Gernot Polivka | 12009686 |

10. Übung

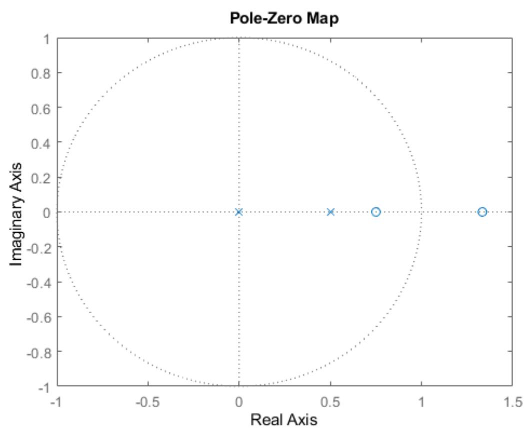
Aufgabe 4.10:

Von einem digitalen Filter sind die Pole $z_{\infty i}$ und Nullstellen z_{0i} der Übertragungsfunktion $H(z)$ gegeben:

$$z_{\infty 1} = 0,\ z_{\infty 2} = a \qquad\qquad z_{01} = b,\ z_{02} = \frac{1}{b}$$

Mit $0 < a < 1$ bzw. $0 < b < 1$ und $a \neq b$.

a) Skizzieren Sie das Pol-/Nullstellendiagramm.



$$a = 0.5, \qquad b = 0.75$$

```
% MATLAB
a = 0.5;
b = 0.75;

z = tf('z');
g = ((z-b)*(z-1/b))/(z*(z-a));

pzmap(g);
```

b) Berechnen Sie allgemein die Übertragungsfunktion $H(z)$ dieses Filters. Wie ist der Verstärkungsfaktor in Abhängigkeit von a, b zu wählen, damit $H(z)|_{z=1} = 1$ ist?

$$H(z) = k \cdot \frac{(z-b)\cdot\left(z-\frac{1}{b}\right)}{z\cdot(z-a)}$$

$$1 = k \cdot \frac{(1-b)\cdot\left(1-\frac{1}{b}\right)}{1\cdot(1-a)}$$

$$k = \frac{1-a}{(1-b)\cdot\left(1-\frac{1}{b}\right)}$$

c) Bestimmen Sie die minimalphasige Teilübertragungsfunktion $H_m(z)$ des Filters und skizzieren Sie deren Pol-/Nullstellendiagramm.

$$\text{minimalphasig}^1 \leftrightarrow |z_{0i}| < 1$$

$$\text{Allpass}^2 \leftrightarrow P = z_{\infty i},\ N = \frac{1}{z^*_{\infty i}}$$

$$H(z) = k \cdot \frac{(z-b)\cdot\left(z-\frac{1}{b}\right)}{z\cdot(z-a)} = H_m(z)\cdot H_a(z)$$

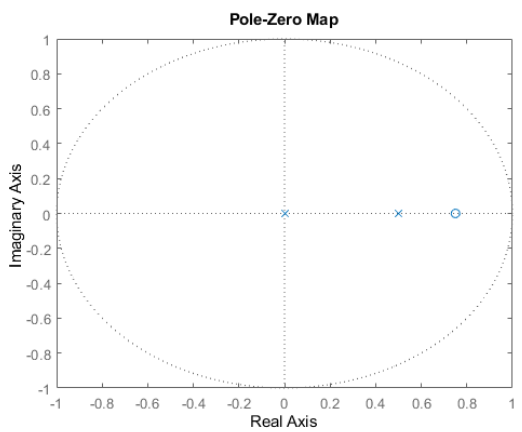
$$k \cdot \frac{(z-b)}{z\cdot(z-a)}\cdot\left(z-\frac{1}{b}\right) = H_m(z)\cdot H_a(z)$$

$$\downarrow^3$$

$$k \cdot \frac{(z-b)}{z\cdot(z-a)}\cdot\frac{(z-b)}{(z-b)}\cdot\left(z-\frac{1}{b}\right) = H_m(z)\cdot H_a(z)$$

$$k \cdot \frac{(z-b)^2}{z\cdot(z-a)}\cdot\frac{\left(z-\frac{1}{b}\right)}{(z-b)} = H_m(z)\cdot H_a(z)$$

