7. Übung

Aufgabe 3.7:

Es soll ein LTI-System entworfen werden, das auf das Eingangssignal

$$\boldsymbol{x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \sigma[n] - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \sigma[n-1]}$$

mit dem Ausgangssignal

$$\boldsymbol{y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \cdot \sigma[n]}$$

antwortet.

a) **Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ des Systems.**

Formelsammlung

$$a^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\theta}}$$

$$x[n - N_0] \leftrightarrow e^{-j\theta N_0} \cdot X(e^{j\theta})$$

$$\downarrow$$

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{-j\theta}}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}}$$

$$Y(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\theta}}$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{Y(e^{j\theta})}{X(e^{j\theta})}$$

$$= \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\theta}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot e^{-j\theta}\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}}{\left(1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\theta}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot e^{-j\theta}\right)}$$

$$= \frac{3}{1 - \frac{1}{4} \cdot e^{-j\theta}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\theta}}$$

b) Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems.

Formelsammlung

$$a^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\theta}}$$

$$\downarrow$$

$$H\left(e^{j\theta}\right) = \frac{3}{1 - \frac{1}{4} \cdot e^{-j\theta}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\theta}}$$

$$h[n] = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \sigma[n] - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \sigma[n]$$

$$= \left(3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \cdot \sigma[n]$$

c) Geben Sie eine mögliche Realisierung des Systems mit Addieren, Konstantmultiplizierern und Verzögerungselementen an.

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

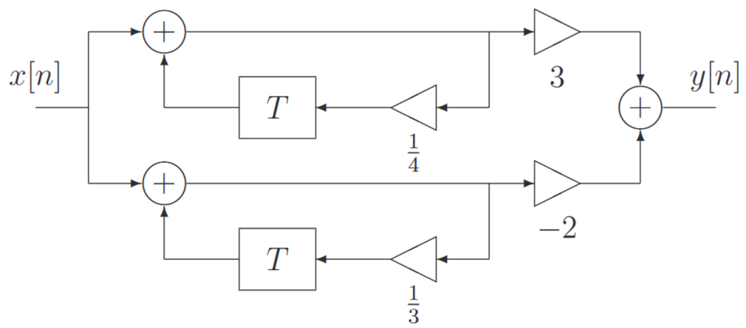
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k\right) \cdot \sigma[k] \cdot x[n-k]$$

$$= 3 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \sigma[k] \cdot x[n-k]\right) - 2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \sigma[k] \cdot x[n-k]\right)$$

$$= 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot x[n-k]\right) - 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot x[n-k]\right)$$

$$= 3 \cdot \left(x[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot x[n-1] + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot x[n-2] + \cdots\right) - 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot x[n-k]\right)$$

$$= 3 \cdot \left(x[n] + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot x[n-1] + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot x[n-1-1] + \cdots\right) - 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot x[n-k]\right)$$



Aufgabe 3.9:

Von einem LTI-System ist die Übertragungsfunktion gegeben:

$$\boldsymbol{H\left(e^{j\theta}\right) = 1 + \alpha \cdot e^{-j\theta} + \beta \cdot e^{-j2\theta}}$$

a) **Berechnen Sie jene Werte der Koeffizienten $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$, für die die Antwort des Systems null ist ($\boldsymbol{y[n] = 0,\ \forall n}$), und zwar für das Eingangssignal $\boldsymbol{x[n] = cos(\theta_0 n)}$.**

Formelsammlung

$$\delta[n - N_0] \leftrightarrow e^{-j\theta N_0}$$

$$\downarrow$$

$$h[n] = \delta[n] + \alpha \cdot \delta[n-1] + \beta \cdot \delta[n-2]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= x[n] + \alpha \cdot x[n-1] + \beta \cdot x[n-2]$$

$$= \cos(\theta_0 n) + \alpha \cdot \cos(\theta_0 n - \theta_0) + \beta \cdot \cos(\theta_0 n - 2\theta_0)$$

$$\downarrow$$

$$(\cos(a-b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b))$$

$$\downarrow$$

$$= \cos(\theta_0 n) + \alpha \cdot (\cos(\theta_0 n) \cdot \cos(\theta_0) + \sin(\theta_0 n) \cdot \sin(\theta_0)) + \beta \cdot \left((\cos(\theta_0 n) \cdot \cos(2\theta_0) + \sin(\theta_0 n) \cdot \sin(2\theta_0))\right) = 0$$

