6.5. Übung

Aufgabe 1.9:

Das nicht exakt bandbegrenzte analoge Signal

$$\boldsymbol{x_a(t) = \frac{t}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sigma(t)}$$

soll abgetastet (Abtastfrequenz $\boldsymbol{f_s = \frac{1}{T}}$) und nach dem Abtasttheorem wieder rekonstruiert werden.

a) **Berechnen Sie das Spektrum $\boldsymbol{X_a(j\omega)}$.**

Formelsammlung

$$t \cdot x(t) \leftrightarrow j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$e^{-at} \cdot \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$$

$$X_a(j\omega) = \frac{1}{\tau} \cdot \mathcal{F}\big(t \cdot x(t)\big)$$

$$= \frac{1}{\tau} \cdot j \cdot \frac{d\mathcal{F}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sigma(t)\right)}{d\omega}$$

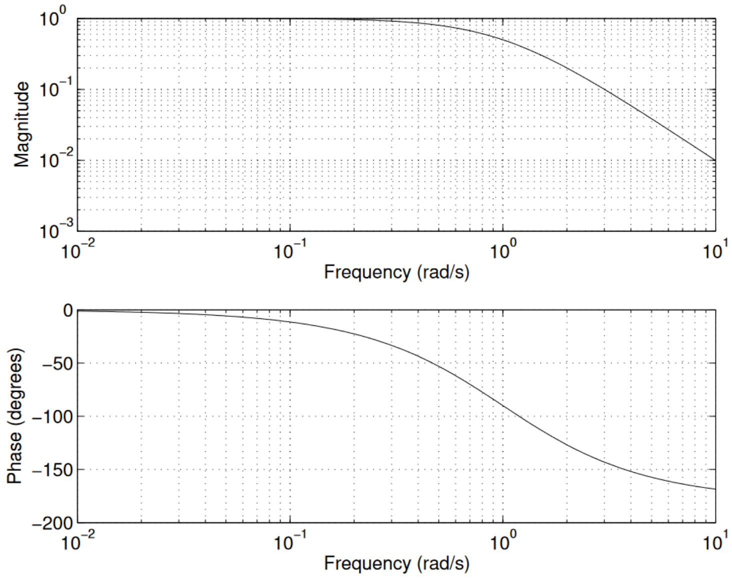
$$= \frac{1}{\tau} \cdot j \cdot \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\frac{1}{\tau} + j\omega}\right)$$

$$= j \cdot \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1 + j\omega\tau}\right)$$

$$= j \cdot \frac{-j\tau}{(1 + j\omega\tau)^2}$$

$$= \frac{\tau}{(1 + j\omega\tau)^2}$$

b) Skizzieren Sie Betrags- und Phasenverlauf von $X_a(j\omega)$.[1]



c) Berechnen Sie das Spektrum $X(e^{j\theta})$ des zeitdiskreten Signals $x[n]$, das durch den Abtastvorgang entsteht.[2]

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j \cdot \frac{\theta + 2\pi k}{T}\right)$$

$$= \frac{\tau}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + j \cdot \frac{\theta + 2\pi k}{T} \cdot \tau\right)^2}$$

d) Skizzieren Sie Betrags- und Phasenverlauf von $X(e^{j\theta})$.

Plot für: $\frac{\tau}{T} = 5,\ k = -1,0,1$

$$X'(e^{j\theta}) = 5 \cdot \left(\frac{1}{\left(1 + j \cdot 5 \cdot (\theta - 2\pi)\right)^2} + \frac{1}{(1 + j \cdot 5\theta)^2} + \frac{1}{\left(1 + j \cdot 5 \cdot (\theta + 2\pi)\right)^2}\right)$$

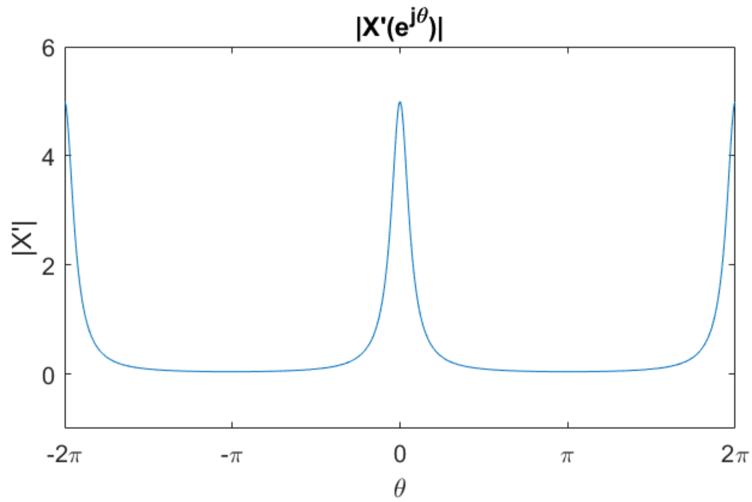
$$|X'| = \left|5 \cdot \left(\frac{1}{\left(1 + j \cdot 5 \cdot (\theta - 2\pi)\right)^2} + \frac{1}{(1 + j \cdot 5\theta)^2} + \frac{1}{\left(1 + j \cdot 5 \cdot (\theta + 2\pi)\right)^2}\right)\right|$$

