Gernot Polivka | 12009686 |

2. Übung

Aufgabe 1.5:

Das Signal $x[n]$ sei periodisch mit der Periode N. Prüfen Sie, ob das Signal $y[n] = x[Mn]$ (M ganzzahlig) ebenfalls periodisch ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Periode von $y[n]$.

Periodizität von $x[n]$

$$x[n] = x[n+N]$$

Periodizität von $y[n]$

$$y[n] = y[n+Q]$$

Einsetzen in die Definition von $y[n]$

$$y[n] = x[Mn]$$

$$x[Mn] = x[M \cdot (n+Q)]$$

$$M \cdot (n+Q) - Mn = N$$

$$n + Q - n = \frac{N}{M}$$

$$Q = \frac{N}{M}$$

Ganzzahlig machen

$$Q = \frac{N}{ggT(N, M)}$$

Aufgabe 1.6:

Die Fourierreihendarstellungen der periodischen Signale $x[n]$ und $y[n]$ sind gegebenen durch:

$$\boldsymbol{x[n] = \sum_{k=0}^{N_x-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N_x}nk} \quad \leftrightarrow \quad c_k = \frac{1}{N_x} \cdot \sum_{n=0}^{N_x-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N_x}nk}}$$

und

$$\boldsymbol{y[n] = \sum_{k=0}^{N_y-1} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N_y}nk} \quad \leftrightarrow \quad d_k = \frac{1}{N_y} \cdot \sum_{n=0}^{N_y-1} y[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N_y}nk}}$$

Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen den Fourierreihenkoeffizienten c_k und d_k für die folgenden Signalbeziehungen:

a) $\boldsymbol{y[n] = x\left[n - \frac{N}{2}\right]}$, **$N$ gerade.**

$$y[n] = x\left[n - \frac{N}{2}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(n-\frac{N}{2}\right)\cdot k}$$

$$d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(n-\frac{N}{2}\right)\cdot k}$$

$$d_k = c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(-\frac{N}{2}\right)\cdot k}$$

$$d_k = c_k \cdot e^{-j\pi k}$$

$$d_k = (-1)^k \cdot c_k$$

b) $\boldsymbol{y[n] = x[N - n]}$

$$y[n] = x[N-n]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot(N-n)\cdot k}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\cdot 2\pi\cdot k} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot n\cdot k}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot n\cdot k}$$

(rechts: $k = -k$)[1]

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} c_{-k} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot n\cdot(-k)}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} c_{-k} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = c_{-k} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$d_k = c_{-k}$$

c) $\boldsymbol{y[n] = \frac{1}{2} \cdot (x[n] + x^*[N-n])}$

$$y[n] = \frac{1}{2} \cdot (x[n] + x^*[N-n])$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot(N-n)\cdot k} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \cdot e^{-j2\pi k} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (c_k + c_k^*) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{2} \cdot (c_k + c_k^*) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$d_k = \frac{1}{2} \cdot (c_k + c_k^*)$$

$$d_k = Re(c_k)$$

[1] Siehe Addendum

d) $\boldsymbol{y[n] = x[2n]}$[2]

$$d_k = \frac{1}{N_y} \cdot \sum_{n=0}^{N_y-1} y[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N_y}nk}$$

$$= \frac{1}{N_y} \cdot \sum_{n=0}^{N_y-1} \left(x[2n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N_y}nk} \right)$$

$$= \frac{1}{N_y} \cdot \sum_{n=0}^{N_y-1} \left(\left(\sum_{l=0}^{N_x-1} c_l \cdot e^{j\frac{2\pi}{N_x}\cdot(2n)\cdot l} \right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N_y}nk} \right)$$

$$= \frac{1}{N_y} \cdot \sum_{n=0}^{N_y-1} \left(\sum_{l=0}^{N_x-1} c_l \cdot e^{j\frac{2\pi}{N_x}\cdot 2nl} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N_y}nk} \right)$$

$$= \frac{1}{N_y} \cdot \sum_{n=0}^{N_y-1} \left(\sum_{l=0}^{N_x-1} c_l \cdot e^{j\cdot 2\pi\cdot n\cdot\left(\frac{2l}{N_x} - \frac{k}{N_y}\right)} \right)$$