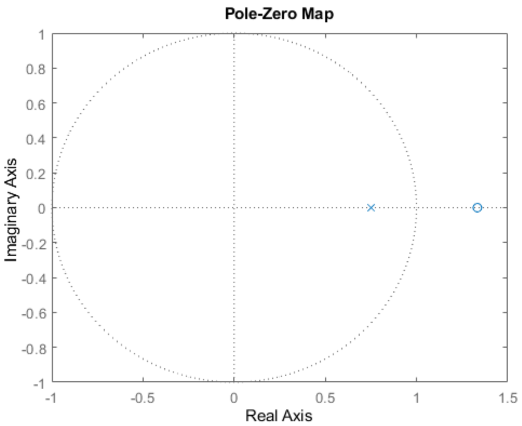
$$H_m(z) = k \cdot \frac{(z-b)^2}{z\cdot(z-a)}$$



[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Minimalphasensystem#Zeitdiskrete_Systeme
[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Allpassfilter#Pol-_und_Nullstellen
[3] Polstellen des Allpass an Nullstellen anpassen – Minimalphasensystem entsprechend anpassen

d) Bestimmen Sie die Allpassteilübertragungsfunktion $H_a(z)$ des Filters und skizzieren Sie das zugehörige Pol-/Nullstellendiagramm.

$$H_a(z) = \frac{z - \frac{1}{b}}{z - b}$$



e) Sind das minimalphasige Teilfilter und der Allpass stabil und kausal?

Eigenschaft	Pole α_n der Übertragungsfunktion
Asymptotisch stabiles System	Alle Pole α_n besitzen einen Betrag $\lvert\alpha_n\rvert < 1$
Grenzstabiles System	Alle Lösungen α_n besitzen einen Betrag $\lvert a_n\rvert < 1$, zusätzlich liegt mindestens eine einfache Lösung mit Betrag $\lvert\alpha_n\rvert = 1$ vor
Instabiles System	Es existiert mindestens eine Lösung α_n mit einem Betrag $\lvert\alpha_n\rvert > 1$ oder eine mehrfache Lösung mit Betrag $\lvert\alpha_n\rvert = 1$

$$H_m(z) = k \cdot \frac{(z-b)^2}{z \cdot (z-a)} \rightarrow \quad |a| < 1$$

$$H_a(z) = \frac{z - \frac{1}{b}}{z - b} \rightarrow \quad |b| < 1$$

Beide Teilsysteme sind stabil.

Kausal, wenn Zählergrad $M \leq$ Nennergrad N.[4]

$$H_m(z) = k \cdot \frac{(z-b)^2}{z \cdot (z-a)} \rightarrow \quad M = 2 \leq N = 2$$

$$H_a(z) = \frac{z - \frac{1}{b}}{z - b} \rightarrow \quad M = 1 \leq N = 1$$

Beide Teilsysteme sind kausal.

[4] https://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/teil-b-zeitdiskrete-signale-und-systeme/zeitdiskrete-systeme-im-z-bereich/interpretation-der-uebertragungsfunktion/uebertragungsfunktion-und-kausalitaet-von-systemen.html

f) Geben Sie (sofern möglich) für beide Teilübertragungsfunktionen $H_m(z)$ und $H_a(z)$ Realisierungen mit Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen an.[5]

Formelsammlung

$$\alpha^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$H_m(z) = k \cdot \frac{(z-b)^2}{z \cdot (z-a)}$$

$$= k \cdot \left(\frac{z^2}{z \cdot (z-a)} - 2 \cdot \frac{b \cdot z}{z \cdot (z-a)} + \frac{b^2}{z \cdot (z-a)} \right)$$