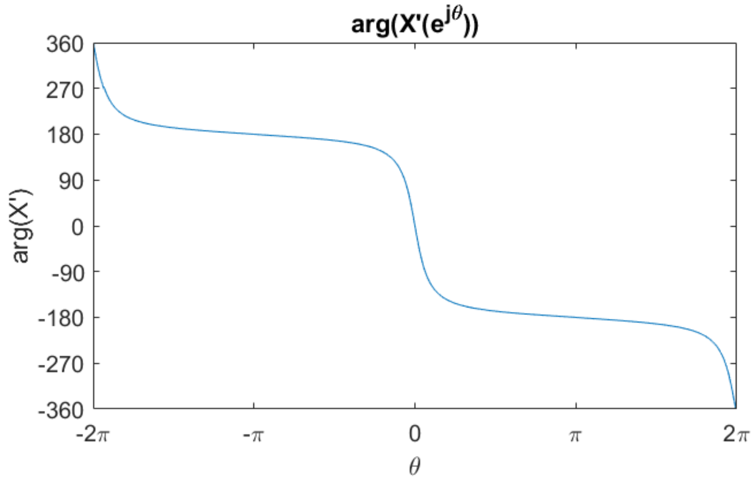
$$\arg(X') = \arg\left(5 \cdot \left(\frac{1}{\left(1 + j \cdot 5 \cdot (\theta - 2\pi)\right)^2} + \frac{1}{(1 + j \cdot 5\theta)^2} + \frac{1}{\left(1 + j \cdot 5 \cdot (\theta + 2\pi)\right)^2}\right)\right)$$

---

[1] Grafik aus Lösung übernommen ($\tau = 1$)

[2] Folien „Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale und Systeme: Anmerkungen“ S.3





e) Wie hoch muss die Abtastfrequenz f_s gewählt werden, damit der Amplitudenfehler, der durch die Rekonstruktion mit einem idealen Tiefpassfilter entsteht, nicht größer als eine gegebene Schranke ϵ wird? Das bedeutet $|x_a(t) - x_r(t)| \leq \epsilon, \ \forall t \geq 0$. Dabei ist $x_r(t)$ das aus den Abtastwerten $x[n]$ rekonstruierte bandbegrenzte Analogsignal. Bei der Berechnung des Amplitudenfehlers können Sie voraussetzen, dass sich im Spektrum $X(e^{j\theta})$ nur benachbarte Bänder überlappen, bzw. $f_s \cdot \tau \gg 1$ ist.[3]

$$X_a(j\omega) = \frac{\tau}{(1 + j\omega\tau)^2}$$

$$X_r(j\omega) = G(j\omega) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j \cdot \left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

$$(k = -1,0,1)$$

$$= rect\left(\frac{\omega}{2} \cdot \frac{T}{\pi}\right) \cdot \left(X_a\left(j \cdot \left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)\right) + X_a(j\omega) + X_a\left(j \cdot \left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right)\right)$$

[3] Mit größtem Dank an Georg Pichler!

$$|f(t)| \leq |x_a(t) - x_r(t)|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(X_a(j\omega) - X_r(j\omega)\right) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left|\left(X_a(j\omega) - X_r(j\omega)\right) \cdot e^{j\omega t}\right| d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\tau}{(1 + j\omega\tau)^2} - rect\left(\frac{\omega}{2} \cdot \frac{T}{\pi}\right) \cdot \left(X_a\left(j \cdot \left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)\right) + X_a(j\omega) + X_a\left(j \cdot \left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right)\right)\right) \cdot e^{j\omega t} \right| d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{T}} \left| \frac{\tau \cdot e^{j\omega t}}{(1 + j\omega\tau)^2} \right| d\omega + \int_{\frac{\pi}{T}}^{\infty} \left| \frac{\tau \cdot e^{j\omega t}}{(1 + j\omega\tau)^2} \right| d\omega + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \left(\frac{\tau}{(1 + j\omega\tau)^2} - \left(X_a\left(j \cdot \left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)\right) + \frac{\tau}{(1 + j\omega\tau)^2} + X_a\left(j \cdot \left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right)\right)\right) \cdot e^{j\omega t} \right| d\omega \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{T}} \left| \frac{\tau \cdot e^{j\omega t}}{(1 + j\omega\tau)^2} \right| d\omega + \int_{\frac{\pi}{T}}^{\infty} \left| \frac{\tau \cdot e^{j\omega t}}{(1 + j\omega\tau)^2} \right| d\omega + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \left(X_a\left(j \cdot \left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)\right) + X_a\left(j \cdot \left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right)\right) \cdot e^{j\omega t} \right| d\omega \right)$$

(1)

$$\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{T}} \left| \frac{\tau \cdot e^{j\omega t}}{(1 + j\omega\tau)^2} \right| d\omega = \tau \cdot \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{T}} \left| \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \right| d\omega$$

$$\left(\frac{1}{1 + x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \right)$$

$$\leq \tau \cdot \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{T}} \frac{1}{\omega^2\tau^2}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\tau} \cdot \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{T}} \omega^{-2}\, d\omega$$

$$= \frac{T}{\tau\pi}$$

(2)

$$\int_{\frac{\pi}{T}}^{\infty} \left| \frac{\tau \cdot e^{j\omega t}}{(1 + j\omega\tau)^2} \right| d\omega \leq \frac{T}{\tau\pi}$$

(3)

$$\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \left(X_a\left(j \cdot \left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)\right) + X_a\left(j \cdot \left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right)\right) \cdot e^{j\omega t} \right| \, d\omega$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| X_a\left(j \cdot \left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)\right)\right| \, d\omega + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| X_a\left(j \cdot \left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right)\right| \, d\omega$$

$$= \tau \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \frac{1}{\left(1 + j\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)\tau\right)^2} \right| \, d\omega + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \frac{1}{\left(1 + j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\tau\right)^2} \right| \, d\omega \right)$$

$$= \tau \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \frac{1}{1 + \left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \tau^2} \right| \, d\omega + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \frac{1}{1 + \left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \tau^2} \right| \, d\omega \right)$$

$$\leq \tau \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \frac{1}{\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \tau^2} \right| \, d\omega + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \frac{1}{\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \tau^2} \right| \, d\omega \right)$$

$$= \frac{1}{\tau} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)^{-2} \, d\omega + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)^{-2} \, d\omega \right)$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{\tau\pi}$$

$$f(t) \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{T}} \frac{\tau \cdot e^{j\omega t}}{(1 + j\omega\tau)^2} \, d\omega + \int_{\frac{\pi}{T}}^{\infty} \frac{\tau \cdot e^{j\omega t}}{(1 + j\omega\tau)^2} \, d\omega - \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left(X_a\left(j \cdot \left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)\right) + X_a\left(j \cdot \left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right)\right) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega \right)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{T}{\tau\pi} + \frac{T}{\tau\pi} + \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{\tau\pi} \right)$$