$\downarrow$ [3]

$$N_y = \frac{N_x}{ggT(N_x, 2)}$$

$\downarrow$

$$= \frac{ggT(N_x, 2)}{N_x} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N_x}{ggT(N_x,2)}-1} \left(\sum_{l=0}^{N_x-1} c_l \cdot e^{j\cdot 2\pi\cdot n\cdot\left(\frac{2l}{N_x} - k\cdot\frac{ggT(N_x,2)}{N_x}\right)} \right)$$

$$= \frac{ggT(N_x, 2)}{N_x} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N_x}{ggT(N_x,2)}-1} \left(\sum_{l=0}^{N_x-1} c_l \cdot e^{j\cdot\frac{2\pi}{N_x}\cdot n\cdot\left(2l - k\cdot ggT(N_x,2)\right)} \right)$$

---

[2] Hier darf man es nicht mehr so wie bei a-c machen, weil die Periodizitäten unterschiedlich sind ($N_x \neq N_y$)

[3] siehe 1.5)

Fall 1: N_x gerade $\rightarrow ggT(N_x, 2) = 2$

$$d_k = \frac{2}{N_x} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N_x}{2}-1} \left(\sum_{l=0}^{N_x-1} c_l \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{N_x} \cdot n \cdot (2l-2k)} \right)$$

$$= \frac{2}{N_x} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N_x}{2}-1} \left(\sum_{l=0}^{N_x-1} c_l \cdot e^{j \cdot 2\pi n \cdot 2 \cdot \frac{l-k}{N_x}} \right)$$

Für k-Werte wo gilt: $e^{j \cdot 2\pi n \cdot \mathbb{N}^0}$

$$2 \cdot \frac{l-k}{N_x} = \mathbb{N}^0$$

$$l - k = \mathbb{N}^0 \cdot \frac{N_x}{2}$$

$$\downarrow^{4}$$

$$l - k = 0 \ \vee \ \frac{N_x}{2}$$

$$l = k, \qquad l = k + \frac{N_x}{2}$$

$$\downarrow$$

$$d_{k,1} = \frac{2}{N_x} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N_x}{2}-1} \left(\sum_{l=k \,\wedge\, l=k+\frac{N_x}{2}} c_l \cdot 1 \right)$$

$$= \frac{2}{N_x} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N_x}{2}-1} \left(c_k + c_{k+\frac{N_x}{2}} \right)$$

$$= \frac{2}{N_x} \cdot \frac{N_x}{2} \cdot \left(c_k + c_{k+\frac{N_x}{2}} \right)$$

$$= c_k + c_{k+\frac{N_x}{2}}$$

---

[4] $\max(l, k) = N_x - 1$

Für alle anderen k-Werte wird der Kreis $\mathbb{N}$-mal vollständig durchlaufen und die Summenglieder der inneren Summe heben einander auf: [5]

$$d_{k,2} = \frac{2}{N_x} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N_x}{2}-1} \left(\sum_{l \neq k \,\wedge\, l \neq k + \frac{N_x}{2}}^{N_x - 1} c_l \cdot e^{j \cdot 4\pi n \cdot \frac{l-k}{N_x}} \right)$$

$$= \frac{2}{N_x} \cdot \sum_{l \neq k \,\wedge\, l \neq k + \frac{N_x}{2}}^{N_x - 1} \left(c_l \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N_x}{2}-1} \left(e^{j \cdot 4\pi n \cdot \frac{l-k}{N_x}} \right) \right)$$

$$= \frac{2}{N_x} \cdot \sum_{l \neq k \,\wedge\, l \neq k + \frac{N_x}{2}}^{N_x - 1} (c_l \cdot 0)$$

$$= 0$$

Lösung für gerades N:

$$d_k = d_{k,1} + d_{k.2}$$

$$= c_k + c_{k + \frac{N_x}{2}}$$

Fall 1: N_x ungerade $\rightarrow ggT(N_x, 2) = 1$

$$d_k = \frac{1}{N_x} \cdot \sum_{n=0}^{N_x - 1} \left(\sum_{l=0}^{N_x - 1} c_l \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{N_x} \cdot n \cdot (2l - k)} \right)$$

[5] Im diskreten Bereich braucht ein vollständiger Durchlauf eines in N Teile geteilten Kreises $N - 1$ Schritte, weil man mit einem N-ten Schritt den Startpunkt doppelt zählen würde.