$$= \frac{zk}{z-a} + \frac{-2bk}{z-a} + \frac{b^2 k}{z \cdot (z-a)}$$

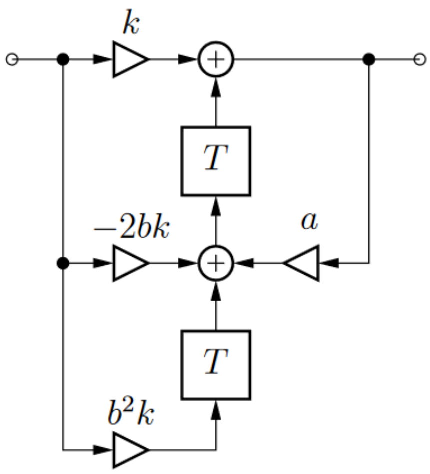
$$= \frac{zk}{z-a} + z^{-1} \cdot \frac{-2bkz}{z-a} + z^{-2} \cdot \frac{b^2 kz}{z-a}$$

$$h_m[n] = k \cdot a^n \cdot \sigma[n] - 2bk \cdot a^{n-1} \cdot \sigma[n-1] + b^{2k} \cdot a^{n-2} \cdot \sigma[n-2]$$

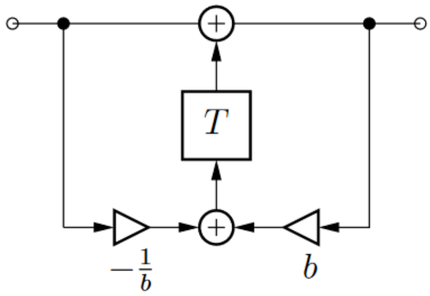
$$H_a(z) = \frac{z - \frac{1}{b}}{z-b}$$

$$= \frac{z}{z-b} + z^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) \cdot \frac{z}{z-b}$$

$$h_a[n] = b^n \cdot \sigma[n] - \frac{1}{b} \cdot b^{n-1} \cdot \sigma[n-1]$$



$H_m(z)$



$H_a(z)$

[5] Grafik aus Lösung übernommen

Aufgabe 4.11:

Es sei ein zeitdiskretes kausales LTI-System mit dem Eingangssignal $x[n]$ und dem Ausgangssignal $y[n]$ gegeben. Dieses System wird durch ein Paar von Differenzengleichungen spezifiziert, die jeweils ein Zwischensignal $w[n]$ enthalten:

$$\boldsymbol{y[n] + \frac{1}{2} \cdot y[n-1] + w[n] + w[n-1] = \frac{1}{2} \cdot x[n]}$$

$$\boldsymbol{y[n] - \frac{1}{2} \cdot y[n-1] + 2 \cdot w[n] - w[n-1] = -\frac{1}{2} \cdot x[n]}$$

a) **Bestimmen Sie den Frequenzgang $H(e^{j\theta})$ und die Impulsantwort $h[n]$ dieses Systems. Ist das System stabil?**

Formelsammlung

$$x[n - N_0] \leftrightarrow e^{-j\theta N_0} \cdot X(e^{j\theta})$$

$$y[n] + \frac{1}{2} \cdot y[n-1] + w[n] + w[n-1] = \frac{1}{2} \cdot x[n]$$

$$Y(e^{j\theta}) + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot Y(e^{j\theta}) + W(e^{j\theta}) + e^{-j\theta} \cdot W(e^{j\theta}) = \frac{1}{2} \cdot X(e^{j\theta})$$

$$Y(e^{j\theta}) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}\right) + W(e^{j\theta}) \cdot (1 + e^{-j\theta}) = \frac{1}{2} \cdot X(e^{j\theta})$$

$$W(e^{j\theta}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot X(e^{j\theta}) - Y(e^{j\theta}) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}\right)}{(1 + e^{-j\theta})}$$

$$y[n] - \frac{1}{2} \cdot y[n-1] + 2 \cdot w[n] - w[n-1] = -\frac{1}{2} \cdot x[n]$$

$$Y(e^{j\theta}) - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot Y(e^{j\theta}) + 2 \cdot W(e^{j\theta}) - e^{-j\theta} \cdot W(e^{j\theta}) = -\frac{1}{2} \cdot X(e^{j\theta})$$

$$Y(e^{j\theta}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}\right) + W(e^{j\theta}) \cdot (2 - e^{-j\theta}) = -\frac{1}{2} \cdot X(e^{j\theta})$$