$$\leq \frac{T}{2\pi^2\tau} \cdot \frac{10}{3}$$

$$\leq \frac{5T}{3\pi^2\tau} \leq \epsilon$$

$$\frac{1}{f_s} \leq \frac{3\pi^2\epsilon\tau}{5}$$

$$f_s \geq \frac{5}{3\pi^2\epsilon\tau}$$

Für den Fall, dass $k \in [-\infty, \infty]$ ist

$$\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \left(X_a\left(j \cdot \left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) + X_a\left(j \cdot \left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right)\right)\right) \cdot e^{j\omega t} \right| d\omega$$

$$= \tau \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \frac{1}{1 + \left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)^2 \cdot \tau^2} \right| d\omega + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \frac{1}{1 + \left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right)^2 \cdot \tau^2} \right| d\omega \right)$$

$$\leq \tau \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \frac{1}{\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)^2 \cdot \tau^2} \right| d\omega + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| \frac{1}{\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right)^2 \cdot \tau^2} \right| d\omega \right)$$

$$= \frac{1}{\tau} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)^{-2} d\omega + \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right)^{-2} d\omega \right)$$

$$= \frac{1}{\tau} \cdot \left(\frac{T}{2\pi k - \pi} - \frac{T}{2\pi k + \pi} + \frac{T}{2\pi k - \pi} - \frac{T}{2\pi k + \pi} \right)$$

$$= \frac{T}{\tau\pi} \cdot \left(\frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} \right)$$

$$f(t) \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{T}{\tau\pi} + \frac{T}{\tau\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{T}{\tau\pi} \cdot \left(\frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} \right) \right) \right)$$

$$= \frac{T}{2\pi^2\tau} \cdot \left(2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} \right) \right)$$

$$= \frac{2T}{\pi^2\tau}$$

$$f_s \geq \frac{2}{\pi^2 \epsilon \tau}$$

f) Welche Abtastfrequenz f_s ergibt sich für $\tau = 10\ ms$ und $\epsilon = 10^{-3}$?

$$f_s > \frac{5}{3\pi^2 \epsilon \tau}$$

$$> 16887\ Hz$$

Aufgabe 2.8:

Ein zeitdiskretes System sei durch den folgenden Zusammenhang zwischen den Fouriertransformationen des Eingangs- und Ausgangssignals charakterisiert:

$$\boldsymbol{Y\left(e^{j\theta}\right) = j \cdot \frac{dX\left(e^{j\theta}\right)}{d\theta}}$$

mit $\boldsymbol{X\left(e^{j\theta}\right) \leftrightarrow x[n]}$ und $\boldsymbol{Y\left(e^{j\theta}\right) \leftrightarrow y[n]}$.

a) **Berechnen Sie allgemein den Zusammenhang zwischen Eingangssignal $\boldsymbol{x[n]}$ und Ausgangssignal $\boldsymbol{y[n]}$ des gegebenen Systems.**

Formelsammlung

$$n \cdot x[n] \leftrightarrow j\frac{dX\left(e^{j\theta}\right)}{d\theta}$$

$$y[n] = n \cdot x[n]$$

b) **Berechnen Sie die Antworten des Systems auf folgende Signale:**

   a. $\boldsymbol{x[n] = \delta[n - N_0],\ N_0 \in \mathbb{N}}$

$$y[n] = n \cdot \delta[n - N_0]$$
$$= N_0$$

   b. $\boldsymbol{x[n] = \sigma[n]}$

$$y[n] = n \cdot \sigma[n]$$

   c. $\boldsymbol{x[n] = \frac{sin(\theta_0 n)}{\pi n}}$

$$y[n] = \frac{\sin(\theta_0 n)}{\pi}$$

c) **Prüfen Sie ob das System**

   a. **reell- oder komplexwertig,**

$$y[n] = n \cdot x[n]$$
$$\rightarrow \text{reell}$$

b. linear,

$$n \cdot (a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n])$$
$$= a \cdot (n \cdot x_1[n]) + b \cdot (n \cdot x_2[n])$$
$$a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[n]$$
$$\rightarrow \text{linear}$$

c. zeitinvariant,

$$y[n-5] = (n-5) \cdot x[n-5] \neq n \cdot x[n-5]$$
$$\rightarrow \text{zeitvariant}$$

d. stabil ist.

z.B.

$$x[n] = \sigma[n]$$
$$\downarrow$$
$$\lim_{n\to\infty}(y[n]) = \lim_{n\to\infty}(n \cdot \sigma[n]) = \infty$$
$$\rightarrow \text{instabil}$$

Aufgabe 3.3:

Gegeben sei ein LTI-System mit der Impulsantwort

$$\boldsymbol{h[n] = \frac{sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right)}{\pi n}}$$

Berechnen Sie das Ausgangssignal dieses Systems für folgende Eingangssignale:

Formelsammlung

$$(x * y)[n] \leftrightarrow X\left(e^{j\theta}\right) \cdot Y\left(e^{j\theta}\right)$$
$$\frac{\sin(\alpha n)}{\pi n} \leftrightarrow rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$H\left(e^{j\theta}\right) = rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{3}{\pi}\right)$$
$$y[n] = x[n] * h[n]$$
$$Y\left(e^{j\theta}\right) = X\left(e^{j\theta}\right) \cdot H\left(e^{j\theta}\right)$$

a)

$$\boldsymbol{x[n]} = \sum_{\boldsymbol{k=-\infty}}^{\boldsymbol{\infty}} \boldsymbol{\delta[n-8k]}$$

