/M}\right) \\
 & & Y(z) = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{-j2\pi k/M} z^{1/M}\right) \\
y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right] & n = 0, \pm L, \pm 2L \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} & \Longleftrightarrow & Y(e^{j\theta}) = X\left(e^{j\theta L}\right) \\
 & & Y(z) = X\left(z^L\right)
\end{array}}$$

Polyphasenzerlegung:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} X_k\left(z^M\right)$$

mit

$$X_k(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_k[m] z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[Mm+k] z^{-m}, \quad k = 0, 1, \ldots, M-1$$

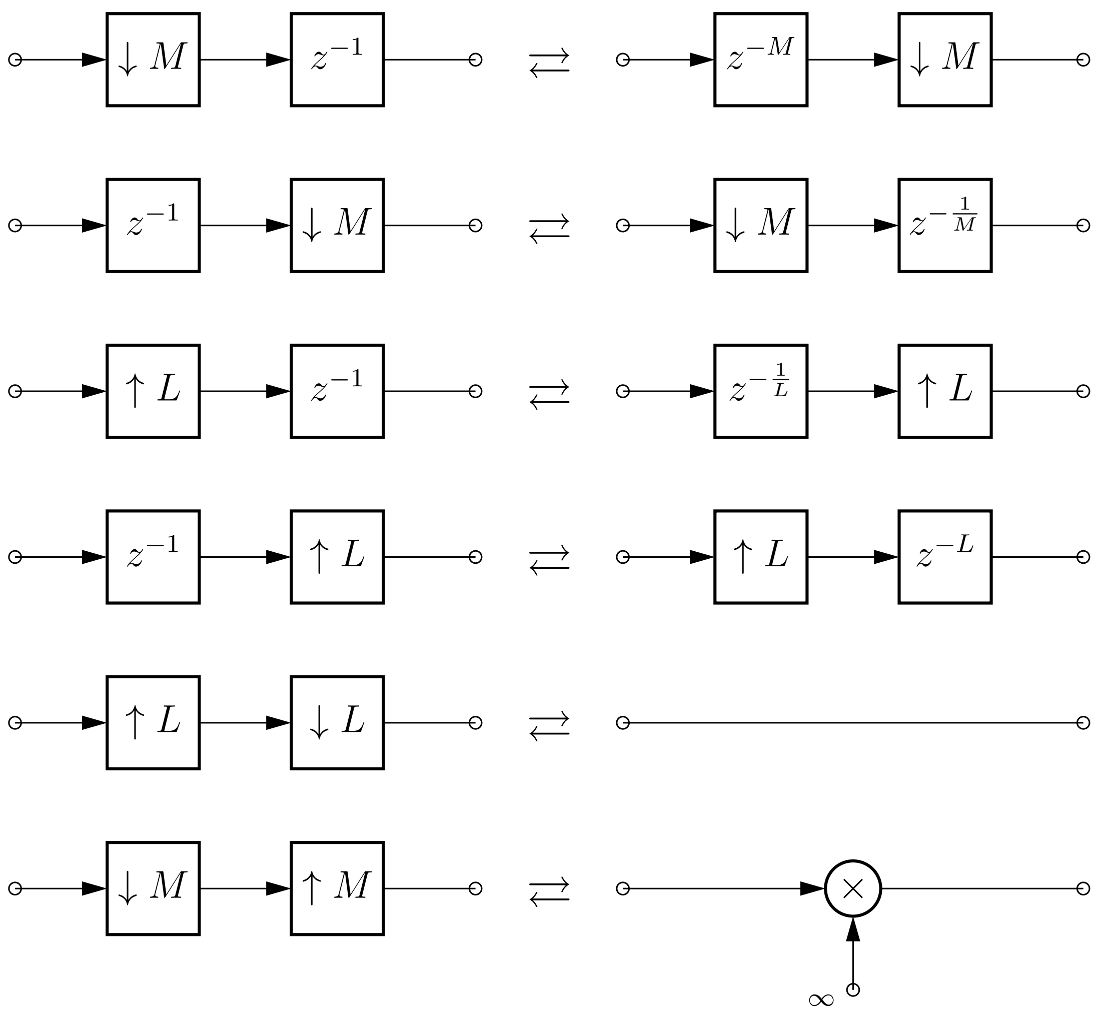
Fall $M = 2$:

$$X(z) = X_0\left(z^2\right) + z^{-1} X_1\left(z^2\right)$$

$$X_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[2m] z^{-m}$$

$$X_1(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[2m+1] z^{-m}$$

Elementare Vertauschungsoperationen



$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM]$$