$$= \cos(\theta_0 n) \cdot (1 + \alpha \cdot \cos(\theta_0) + \beta \cdot \cos(2\theta_0)) + \sin(\theta_0 n) \cdot (\alpha \cdot \sin(\theta_0) + \beta \cdot \sin(2\theta_0)) = 0$$

$$\downarrow$$

$$1 + \alpha \cdot \cos(\theta_0) + \beta \cdot \cos(2\theta_0) = 0$$

$$\alpha \cdot \sin(\theta_0) + \beta \cdot \sin(2\theta_0) = 0$$

$$\beta = -\alpha \cdot \frac{\sin(\theta_0)}{\sin(2\theta_0)}$$

$$1 + \alpha \cdot \cos(\theta_0) + \beta \cdot \cos(2\theta_0) = 0$$

$$1 + \alpha \cdot \cos(\theta_0) - \alpha \cdot \frac{\sin(\theta_0)}{\sin(2\theta_0)} \cdot \cos(2\theta_0) = 0$$

$$\alpha \cdot \left(\cos(\theta_0) - \sin(\theta_0) \cdot \frac{\cos(2\theta_0)}{\sin(2\theta_0)}\right) = -1$$

$$\downarrow$$

$$\cos(2a) = 2 \cdot \cos^2(a) - 1$$

$$\sin(2a) = 2 \cdot \cos(a) \cdot \sin(a)$$

$$\downarrow$$

$$\alpha \cdot \left(\cos(\theta_0) - \sin(\theta_0) \cdot \frac{2 \cdot \cos^2(a) - 1}{2 \cdot \cos(\theta_0) \cdot \sin(\theta_0)}\right) = -1$$

$$\alpha \cdot \left(\cos(\theta_0) - \frac{2 \cdot \cos^2(a) - 1}{2 \cdot \cos(\theta_0)}\right) = -1$$

$$\alpha \cdot \left(\frac{2 \cdot \cos^2(\theta_0)}{2 \cdot \cos(\theta_0)} - \frac{2 \cdot \cos^2(a) - 1}{2 \cdot \cos(\theta_0)}\right) = -1$$

$$\alpha \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \cos(\theta_0)}\right) = -1$$

$$\alpha = -2 \cdot \cos(\theta_0)$$

$$\beta = -\alpha \cdot \frac{\sin(\theta_0)}{\sin(2\theta_0)}$$

$$= -\alpha \cdot \frac{\sin(\theta_0)}{2 \cdot \cos(\theta_0) \cdot \sin(\theta_0)}$$

$$= 2 \cdot \cos(\theta_0) \cdot \frac{\sin(\theta_0)}{2 \cdot \cos(\theta_0) \cdot \sin(\theta_0)}$$

$$= 1$$

b) Skizzieren Sie für diese speziellen Werte von $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ den Betrags- und Phasenverlauf der Übertragungsfunktion.

$$H\left(e^{j\theta}\right) = 1 - 2 \cdot \cos(\theta_0) \cdot e^{-j\theta} + e^{-j2\theta}$$

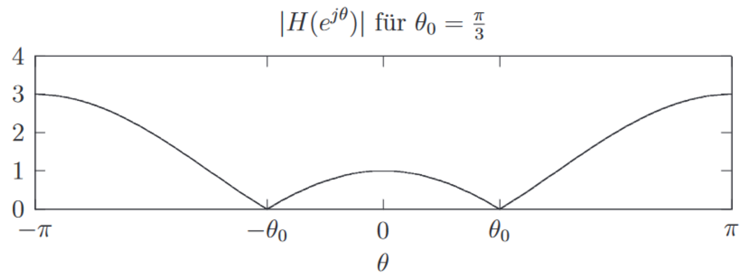
$$= 1 - \left(e^{j\theta_0} + e^{-j\theta_0}\right) \cdot e^{-j\theta} + e^{-j2\theta}$$

$$= \left(e^{-j\theta} \cdot e^{j\theta}\right) - \left(e^{j\theta_0} + e^{-j\theta_0}\right) \cdot e^{-j\theta} + \left(e^{-j\theta} \cdot e^{-j\theta}\right)$$