Formelsammlung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \leftrightarrow \frac{2\pi}{N} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$e^{j\theta_0 n} \leftrightarrow 2\pi \cdot \delta_{2\pi}[\theta - \theta_0]$$

$$X\left(e^{j\theta}\right) = \frac{2\pi}{8} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{8}\right)$$

$$Y\left(e^{j\theta}\right) = X\left(e^{j\theta}\right) \cdot H\left(e^{j\theta}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{4} \cdot k\right) \cdot rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{3}{\pi}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \sum_{k=-1}^{1} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{4} \cdot k\right)$$

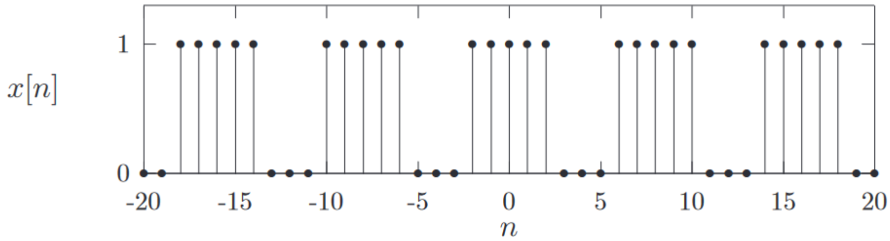
$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left(\delta\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \delta(\theta) + \delta\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$y[n] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\left(e^{-j\frac{\pi}{4} \cdot n} + 1 + e^{j\frac{\pi}{4} \cdot n}\right)}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(e^{-j\frac{\pi}{4} \cdot n} + e^{j\frac{\pi}{4} \cdot n}\right) + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right) + \frac{1}{8}$$

b)



$$N = 8$$

$$x_a[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-8k]\,, \qquad y_a[n] = \frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right) + \frac{1}{8}$$

$$x[n] = x_a[n-2] + x_a[n-1] + x_a[n] + x_a[n+1] + x_a[n+2]$$

$$y[n] = y_a[n-2] + y_a[n-1] + y_a[n] + y_a[n+1] + y_a[n+2]$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{1}{4} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot (n-2)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot (n+2)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot (n-1)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot (n+1)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right)\right)$$

$$(\ \cos(x+a) + \cos(x-a) = 2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(a)\ )$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right) \cdot \left(2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1\right)$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{2}+1}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right)$$

$$\downarrow$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right)$$

c)

$$\boldsymbol{x[n] = \delta[n+1] + \delta[n-1]}$$

Faltung mit Dirac-Impuls

$$x[n] * \delta[n-T] = x[n-T]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= (\delta[n+1] + \delta[n-1]) * \frac{sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right)}{\pi n}$$

$$= \left(\delta[n+1] * \frac{sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot n\right)}{\pi n}\right) + \left(\delta[n-1] * \frac{sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot n\right)}{\pi n}\right)$$

$$= \frac{sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot (n+1)\right)}{\pi\cdot(n+1)} + \frac{sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot (n-1)\right)}{\pi\cdot(n-1)}$$

d)

$$\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}] = \frac{\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)}}{\boldsymbol{\pi n}}$$

Formelsammlung

$$\frac{\sin(\alpha n)}{\pi n} \leftrightarrow rect\left(\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$X\left(e^{j\theta}\right) = rect\left(\frac{\theta}{2}\cdot\frac{4}{\pi}\right)$$

$$Y\left(e^{j\theta}\right) = X\left(e^{j\theta}\right)\cdot H\left(e^{j\theta}\right)$$
$$= rect\left(\frac{\theta}{2}\cdot\frac{4}{\pi}\right)\cdot rect\left(\frac{\theta}{2}\cdot\frac{3}{\pi}\right)$$
$$= rect\left(\frac{\theta}{2}\cdot\frac{4}{\pi}\right)$$

$$y[n] = \frac{sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)}{\pi n}$$
$$= x[n]$$

e)

$$\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}] = \frac{\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)}}{\boldsymbol{\pi n}}\cdot \boldsymbol{cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot n\right)}$$

Formelsammlung

$$\frac{\sin(\alpha n)}{\pi n} \leftrightarrow rect\left(\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\cos(\theta_0\cdot n) \leftrightarrow \pi\cdot\left(\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0)+\delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)\right)$$

$$x[n]\cdot y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\cdot(X*Y)\left(e^{j\theta}\right)$$

$$X(e^{j\theta}) = \frac{\pi}{2\pi} \cdot \left(rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{4}{\pi}\right) * \left(\delta_{2\pi}\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) + \delta_{2\pi}\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right) \right) \right)$$

$$= \frac{rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{4}{\pi}\right) * \delta_{2\pi}\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)}{2} + \frac{rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{4}{\pi}\right) * \delta_{2\pi}\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(rect_{2\pi}\left(\frac{\theta - \frac{3\pi}{4}}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \right) + rect_{2\pi}\left(\frac{\theta + \frac{3\pi}{4}}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] + \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \right)$$

$$Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta}) \cdot H(e^{j\theta})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(rect_{2\pi}\left(\frac{\theta - \frac{3\pi}{4}}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \right) + rect_{2\pi}\left(\frac{\theta + \frac{3\pi}{4}}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \right) \right) \cdot rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{3}{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] + \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \right) \cdot \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

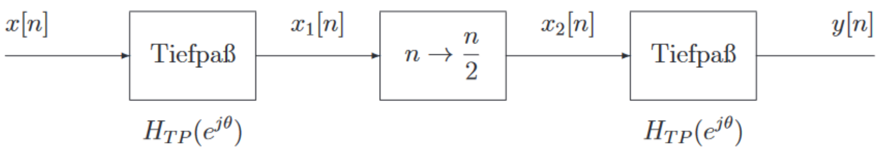
$$= 0$$

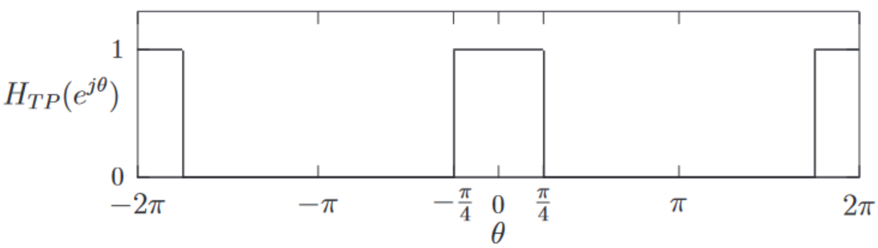
$$y[n] = 0$$

Aufgabe 3.8:

Das abgebildete System soll im Zeit- und im Frequenzbereich untersucht werden, wobei das mittlere Teilsystem folgende Eingangs-/Ausgangsbeziehung aufweist.

$$\boldsymbol{x_2[n]} = \begin{cases} \boldsymbol{x_1\left[\frac{n}{2}\right]} & \boldsymbol{n} \text{ gerade} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{n} \text{ ungerade} \end{cases}$$





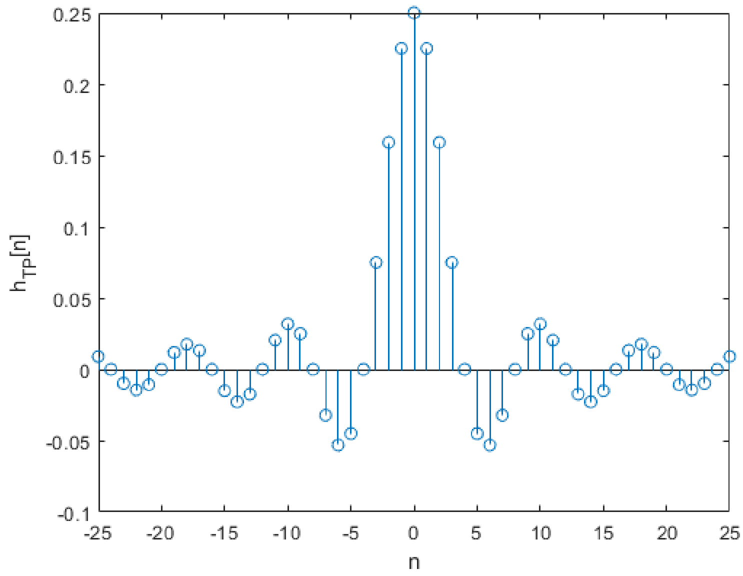
a) Berechnen und skizzieren Sie die Impulsantwort $h_{TP}[n]$ des Tiefpassfilters.

Formelsammlung

$$\frac{\sin(\alpha n)}{\pi n} \leftrightarrow X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\theta| \leq \alpha \\ 0 & \alpha < |\theta| < \pi \end{cases}$$

$$H_{TP}(e^{j\theta}) = rect_{2\pi}\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{4}{\pi}\right)$$

$$h_{TP}[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} n\right)}{\pi n}$$



b) Berechnen Sie die Antwort $y[n] = h[n, k]$ des Gesamtsystems auf den zeitverschobenen Impuls $x[n] = \delta[n - k]$.

Faltung mit Dirac-Impuls

$$x[n] * \delta[n - T] = x[n - T]$$

$$x_1[n] = x[n] * h_{TP}[n]$$

$$= \delta[n - k] * \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} n\right)}{\pi n}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot (n - k)\right)}{\pi \cdot (n - k)}$$

$$x_2[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{n}{2}-k\right)\right)}{\pi\cdot\left(\frac{n}{2}-k\right)} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\cdot(n-2k)\right)}{\pi\cdot(n-2k)} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$= 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\cdot(n-2k)\right)}{\pi\cdot(n-2k)}\cdot\frac{e^{j\pi n}+1}{2}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\cdot(n-2k)\right)}{\pi\cdot(n-2k)}\cdot\left(e^{j\pi n}+1\right)$$

$$x_2[n+2k] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\cdot n\right)}{\pi n}\cdot\left(e^{j\pi\cdot(n+2k)}+1\right)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\cdot n\right)}{\pi n}\cdot\left(e^{j\pi n}+1\right)$$

Formelsammlung

$$x[n]\cdot y[n] = \frac{1}{2\pi}\cdot(X*Y)\left(e^{j\theta}\right)$$

$$\frac{\sin(\alpha n)}{\pi n} \leftrightarrow X\left(e^{j\theta}\right) = \begin{cases} 1 & 0\le|\theta|\le\alpha \\ 0 & \alpha<|\theta|<\pi \end{cases}$$

$$e^{j\theta_0 n} \leftrightarrow 2\pi\cdot\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0)$$

$$x[n-N_0] = e^{-j\theta N_0}\cdot X\left(e^{j\theta}\right)$$

$$X_{2,n+2k}\left(e^{j\theta}\right) = rect\left(\frac{\theta}{2}\cdot\frac{8}{\pi}\right)+\frac{1}{2\pi}\cdot\left(rect\left(\frac{\theta}{2}\cdot\frac{8}{\pi}\right)*2\pi\cdot\delta_{2\pi}(\theta-\pi)\right)$$

$$= rect\left(\frac{\theta}{2}\cdot\frac{8}{\pi}\right)+rect\left(\frac{\theta-\pi}{2}\cdot\frac{8}{\pi}\right)$$

$$X_2\left(e^{j\theta}\right) = e^{-j\theta 2k}\cdot\left(rect\left(\frac{\theta}{2}\cdot\frac{8}{\pi}\right)+rect\left(\frac{\theta-\pi}{2}\cdot\frac{8}{\pi}\right)\right)$$

$$Y\left(e^{j\theta}\right) = X_2\left(e^{j\theta}\right) \cdot H\left(e^{j\theta}\right)$$

$$= e^{-j\theta 2k} \cdot \left(rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{8}{\pi}\right) + rect\left(\frac{\theta - \pi}{2} \cdot \frac{8}{\pi}\right)\right) \cdot rect_{2\pi}\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{4}{\pi}\right)$$

$$= e^{-j\theta 2k} \cdot rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{8}{\pi}\right)$$

$$y[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot (n - 2k)\right)}{\pi \cdot (n - 2k)}$$

c) Berechnen Sie allgemein den Zusammenhang zwischen den Spektren $X\left(e^{j\theta}\right)$ und $Y\left(e^{j\theta}\right)$. Verwenden Sie diese Beziehung zur Kontrolle Ihres Ergebnisses aus Punkt (b).