$$\downarrow$$

$$Y(e^{j\theta}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}\right) + \frac{\frac{1}{2} \cdot X(e^{j\theta}) - Y(e^{j\theta}) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}\right)}{(1 + e^{-j\theta})} \cdot (2 - e^{-j\theta}) = -\frac{1}{2} \cdot X(e^{j\theta})$$

$$Y(e^{j\theta}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta} - \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}\right) \cdot (2 - e^{-j\theta})}{(1 + e^{-j\theta})}\right) = -\frac{1}{2} \cdot X(e^{j\theta}) \cdot \left(1 + \frac{(2 - e^{-j\theta})}{(1 + e^{-j\theta})}\right)$$

$$H\left(e^{j\theta}\right) = \frac{Y\left(e^{j\theta}\right)}{X\left(e^{j\theta}\right)} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\left(2 - e^{-j\theta}\right)}{\left(1 + e^{-j\theta}\right)}\right)}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta} - \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}\right) \cdot \left(2 - e^{-j\theta}\right)}{\left(1 + e^{-j\theta}\right)}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{1 + e^{-j\theta}}}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta} - \frac{2 + e^{-j\theta} - e^{j\theta} - \frac{1}{2} \cdot e^{-j2\theta}}{1 + e^{-j\theta}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{1 + e^{-j\theta}}}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta} - \frac{2 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j2\theta}}{1 + e^{-j\theta}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}\right) \cdot \left(1 + e^{-j\theta}\right) - 2 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j2\theta}}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta} + e^{-j\theta} - \frac{1}{2} \cdot e^{-j2\theta} - 2 + \frac{1}{2} \cdot e^{-j2\theta}}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}}$$

Formelsammlung

$$a^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\theta}}$$

$$h[n] = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma[n]$$

b) Bestimmen Sie eine einzelne Differenzengleichung, durch die $x[n]$ und $y[n]$ verknüpft sind.

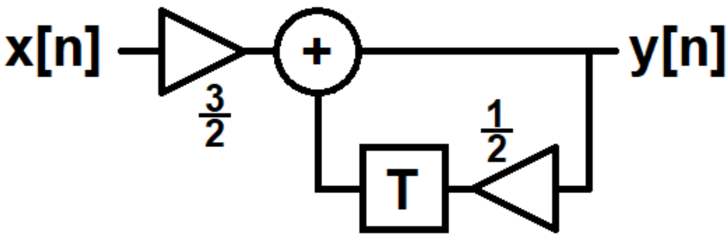
$$Y\left(e^{j\theta}\right) = H\left(e^{j\theta}\right) \cdot X\left(e^{j\theta}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}} \cdot X\left(e^{j\theta}\right)$$

$$Y\left(e^{j\theta}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\theta}\right) = \frac{3}{2} \cdot X\left(e^{j\theta}\right)$$

$$y[n] - \frac{1}{2} \cdot y[n-1] = \frac{3}{2} \cdot x[n]$$

c) **Skizzieren Sie eine Realisierung des Systems mit Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen.**



$$y[n] = \frac{3}{2} \cdot x[n] + \frac{1}{2} \cdot y[n-1]$$

Aufgabe 4.12:

Ein einfacher digitaler Klangregler lässt sich mit einem Filter mit folgender Übertragungsfunktion realisieren:

$$\boldsymbol{H(z) = b_1 + b_2 \cdot z^{-2}}$$

a) **Bestimmen Sie die Koeffizienten $\boldsymbol{b_1}$ und $\boldsymbol{b_2}$ so, dass $\boldsymbol{\left|H(e^{j0})\right| = H_0}$ und $\boldsymbol{H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right) = 1}$ ist. Skizzieren Sie einen typischen (nichttrivialen) Amplitudenfrequenzgang des Filters.**[6]

Formelsammlung

$$x[n+n_0] \leftrightarrow z_0^n \cdot X(z)$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$\delta[n-N_0] \leftrightarrow e^{-j\theta N_0}$$

$$H(z) = b_1 + b_2 \cdot z^{-2}$$

$$h[n] = b_1 \cdot \delta[n] + b_2 \cdot \delta[n-2]$$

$$H(e^{j\theta}) = b_1 + b_2 \cdot e^{-j2\theta}$$

[6] Grafik aus Lösung übernommen

$$\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right| = b_1 + b_2 = H_0$$