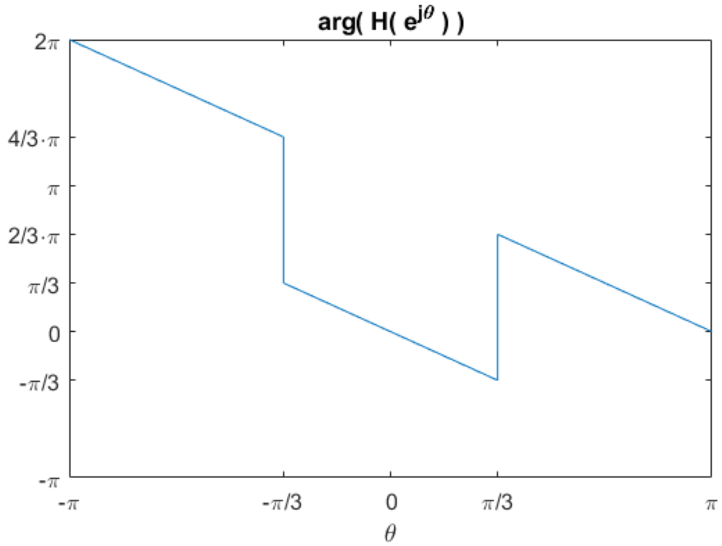
$$= \left(e^{j\theta} + e^{-j\theta} - e^{j\theta_0} - e^{-j\theta_0}\right) \cdot e^{-j\theta}$$

$$2 \cdot (\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) \cdot e^{-j\theta}$$

$$\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right| = 2 \cdot (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$



$$\arg\left(H\left(e^{j\theta}\right)\right) = -\theta + \pi \cdot \frac{sgn(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) - 1}{2}$$



Aufgabe 4.1:

Bestimmen Sie die $\mathcal{Z}$- Transformation (inklusive Konvergenzbereich) für die angegebenen Signale und skizzieren Sie das zugehörige Pol-/Nullstellendiagramm.

a) $\boldsymbol{x[n] = \delta[n-1]}$

Formelsammlung

$$x[n+n_0] \leftrightarrow z^{n_0} \cdot X(z), \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1, \qquad \forall z$$

$$x'[n] = x[n+1] = \delta[n]$$

$$X'(z) = 1$$

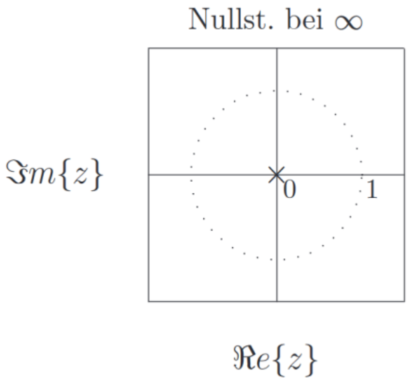
$$x[n] = x'[n-1]$$

$$X(z) = z^{-1} \cdot X'(z)$$

$$= \frac{1}{z}$$

Pol-Nullstellendiagramm[1]

$$N = \infty, \qquad P = 0, \qquad |z| < \infty$$



b) $\boldsymbol{x[n] = \delta[n+1]}$

Formelsammlung

$$x[n+n_0] \leftrightarrow z^{n_0} \cdot X(z), \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1, \qquad \forall z$$

$$x'[n] = x[n-1] = \delta[n]$$

$$X'(z) = 1$$

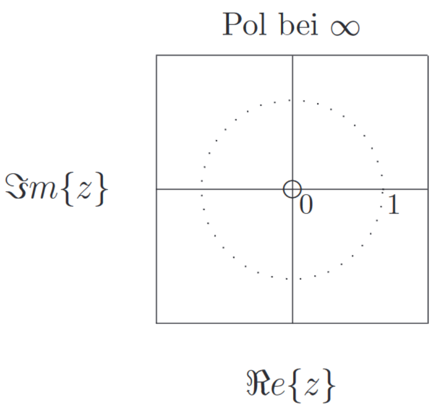
$$x[n] = x'[n+1]$$

$$X(z) = z^1 \cdot X'(z)$$

$$= z$$

Pol-Nullstellendiagramm[1]

$$N = 0, \qquad P = \infty, \qquad |z| < \infty$$



[1] Grafik aus Lösung übernommen

c) $\boldsymbol{x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]}$

Die $\mathcal{Z}$-Transformation ist linear, weil

$$\mathcal{Z}(a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]) = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]) \cdot z^{-n}$$

$$= a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x_1[n] \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x_2[n] \cdot z^{-n}$$