Für k-Werte wo gilt: $e^{j\cdot 2\pi n\cdot \mathbb{N}^0}$

$$\frac{2l-k}{N_x} = \mathbb{N}^0$$

$$2l-k = \mathbb{N}^0 \cdot N_x$$

$$\downarrow ^6$$

$$2l-k = 0 \lor N_x$$

$$l = \begin{cases} \dfrac{k}{2} & k \dots gerade \\ \dfrac{N_x+k}{2} & k \dots ungerade \end{cases}$$

$$d_{k,\text{ungerade}} = \frac{1}{N_x} \cdot \sum_{n=0}^{N_x-1} \left(\sum_{l=\frac{N_x+k}{2}} c_l \cdot 1 \right)$$

$$= \frac{1}{N_x} \cdot \sum_{n=0}^{N_x-1} c_{\frac{N_x+k}{2}}$$

$$= \frac{1}{N_x} \cdot N_x \cdot c_{\frac{N_x+k}{2}}$$

$$= c_{\frac{N_x+k}{2}}$$

$$d_{k,\text{gerade}} = c_{\frac{k}{2}}$$

$$d_k = \begin{cases} c_k + c_{k+\frac{N}{2}} & N_x \text{ gerade} \\ c_{\frac{k}{2}} & N_x \text{ ungerade}, k \text{ gerade} \\ c_{\frac{k+N_x}{2}} & N_x \text{ ungerade}, k \text{ ungerade} \end{cases}$$

---

6 $\max(l,k) = N_x - 1$

e) $\boldsymbol{y[n] = x[n] \cdot cos\left(2\pi \cdot \frac{L}{M} \cdot n\right)}$, $\boldsymbol{L}$ **und** $\boldsymbol{M}$ **ganzzahlig**

$$y[n] = x[n] \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{j2\pi n \cdot \frac{L}{M}} + e^{-j2\pi n \cdot \frac{L}{M}}\right)$$

$$\downarrow$$

Formelsammlung

$$e^{j\frac{2\pi m}{N}n} \cdot x[n] \leftrightarrow c_{k-m}$$

Herleitung der Formel:

$$d_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi m}{N}n} \cdot x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{j\frac{2\pi n}{N} \cdot (m-k)}$$

$$k = k + m$$

$$d_{k+m} = c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$d_k = c_{k-m}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2\pi m}{N} n = 2\pi n \cdot \frac{L}{M}$$

$$m = N \cdot \frac{L}{M}$$

$$\downarrow \text{ 7,8}$$

$$d_k = \frac{1}{2} \cdot \left(c_{k+\frac{L}{M}N} + c_{k-\frac{L}{M}N}\right)$$

[7] angenommen, dass $\frac{L}{M}N$ ganzzahlig ist

[8] Fourier-Transformation ist linear: $x_1 + x_2 \leftrightarrow X_1 + X_2$

f) $\boldsymbol{y[n] = x^2[n]}$

Formelsammlung

$$x[n] \cdot y[n] \leftrightarrow \sum_{l=0}^{N-1} c_l \cdot d_{k-l}$$

Herleitung der Formel:[9]

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$$

$$\left(\sum_{l=0}^{N-1} c_l \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nl}\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{N-1} d_i \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}ni}\right)$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} c_l \cdot d_i \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}n(l+i)}$$

$$k = l + i$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} c_l \cdot d_{k-l}\right) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Koeffizientenvergleich mit $y[n]$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$d_k = \sum_{l=0}^{N-1} c_l \cdot d_{k-l}$$

$$\downarrow$$

$$x^2[n] = x[n] \cdot x[n]$$

$$d_k = \sum_{l=0}^{N-1} c_l \cdot c_{k-l}$$

[9] Nicht sicher, ob sich die Grenzen bei endlichen Summen bei der Substitution nicht auch verändern…(?) „Signal und Systemtheorie", Thomas Frey, Martin Bossert – Seite 42 f.