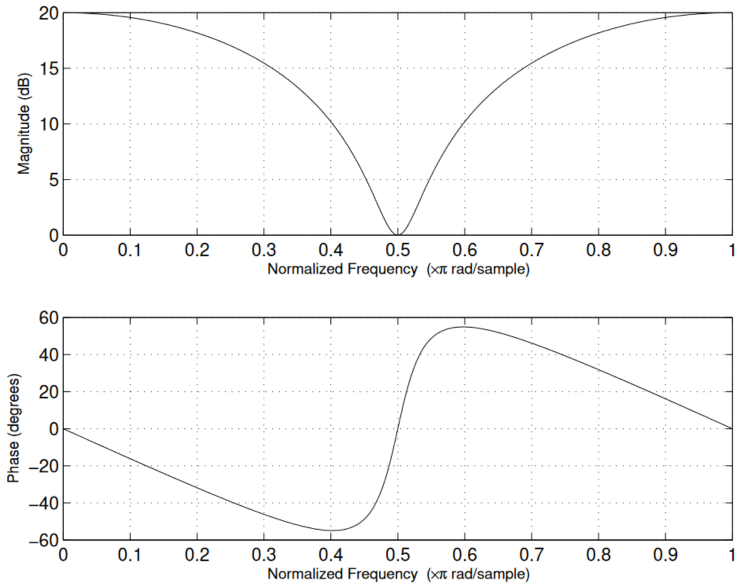
$$H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right) = b_1 + b_2 \cdot e^{-j\pi}$$

$$b_1 - b_2 = 1$$

$$b_2 = b_1 - 1$$

$$b_1 + b_1 - 1 = H_0$$

$$b_1 = \frac{H_0 + 1}{2}, \qquad b_2 = \frac{H_0 - 1}{2}$$



b) Überprüfen Sie (mit Begründung) folgende Aussagen

a. Das Filter ist rekursiv.

$$h[n] = b_1 \cdot \delta[n] + b_2 \cdot \delta[n-2]$$

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

$$= b_1 \cdot x[n] + b_2 \cdot x[n-2]$$

Das Filter ist nicht rekursiv, weil $y[n]$ explizit angegeben werden kann.

b. Das Filter besitzt einen linearen Phasengang. Wenn ja, für welche Werte der Koeffizienten?

Linearität

$$\arg\left(H\left(e^{ja\cdot(\theta_1+\theta_2)}\right)\right) = a \cdot \left(\arg\left(H\left(e^{j\theta_1}\right)\right) + \arg\left(H\left(e^{j\theta_2}\right)\right)\right)$$

$$H\left(e^{j\theta}\right) = b_1 + b_2 \cdot e^{-j2\theta}$$

$$b_1 = 0$$

$$\begin{aligned}\arg\left(H\left(e^{ja\cdot(\theta_1+\theta_2)}\right)\right) &= \arg\left(b_2 \cdot e^{-j2a\cdot(\theta_1+\theta_2)}\right)\\ &= -2a \cdot (\theta_1 + \theta_2)\\ &= a \cdot \left((-2\theta_1) + (-2\theta_2)\right)\\ &= a \cdot \left(\arg\left(H\left(e^{j\theta_1}\right)\right) + \arg\left(H\left(e^{j\theta_2}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$b_2 = 0$$

$$\begin{aligned}\arg\left(H\left(e^{ja\cdot(\theta_1+\theta_2)}\right)\right) &= \arg(b_1)\\ &= 0\\ &= a \cdot (0 + 0)\\ &= a \cdot \left(\arg\left(H\left(e^{j\theta_1}\right)\right) + \arg\left(H\left(e^{j\theta_2}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

c. Das Filter ist immer stabil.

$$y[n] = b_1 \cdot x[n] + b_2 \cdot x[n-2]$$

Für $b_1, b_2 < \infty$ ist das Filter BIBO-stabil.