$$= a \cdot X_1(z) + b \cdot X_2(z)$$

$$x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$$

$$X(z) = \mathcal{Z}(\delta[n-1]) + \mathcal{Z}(\delta[n+1])$$

$$= \frac{1}{z} + z$$

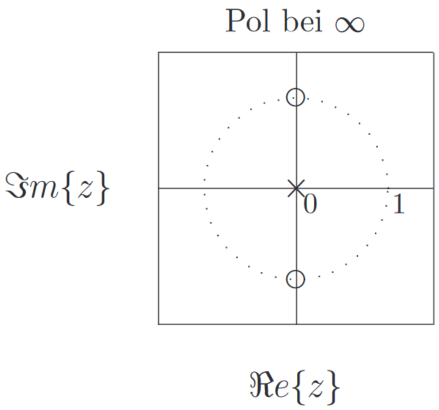
$$= \frac{z^2+1}{z}$$

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \pm j$$

Pol-Nullstellendiagramm[2]

$$N = \pm j, \qquad P = 0, \infty, \qquad |z| < \infty$$



[2] Grafik aus Lösung übernommen

d) $\boldsymbol{x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \sigma[n]}$

Formelsammlung

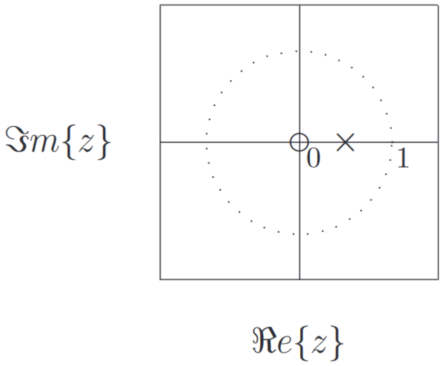
$$\alpha^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}}$$

Pol-Nullstellendiagramm[3]

$$N = 0, \qquad P = \frac{1}{2}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$



e) $\boldsymbol{x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \sigma[-n]}$

Formelsammlung

$$x[-n] \leftrightarrow X(z^{-1}), \qquad R_{x+} < |z| < R_{x-}$$

$$\alpha^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$x[n] = 2^{-n} \cdot \sigma[-n] \quad \rightarrow \quad x[-n] = 2^{n} \cdot \sigma[n]$$

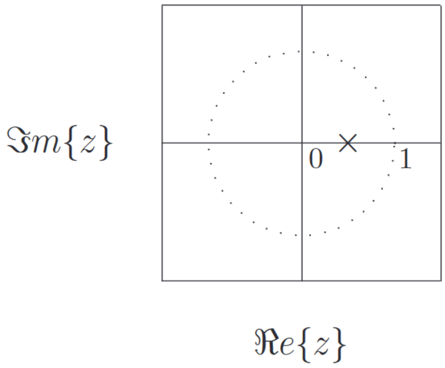
$$\mathcal{Z}(x[-n]) = \frac{z}{z-2}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-2z}$$

[3] Grafik aus Lösung übernommen

Pol-Nullstellendiagramm[4]

$$N = \infty, \qquad P = \frac{1}{2}, \qquad |z| < \frac{1}{2}$$



f) $\boldsymbol{x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}}$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \sigma[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \cdot \sigma[-n] - \delta[n]$$

$$\mathcal{Z}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \sigma[n]\right) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$\mathcal{Z}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \cdot \sigma[-n]\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z}, \qquad |z| < \frac{1}{|\alpha|}$$

$$\mathcal{Z}(\delta[n]) = 1, \qquad \forall z$$

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z} - 1$$

$$= \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2}{2 - z} - 1$$

$$= \frac{z \cdot (2 - z) + 2 \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right) - \left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot (2 - z)}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot (2 - z)}$$

$$= \frac{2z - z^2 + 2z - 1 - \left(2z - z^2 - 1 + \frac{1}{2} \cdot z\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot (2 - z)}$$

[4] Grafik aus Lösung übernommen

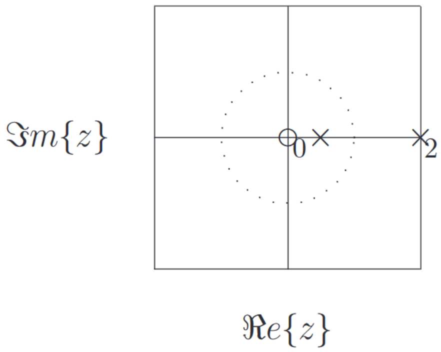
$$= \frac{2z - z^2 + 2z - 1 - 2z + z^2 + 1 - \frac{1}{2} \cdot z}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot (2 - z)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \cdot z}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot (2 - z)}$$

$$= -\frac{\frac{3}{2} \cdot z}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot (z - 2)}$$