$$X_1\left(e^{j\theta}\right) = X\left(e^{j\theta}\right) \cdot H_{TP}\left(e^{j\theta}\right)$$

$$= X\left(e^{j\theta}\right) \cdot rect_{2\pi}\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{4}{\pi}\right)$$

Zwischenrechnung

$$\mathcal{F}\left(x\left(\frac{t - t_0}{a}\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{t - t_0}{a}\right) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\left(u = \frac{t - t_0}{a}, \qquad \frac{du}{dt} = \frac{1}{a}, \qquad dt = a \cdot du\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cdot e^{-j\omega \cdot (a \cdot u + t_0)} \cdot a \cdot du$$

$$= a \cdot e^{-j\omega t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cdot e^{j\omega \cdot a \cdot u} \cdot a \cdot du$$

$$= a \cdot X(ja\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

$$\downarrow$$

$$x\left[\frac{n}{a}\right] \leftrightarrow a \cdot X\left(e^{ja\theta}\right)$$

Formelsammlung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \leftrightarrow \frac{2\pi}{N} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$\downarrow$$

$$N = 1:$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi k)$$

$$X_2(e^{j\theta}) = \mathcal{F}\left(x_1\left[\frac{n}{2}\right] \cdot \frac{e^{j\pi n}+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\mathcal{F}\left(x_1\left[\frac{n}{2}\right]\right) * \mathcal{F}\left(\frac{e^{j\pi n}+1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(2 \cdot X_1(e^{j2\theta}) * \frac{1}{2} \cdot \left(\mathcal{F}(e^{j\pi n}) + \mathcal{F}(1)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(X_1(e^{j2\theta}) * \left(2\pi \cdot \delta_{2\pi}(\theta - \pi) + 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi k)\right)\right)$$

$$\downarrow^{4}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(X_1(e^{j2\theta}) * \left(2\pi \cdot \delta(\theta - \pi) + 2\pi \cdot \delta(\theta)\right)\right)$$

$$= X_1(e^{j2\cdot(\theta-\pi)}) + X_1(e^{j2\theta})$$

$$Y(e^{j\theta}) = X_2(e^{j\theta}) \cdot H_{TP}(e^{j\theta})$$

$$= \left(X_1(e^{j2\cdot(\theta-\pi)}) + X_1(e^{j2\theta})\right) \cdot rect_{2\pi}\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{4}{\pi}\right)$$

$$= \left(X(e^{j2\cdot(\theta-\pi)}) \cdot rect_{2\pi}\left(\frac{2\cdot(\theta-\pi)}{2} \cdot \frac{4}{\pi}\right) + X(e^{j2\theta}) \cdot rect_{2\pi}\left(\frac{2\theta}{2} \cdot \frac{4}{\pi}\right)\right) \cdot rect_{2\pi}\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{4}{\pi}\right)$$

$$= X(e^{j2\theta}) \cdot rect_{2\pi}\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{8}{\pi}\right)$$

$$Y(e^{j\theta}) = \begin{cases} X(e^{j2\theta}) & |\theta| < \frac{\pi}{8} \\ 0 & \text{sonst in } [-\pi, \pi] \end{cases}$$

[4] Frequenzbereich ist 2π-periodisch

d) Ist das Gesamtsystem

a. Linear?

$$Y\left(e^{j\theta}\right) = X\left(e^{j2\theta}\right) \cdot rect_{2\pi}\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{8}{\pi}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(a \cdot X_1\left(e^{j2\theta}\right) + b \cdot X_2\left(e^{j2\theta}\right)\right) \cdot rect_{2\pi}\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{8}{\pi}\right)$$

$$= a \cdot X_1\left(e^{j2\theta}\right) \cdot rect_{2\pi}\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{8}{\pi}\right) + b \cdot X_2\left(e^{j2\theta}\right) \cdot rect_{2\pi}\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{8}{\pi}\right)$$

$$= a \cdot Y_1\left(e^{j\theta}\right) + b \cdot Y_2\left(e^{j\theta}\right)$$

$$\rightarrow \text{linear}$$

b. Zeitinvariant?

Formelsammlung

$$(x * y)[n] \leftrightarrow X\left(e^{j\theta}\right) \cdot Y\left(e^{j\theta}\right)$$

$$\frac{\sin(\alpha n)}{\pi n} \leftrightarrow X\left(e^{j\theta}\right) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\theta| \leq \alpha \\ 0 & \alpha < |\theta| < \pi \end{cases}$$

$$x\left[\frac{n}{a}\right] \leftrightarrow a \cdot X\left(e^{ja\theta}\right)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(X\left(e^{j2\theta}\right) \cdot rect_{2\pi}\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{8}{\pi}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x\left[\frac{n}{2}\right] * \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot n\right)}{\pi n}$$

$$y[n - N_0] \neq \frac{1}{2} \cdot x\left[\frac{n - N_0}{2}\right] * \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot n\right)}{\pi n}$$

$$\rightarrow \text{zeitvariant}$$

c. Kausal?

$$y[-6] = \frac{1}{2} \cdot x\left[\frac{-6}{2}\right] * \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot (-6)\right)}{\pi \cdot (-6)}$$

$$y[-6] = \cdots \cdot x[-3] * \ldots$$

$\rightarrow$ akausal[5]

[5] Zum Zeitpunkt $n = -6$ ist das Signal vom Zeitpunkt $n = -3$ noch nicht bekannt.

d. Stabil?

$$y[n] = \frac{1}{2} \cdot x\left[\frac{n}{2}\right] * \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot n\right)}{\pi n}$$

$$\downarrow^{6}$$

$$\sigma[n] * \frac{1}{n} = -\log_e\left(-\frac{1}{n}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\log_e\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(-(\log_e(-1) - \log_e(n))\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}(\log_e(n)) - j\pi$$
$$= \infty$$
$$\rightarrow \text{instabil}$$

e. Reell- oder Komplexwertig?