Gernot Polivka | 12009686 |

Aufgabe 1.7:

Für die gegebenen periodischen Signale bestimme man die Fourierreihenkoeffizienten c_k:

a) $\boldsymbol{x[n] = 1 - cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right)}$

$$x[n] = 1 - cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right)$$
$$= e^{j\frac{2\pi \cdot 0}{N}n} - \frac{1}{2} \cdot \left(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right)$$

Periodizität:

$$\frac{\pi}{4} \cdot N = 2\pi$$
$$n = 8$$

Formelsammlung

$$e^{j\frac{2\pi m}{N}n} \leftrightarrow \delta[k - m]$$

Herleitung der Formel:

$$d_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$
$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi n}{N}m} \cdot e^{-j\frac{2\pi n}{N}k}$$
$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi n}{N}\cdot(m-k)}$$

Wenn $k \neq m$ heben einander die Summenglieder auf,
weil $N - 1$ einem (oder mehreren) ganzen Umläufen entspricht.

Für $k = m$:

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi n}{N}\cdot 0}$$
$$= \frac{1}{N} \cdot (N \cdot 1)$$
$$= 1$$
$$\downarrow$$
$$\delta[k - m]$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2\pi m}{N} n = \frac{\pi}{4} n$$

$$m = 1$$

$$c_k = \delta_8[k] - \frac{1}{2} \cdot \delta_8[k-1] - \frac{1}{2} \cdot \delta_8[k+1]$$

$$mit\ \delta_N[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[k - lN]$$

b) $\boldsymbol{x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, -2 \leq n \leq 3,}$ **und** $\boldsymbol{x[n+6] = x[n]}$

$$N = 6$$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=-2}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}nk}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot(n-2)\cdot k}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}k} \cdot \sum_{n=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}nk}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}k} \cdot \sum_{n=0}^{5} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}k}\right)^n$$

Geometrische Summenformel:

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

$$c_k = \frac{2}{3} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}k} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}k}\right)^6}{1 - \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}k}\right)}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}k} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot e^{-j2\pi k}}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}k}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}k} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}k}}$$

c) $\boldsymbol{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-3k]}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-3k]$$

$$N = 3$$

$$\downarrow$$

Formelsammlung:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-mN] = \frac{1}{N}$$

Herleitung der Formel:

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-mN] \right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Wenn $n \neq mN$ ist liefert die Summe 0.

In allen anderen Fällen kann $\delta = 1$ gesetzt werden:

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0, n\neq kN}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Weil n nur bis $N-1$ läuft ist die Bedingung $n \neq mN$ schon für $m = 1$ irrelevant. Damit bleibt nur noch $n = 0$ übrig:

$$= \frac{1}{N}$$

$$\downarrow$$

$$c_k = \frac{1}{3}$$

Addendum

1.6 b)

Man will erreichen, dass in den Summen alles gleich ist und nur mehr d_k und c_k für den Koeffizientenvergleich übrigbleiben.

Vor dem $k = -k$ dreht sich die e-Funktion links in positive, rechts in negative Richtung - liefert aber auf beiden Seiten die gleichen Werte - nur halt bei anderen Summengliedern ($/k$-Werten).

Es würde schon reichen, wenn man die Summenglieder nur umsortieren würde - bzw. den Koeffizientenvergleich zwischen den zusammenpassenden (→ von der e-Funktion vorgegeben) Summengliedern machen würde.

Die Paare wären dabei:
links $k = 1$ und rechts $k = N - 1$
links $k = 2$ und rechts $k = N - 2$
usw.

Die Werte sind also genau gespiegelt:

$$d_1 = c_{N-1}$$
$$d_2 = c_{N-2}$$

Diese Spiegelung von den c-Werten kann man durch einen negativen k Index abkürzen. Die Werte von c's mit negativen Indizes bekommt man wegen der Periodizität durch addieren von N:[10]

$$c_{-1} = c_{N-1}$$
$$c_{-2} = c_{N-2}$$

Es ist aber nur eine kürzere Schreibweise, $d_k = c_{N-k}$ wäre auch richtig...

[10] https://dsp.stackexchange.com/questions/75573/discrete-fourier-transform-with-negative-frequencies