Pol-Nullstellendiagramm[5]

$$N = 0, \infty, \qquad P = \frac{1}{2}, 2, \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2$$



g) $\boldsymbol{x[n] = n \cdot e^{-\alpha n} \cdot \sigma[n],\ |\alpha| < 1}$

Formelsammlung

$$\alpha^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - \alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$n \cdot x[n] \leftrightarrow -z \cdot \frac{dX(z)}{dz}, \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\downarrow$$

$$x[n] = n \cdot (e^{-\alpha})^n \cdot \sigma[n]$$

$$x'[n] = (e^{-\alpha})^n \cdot \sigma[n]$$

$$X'(z) = \frac{z}{z - e^{-\alpha}}$$

$$X(z) = -z \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z - e^{-\alpha}}\right)$$

[5] Grafik aus Lösung übernommen

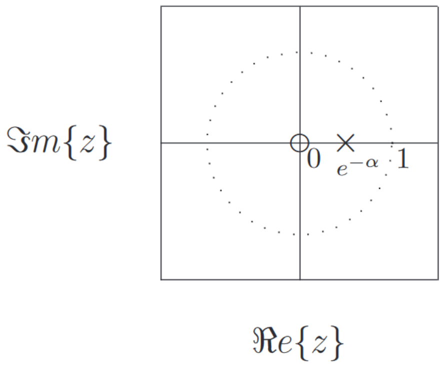
$$= -z \cdot \frac{z - e^{-\alpha} - z}{(z - e^{-\alpha})^2}$$

$$= z \cdot \frac{e^{-\alpha}}{(z - e^{-\alpha})^2}$$

$$= \frac{e^{-\alpha}}{\left(1 - e^{-\alpha} \cdot \frac{1}{z}\right)^2}$$

Pol-Nullstellendiagramm[6]

$$N = 0, \infty, \qquad P = e^{-\alpha}, \qquad e^{-\alpha} < |z| < \infty$$



h) $\boldsymbol{x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & 0 \le n \le 9 \\ 0 & n > 9 \end{cases}}$

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \cdots + \delta[n-9]$$

Formelsammlung

$$\delta[n] \leftrightarrow 1, \qquad \forall z$$

$$x[n + n_0] \leftrightarrow z^{n_0} \cdot X(z)$$

$$\downarrow$$

$$X(z) = z^0 + z^{-1} + \cdots + z^{-9}$$

$$= \sum_{n=0}^{9} (z^{-1})^n$$

$$= \frac{1 - (z^{-1})^{9+1}}{1 - (z^{-1})}$$

[6] Grafik aus Lösung übernommen

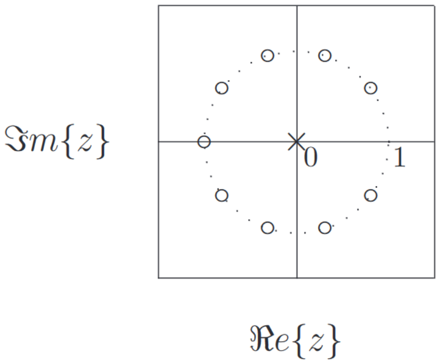
$$= \frac{1 - \frac{1}{z^{10}}}{1 - \frac{1}{z}}$$

$$= \frac{z^{10} - 1}{z^{10} - z^9}$$

$$= \frac{z^{10} - 1}{z^9 \cdot (z - 1)}$$

Pol-Nullstellendiagramm[7]

$$N = e^{j \cdot \frac{2\pi k}{10}} \text{ mit } k \in [0; 9], \qquad P = 0{,}1, \qquad |z| < \infty$$



Aufgabe 4.2:

Berechnen Sie für jede gegebene $\mathcal{Z}$-Transformation $X(z)$ die rechtsseitigen und die linksseitigen Zeitsignale $x[n]$.

a) $\boldsymbol{X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}}}$

Rechtsseitig

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C X(z) \cdot z^{n-1}\, dz = \sum_{|z_k| < \frac{1}{R_x}} Res_k\{X(z) \cdot z^{n-1}\}$$

$$Res_k\{X(z) \cdot z^{n-1}\} = \lim_{z \to P_z} \left((z - P_z) \cdot X(z) \cdot z^{n-1} \right)$$