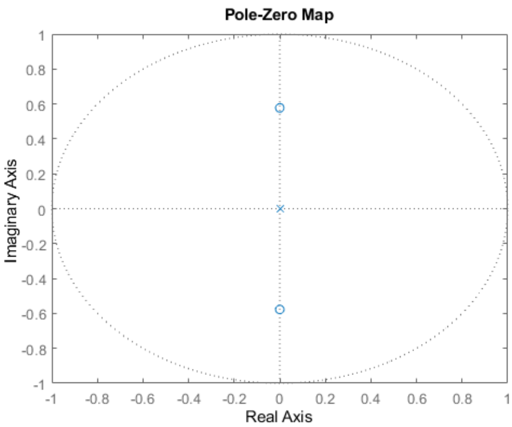
c) Zeichnen Sie ein typisches (nichttriviales) Pol-/Nullstellendiagramm für dieses Filter.

$$b_1 = \frac{H_0 + 1}{2}, \qquad b_2 = \frac{H_0 - 1}{2}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= b_1 + b_2 \cdot z^{-2} \\ &= \frac{H_0 + 1}{2} + \frac{H_0 - 1}{2 \cdot z^2} \\ &= \frac{z^2 \cdot (H_0 + 1) + H_0 - 1}{2 \cdot z^2} \\ &= (H_0 + 1) \cdot \frac{z^2 + \frac{H_0 - 1}{H_0 + 1}}{2 \cdot z^2} \end{aligned}$$

$$N_i = \pm j \cdot \sqrt{\frac{H_0 - 1}{H_0 + 1}}$$

$$P_i = 0$$



$$H_0 = 2$$

Aufgabe 5.2:

Ein einfaches Verfahren für den Entwurf von FIR-Filtern ist die Fenstermethode, bei der ein idealisiertes Filter mit der unendlich langen Impulsantwort $h_d[n]$ durch einen Filter mit endlich langer Impulsantwort

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

approximiert wird. Dabei weicht die Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ des realisierten Filters von der Übertragungsfunktion $H_d(e^{j\theta})$ des idealisierten Filters ab. Diese Abweichung sei durch das Fehlermaß

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left|H(e^{j\theta}) - H_d(e^{j\theta})\right|^2 d\theta$$

erfasst.

a) **Der spektrale Fehler $E(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta}) - H_d(e^{j\theta})$ kann als Fouriertransformation eines zeitlichen Fehlers $e[n]$ dargestellt werden:**

$$E(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \cdot e^{-j\theta n}$$

Ermitteln Sie $e[n]$ dieser Fourier-Darstellung in Abhängigkeit von $h[n]$ und $h_d[n]$.

$$e[n] = h[n] - h_d[n]$$

Formelsammlung

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\theta n}$$

Kontrolle

$$E(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \cdot e^{-j\theta n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h[n] - h_d[n]) \cdot e^{-j\theta n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j\theta n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] \cdot e^{-j\theta n}$$

$$H(e^{j\theta}) - H_d(e^{j\theta})$$

b) Drücken Sie das Fehlermaß ϵ^2 als Funktion von $e[n]$ aus.

Formelsammlung

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} X(e^{j\theta}) \cdot e^{j\theta n}\, d\theta \leftrightarrow X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\theta n}$$

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left|H(e^{j\theta}) - H_d(e^{j\theta})\right|^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left|E(e^{j\theta})\right|^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \cdot e^{-j\theta n}\right|^2 d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|e[n]|^2 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left|e^{-j\theta n}\right|^2 d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|e[n]|^2 \cdot 2\pi)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e[n]|^2$$

c) Zeigen Sie, dass das Fehlermaß ϵ^2 dann minimal ist, wenn $h[n]$ entsprechend der oben angegeben Beziehung die zeitbegrenzte Impulsantwort des idealen Filters ist.

$$h[n] = \begin{cases} a_n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$\epsilon^2(a_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e[n]|^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n - h_d[n]|^2$$

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial a_n}(a_n) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n - h_d[n]|^2\right) = 0$$

$$2 \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - h_d[n]) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - h_d[n]) = 0$$

$$a_n = h_d[n], \qquad \forall n \in [0; N-1]$$

Aufgabe 5.4:

Sie sollen mit der bilinearen $\mathcal{Z}$-Transformation ein digitales Tiefpassfilter erster Ordnung mit der 3 dB-Grenzfrequenz $f_g = \frac{f_s}{10}$ (Abtastfrequenz f_s) entwerfen. Dazu gehen Sie von einem normierten analogen Referenztiefpass mit der Übertragungsfunktion

$$\boldsymbol{H_a(s) = \frac{1}{1+s}}$$

aus.

a) **Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des digitalen Filters. Skizzieren Sie Betrags- und Phasenverlauf von $H(z)$.**[7]

Formelsammlung

$$s = \frac{1}{v} \cdot \frac{z-1}{z+1}, \qquad v = tan\left(\pi \cdot \frac{f_g}{f_s}\right), \qquad H(z) = H_a(s)\big|_{s=\frac{1}{v}\cdot\frac{z-1}{z+1}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{v} \cdot \frac{z-1}{z+1}}, \qquad v = \tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$= v \cdot \frac{z+1}{vz + v + z - 1}$$

$$= v \cdot \frac{z+1}{z \cdot (v+1) + (v-1)}$$

$$= \frac{v}{v+1} \cdot \frac{z+1}{z + \frac{v-1}{v+1}}$$

[7] Grafik aus Lösungen übernommen

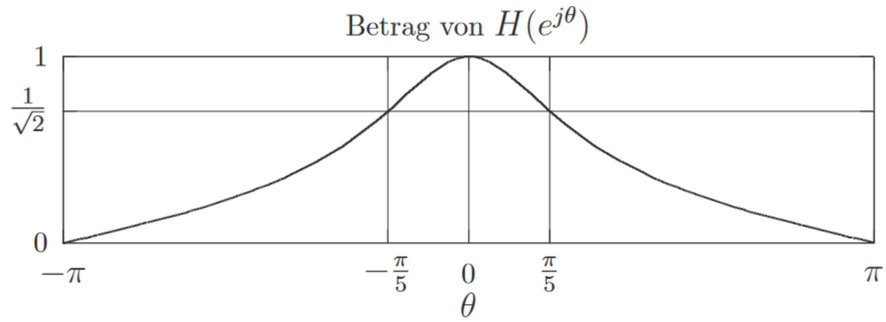
$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 + v^{-1} \cdot \frac{e^{j\theta} - 1}{e^{j\theta} + 1}}$$

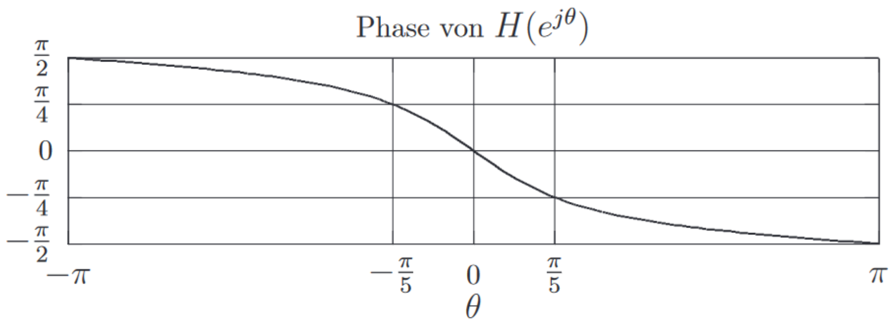
$$= \frac{1}{1 + v^{-1} \cdot \frac{e^{j\frac{\theta}{2}} \cdot \left(e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{j\frac{\theta}{2}} \cdot \left(e^{j\frac{\theta}{2}} + e^{-j\frac{\theta}{2}}\right)}}$$

$$= \frac{1}{1 + v^{-1} \cdot \frac{2j \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}}$$

$$|H(e^{j\theta})| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}\right)^2}}, \qquad \arg\left(H(e^{j\theta})\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}\right)$$





b) Berechnen Sie Impuls- und Sprungantwort des digitalen Filters.