$$\rightarrow \text{reell}$$

Aufgabe 3.10:

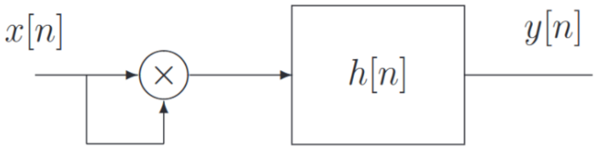
In vielen Bereichen der Signalanalyse ist häufig die Ermittlung der Signalenergie notwendig. Theoretisch ist die Signalenergie – sofern sie existiert – eine Konstante, da sich die Berechnung über ein unendlich langes Zeitintervall erstreckt. In der Praxis können jedoch nur Zeitintervalle endlicher Dauer für die Berechnung herangezogen werden, so dass stets nur eine zeitabhängige Kurzzeitenergie des Signals gemessen werden kann. Eine mögliche Form der Kurzzeitenergie eines Signals $x[n]$ ist

$$e_x[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} x^2[k]$$

wobei N die Dauer des Messintervalls ist.

[6] Abschätzung: $\frac{1}{2\pi}$ ist egal, $|\sin(x)| \leq 1$

a) Entwerfen Sie ein System bestehend aus einem Quadrierer und einem linearen Filter, so dass das Ausgangssignal dieses Systems die Kurzzeitenergie $e_x[n]$ des Eingangssignals $x[n]$ ist.[7]



$$e_x[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} x^2[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2[k] \cdot (\sigma[k-(n-N+1)] - \sigma[k-(n+1)])$$

$$\downarrow$$

$$B_{rect} = n-(n-N+1) = N-1, \qquad P_{rect} = n - \frac{N-1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2[k] \cdot rect\left[\frac{k-P_{rect}}{2} \cdot \frac{2}{B_{rect}}\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2[k] \cdot rect\left[\frac{k-\left(n-\frac{N-1}{2}\right)}{2} \cdot \frac{2}{N-1}\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2[k] \cdot rect\left[\frac{\left(n-\frac{N-1}{2}\right)-k}{2} \cdot \frac{2}{N-1}\right]$$

$$e_x\left[n+\frac{N-1}{2}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2[k] \cdot rect\left[\frac{n-k}{2} \cdot \frac{2}{N-1}\right]$$

$$= x^2[n] * rect\left[\frac{n}{2} \cdot \frac{2}{N-1}\right]$$

$$e_x[n] = x^2[n] * rect\left[\frac{n-\frac{N-1}{2}}{2} \cdot \frac{2}{N-1}\right]$$

$$h[n] = rect\left[\frac{n-\frac{N-1}{2}}{2} \cdot \frac{2}{N-1}\right]$$

---

[7] Grafik aus Lösungen übernommen

Formelsammlung

$$x[n-N_0] \leftrightarrow e^{-j\theta N_0} \cdot X(e^{j\theta})$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin\left((2N_1+1)\cdot\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$h'\left[n+\frac{N-1}{2}\right] = rect\left[\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{N-1}\right]$$

$$H'(e^{j\theta}) = \frac{\sin\left(\left(2\cdot\frac{N-1}{2}+1\right)\cdot\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(N\cdot\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$h[n] = h'\left[n-\frac{N-1}{2}\right]$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{\sin\left(N\cdot\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot e^{-j\theta\cdot\frac{N-1}{2}}$$

b) Berechnen Sie allgemein die Fouriertransformation $E_x(e^{j\theta})$ der Kurzzeitenergie in Abhängigkeit vom Eingangssignalspektrum $X(e^{j\theta})$ und der Messdauer N.

Formelsammlung

$$x[n]\cdot y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\cdot(X*Y)(e^{j\theta})$$

$$E_x(e^{j\theta}) = \mathcal{F}(x[n]^2)\cdot H(e^{j\theta})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot(X*X)(e^{j\theta})\cdot H(e^{j\theta})$$

c) Wie ist die Messdauer N für ein Signal der Form $x[n] = A \cdot cos(\theta_0 \cdot n)$ zu wählen, damit $e_x[n]$ in diesem speziellen Fall konstant, d.h. zeitunabhängig ist?

$$x[n] = A \cdot cos(\theta_0 \cdot n)$$
$$x^2[n] = A^2 \cdot \cos^2(\theta_0 \cdot n)$$
$$= A^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2\theta_0 \cdot n))$$

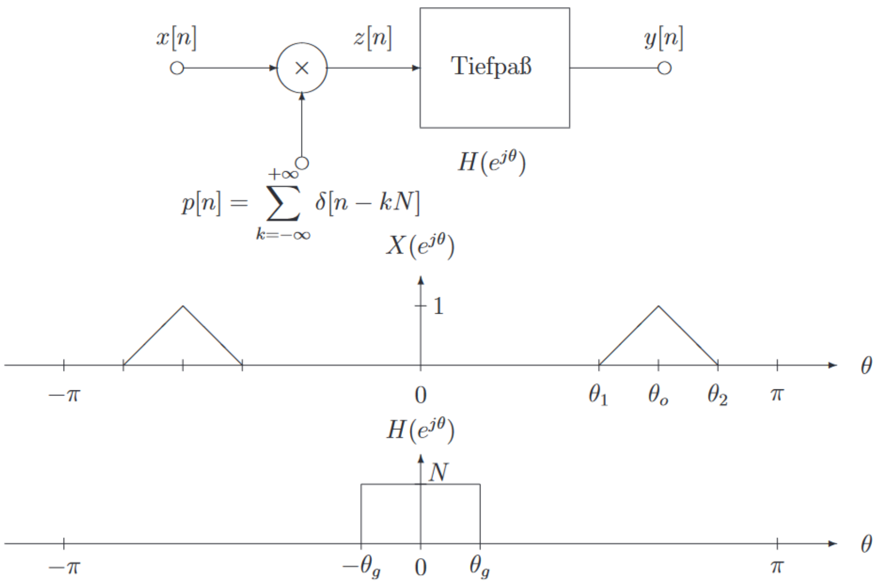
$$e_x[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} x^2[k]$$
$$= \sum_{k=n-N+1}^{n} \left(A^2 \cdot \frac{1}{2} + A^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2\theta_0 \cdot k)\right)$$
$$= \frac{A^2}{2} \cdot \left(N + \sum_{k=n-N+1}^{n} \cos(2\theta_0 \cdot k)\right)$$
$$\downarrow$$
$$\sum_{k=0}^{N} \cos\left(2\pi \cdot \mathbb{Z} \cdot \frac{k}{N}\right) = konst.$$
$$\downarrow$$
$$2\pi \cdot \mathbb{Z} \cdot \frac{k}{N} = 2\theta_0 \cdot k$$
$$2\pi \cdot \frac{\mathbb{Z}}{N} = 2\theta_0$$