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$P_z = \frac{1}{2}$$

[7] Grafik aus Lösung übernommen

$$Res_{\frac{1}{2}} = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\cdot z^{n-1}\right)$$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(\frac{z^{n+1}-\frac{1}{2}\cdot z^{n}}{z-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z^{n}\cdot\frac{z-\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}}(z^{n})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\downarrow$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\sigma[n]$$

Linksseitig

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\cdot\oint_{C'} X\left(\frac{1}{z}\right)\cdot z^{-n-1}\,dz = \sum_{|z_k'|<\frac{1}{R_x}} Res_k\left\{X\left(\frac{1}{z}\right)\cdot z^{-n-1}\right\}$$

$$Res_k\left\{X\left(\frac{1}{z}\right)\cdot z^{-n-1}\right\} = \lim_{z\to P_z}\left((z-P_z)\cdot X\left(\frac{1}{z}\right)\cdot z^{-n-1}\right)$$

$$X(z) = \frac{2}{2-z}$$

$$P_z = 2$$

$$Res_2 = \lim_{z\to 2}\left((z-2)\cdot\frac{2\cdot z^{-n-1}}{2-z}\right)$$

$$= -\lim_{z\to 2}(2\cdot z^{-n-1})$$

$$= -2^{-n}$$

$$\downarrow$$

$$x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\sigma[-n-1]$$

b) $\boldsymbol{X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}\right)\cdot\left(1-z^{-1}\right)}}$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}\right)\cdot\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{A}{\left(1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}\right)} + \frac{B}{(1-z^{-1})}$$

$$1 = A\cdot(1-z^{-1}) + B\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}\right)$$

$$(z = 1)$$

$$B = 2$$

$$\left(z = \frac{1}{2}\right)$$

$$A = -1$$

$$X(z) = \frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}}$$

Rechtsseitig

$$x[n] = 2\cdot\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) - \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}}\right)$$

$$= 2\cdot(1)^n\cdot\sigma[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sigma[n]$$

$$= \left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\cdot\sigma[n]$$

Linksseitig

$$x[n] = 2\cdot\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) - \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}}\right)$$

$$= -2\cdot(1)^n\cdot\sigma[-n-1] - \left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sigma[-n-1]$$

$$= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\right)\cdot\sigma[-n-1]$$

c) $\boldsymbol{X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}}{1+\frac{1}{2}\cdot z^{-1}}}$

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}}{1 + \frac{1}{2} \cdot z^{-1}}$$

$$= \frac{2z - 1}{2z + 1}$$

Rechtsseitig

$$P_z = -\frac{1}{2}$$

$$Res_k\{X(z) \cdot z^{n-1}\} = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left(\left(z + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2z - 1}{2z + 1} \cdot z^{n-1} \right)$$

$$= \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left(\left(z + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{z - \frac{1}{2}}{z + \frac{1}{2}} \cdot z^{n-1} \right)$$

$$= \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left(\left(z - \frac{1}{2} \right) \cdot z^{n-1} \right)$$

$$= (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{1} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{n} \cdot \sigma[n]$$

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} \big(X(z) \big)$$

$$= \lim_{z \to \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}}{1 + \frac{1}{2} \cdot z^{-1}} \right) = 1$$

$$x[0] = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{0} \cdot \sigma[0] + A \cdot \delta[0] = 1$$

$$A = -1$$

$$x[n] = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{n} \cdot \sigma[n] - \delta[n]$$

Linksseitig

$$P_z = -2$$

$$Res_k\left\{X\left(\frac{1}{z}\right)\cdot z^{-n-1}\right\} = \lim_{z\to-2}\left((z+2)\cdot\frac{2z^{-1}-1}{2z^{-1}+1}\cdot z^{-n-1}\right)$$

$$= \lim_{z\to-2}\left((z+2)\cdot\frac{2-z}{2+z}\cdot z^{-n-1}\right)$$

$$= \lim_{z\to-2}\left((2-z)\cdot z^{-n-1}\right)$$

$$= 4\cdot(-2)^{-n-1}$$

$$= (-2)^2\cdot(-2)^{-n-1}$$

$$= -2\cdot(-2)^{-n}$$

$$x[0] = \lim_{z\to\infty}\left(X\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left(\frac{2z^{-1}-1}{2z^{-1}+1}\right) = -1$$

$$x[0] = -2\cdot(-2)^{-0}\cdot\sigma[-0] + A\cdot\delta[0] = -1$$

$$A = 1$$

$$x[n] = -2\cdot(-2)^{-n}\cdot\sigma[-n] + \delta[n]$$

$$= -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sigma[-n] + \delta[n]$$