$$H(z) = \frac{v}{v+1} \cdot \frac{z+1}{z + \frac{v-1}{v+1}}$$

$$= \frac{v}{v+1} \cdot \frac{z}{z - \frac{1-v}{v+1}} \cdot (1 + z^{-1})$$

Formelsammlung

$$\alpha^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\alpha}$$

$$h_1[n] = \frac{v}{v+1} \cdot \left(\frac{1-v}{v+1}\right)^n \cdot \sigma[n]$$

$$h_2[n-1] = h_1[n]$$

$$\downarrow$$

$$h[n] = \frac{v}{v+1} \cdot \left(\left(\frac{1-v}{v+1}\right)^n \cdot \sigma[n] + \left(\frac{1-v}{v+1}\right)^{n-1} \cdot \sigma[n-1]\right)$$

$$a[n] = h[n] * \sigma[n]$$

$$= \frac{v}{v+1} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{1-v}{v+1}\right)^k \cdot \sigma[k] + \left(\frac{1-v}{v+1}\right)^{k-1} \cdot \sigma[k-1]\right) \cdot \sigma[n-k]$$

$$= \frac{v}{v+1} \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{1-v}{v+1}\right)^k \cdot \sigma[k] \cdot \sigma[n-k]\right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{1-v}{v+1}\right)^{k-1} \cdot \sigma[k-1] \cdot \sigma[n-k]\right)\right)$$

$$= \frac{v}{v+1} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1-v}{v+1}\right)^k \cdot \sigma[n-k]\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1-v}{v+1}\right)^{k-1} \cdot \sigma[n-k]\right)\right)$$

$$= \frac{v}{v+1} \cdot \left(\sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{k} \left(\frac{1-v}{v+1}\right)^k + \sigma[n-1] \cdot \sum_{k=1}^{k} \left(\frac{1-v}{v+1}\right)^{k-1}\right)$$

$$= \frac{v}{v+1} \cdot \left(\sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{k} \left(\frac{1-v}{v+1}\right)^k + \sigma[n-1] \cdot \sum_{k=0}^{k-1} \left(\frac{1-v}{v+1}\right)^k\right)$$

$$\left(\alpha = \frac{1-v}{v+1}\right), \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

$$= \frac{v}{v+1} \cdot \left(\sigma[n] \cdot \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} + \sigma[n-1] \cdot \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\right)$$

$$= \frac{v}{v+1} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left((1-\alpha^{n+1}) \cdot \sigma[n] + (1-\alpha^n) \cdot \sigma[n-1] \right)$$

$$= \frac{v}{v+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1-v}{v+1}} \cdot \left((1-\alpha^{n+1}) \cdot \sigma[n] + (1-\alpha^n) \cdot \sigma[n-1] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left((1-\alpha^{n+1}) \cdot \sigma[n] + (1-\alpha^n) \cdot \sigma[n-1] \right)$$

c) Vergleichen Sie diese Impulsantwort mit der Impulsantwort, die man bei der Anwendung er Impulsinvarianzmethode anstelle der bilinearen $\mathcal{Z}$-Transformation erhält.[8,9]

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s-s_k} = \frac{1}{s+1}$$

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cdot e^{s_k \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

$$h[n] = \sum_{k=1}^{N} T \cdot A_k \cdot e^{s_k \cdot nT} \cdot \sigma[n]$$

$$= T \cdot e^{-nT} \cdot \sigma[n], \qquad T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{10 f_g}$$

d) Wiederholen Sie den Vergleich von Punkt c) sinngemäß für die Sprungantwort des digitalen Filters.

$$\frac{1}{s} \cdot H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s-s_k} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$a(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cdot e^{s_k \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

$$a[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k \cdot e^{s_k \cdot nT} \cdot \sigma[n]$$

$$= (1 \cdot e^{0 \cdot nT} - 1 \cdot e^{-nT}) \cdot \sigma[n] = (1 - e^{-nT}) \cdot \sigma[n], \qquad T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{10 f_g}$$

---

[8] Buch S.142

[9] In der Lösung ist für $T = 2\pi \frac{f_g}{f_s}$ gegeben, laut Buch ist $T = \frac{1}{f_s}$.