(Die Messdauer kann nicht von einer Laufvariable abhängen, weil sich die Messdauer sonst ständig ändern würde. Wrsl. steht das k in der Lösung für eine beliebige ganze Zahl $\mathbb{Z} = k$)

$$2\pi \cdot \frac{k}{N} = 2\theta_0$$
$$N = \frac{k\pi}{\theta_0}$$

Aufgabe 3.11:

Gegeben sei ein zeitdiskretes Bandpasssignal $x[n]$ mit dem abgebildeten Spektrum $X(e^{j\theta})$. Dieses Signal wird mit einem Puls $p[n]$ bestehend aus äquidistanten Einsimpulsen multipliziert. Danach erfolgt eine ideale Tiefpassfilterung.



$$\boldsymbol{\theta_1 = (M-1) \cdot \frac{\pi}{N}, \qquad \theta_0 = M \cdot \frac{\pi}{N}, \qquad \theta_2 = (M+1) \cdot \frac{\pi}{N}, \qquad \theta_g = \frac{\pi}{N}}$$

$$\boldsymbol{M < N-1, \qquad M \text{ gerade}}$$

a) **Berechnen und skizzieren Sie die Spektren $Z(e^{j\theta})$ und $Y(e^{j\theta})$ der Signale $z[n]$ und $y[n]$.**

Formelsammlung

$$x[n] \cdot y[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot (X * Y)(e^{j\theta})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \leftrightarrow \frac{2\pi}{N} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$Z(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \cdot (X * P)(e^{j\theta})$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \left(X(e^{j\theta}) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)$$

$\downarrow$ [8]

[8] Frequenzbereich ist 2π-periodisch

$$= \frac{1}{N} \cdot \left(X\left(e^{j\theta}\right) * \sum_{k=0}^{N-1} \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\cdot\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right)}\right)$$

$$X\left(e^{j\theta}\right) = \Lambda\left(\frac{\theta - \theta_0}{\theta_2 - \theta_0}\right)$$

$$= \Lambda\left(\frac{\theta - M \cdot \frac{\pi}{N}}{(M+1) \cdot \frac{\pi}{N} - M \cdot \frac{\pi}{N}}\right)$$

$$= \Lambda\left(\frac{\theta - M \cdot \frac{\pi}{N}}{\frac{\pi}{N}}\right)$$

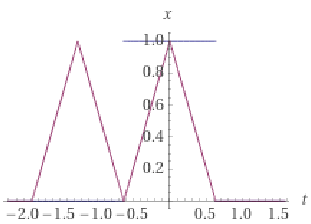
$$H\left(e^{j\theta}\right) = N \cdot rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{\theta_g}\right)$$

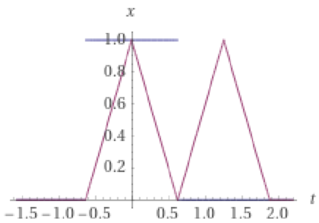
$$= N \cdot rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{N}{\pi}\right)$$

$$Y\left(e^{j\theta}\right) = H\left(e^{j\theta}\right) \cdot Z\left(e^{j\theta}\right)$$

$$= N \cdot rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{N}{\pi}\right) \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j\cdot\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right)}\right)$$

$$= rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{N}{\pi}\right) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda\left(\frac{\theta - \frac{2\pi k}{N} - M \cdot \frac{\pi}{N}}{\frac{\pi}{N}}\right)$$





$\downarrow$[9]

$$= 2 \cdot \Lambda\left(\frac{\theta}{\frac{\pi}{N}}\right) = 2 \cdot \begin{cases} 1 - \frac{|\theta| \cdot N}{\pi} & 0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{N} \\ 0 & \frac{\pi}{N} \leq |\theta| \leq \pi \end{cases}$$

[9] M gerade

b) Berechnen Sie das Ausgangssignal $y[n]$ des Systems.

$$Y(e^{j\theta}) = 2 \cdot \Lambda\left(\frac{\theta}{\frac{\pi}{N}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$k \cdot \Lambda\left(\frac{t}{k}\right) = rect\left(\frac{t}{k}\right) * rect\left(\frac{t}{k}\right)$$

$$2 \cdot \Lambda\left(\frac{\theta}{\frac{\pi}{N}}\right) = \frac{2N}{\pi} \cdot \left(rect\left(\frac{t}{2} \cdot \frac{2N}{\pi}\right) * rect\left(\frac{t}{2} \cdot \frac{2N}{\pi}\right)\right)$$

Formelsammlung

$$x[n] \cdot y[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot (X * Y)(e^{j\theta})$$

$$\frac{\sin(\alpha n)}{\pi n} \leftrightarrow rect\left(\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$y[n] = 2\pi \cdot \frac{2N}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2N} \cdot n\right)}{\pi n}\right)^2$$

$$= 4N \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2N} \cdot n\right)}{\pi n}\right)^2$$