Gernot Polivka | 12009686 |

9. Übung

Aufgabe 4.6:

Für jede der angegebenen Differenzengleichungen mit zugehöriger Anfangsbedingung für $y[-1]$ und dem Anregungssignal $x[n]$ berechne man mit Hilfe der $\mathcal{Z}$-Transformation das Signal $y[n]$.

a) $\boldsymbol{y[n] + 3 \cdot y[n-1] = x[n],\ y[-1] = 1,\ x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma[n]}$

Formelsammlung

$$x[n+n_0] \leftrightarrow z^{n_0} \cdot X(z), \qquad R_{x_-} < |z| < R_{x_+}$$

$$\alpha^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

Lösung von Differenzengleichungen mit der ZT

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Natürlich gilt $Y(z) = \mathcal{ZT}_1\{y[n]\}$ und $X(z) = \mathcal{ZT}_1\{x[n]\}$

Anwendung der einseitigen ZT auf die Signale $y[n-k]$:

$$\mathcal{ZT}_1\{y[n-k]\} = \underbrace{z^{-k} \sum_{m=1}^{k} y[-m] z^m}_{\text{Anfangsbedingungen}} + z^{-k} Y(z)$$

Anwendung der einseitigen ZT auf die Signale $x[n-k]$:

$$\mathcal{ZT}_1\{x[n-k]\} = \underbrace{z^{-k} \sum_{m=1}^{k} x[-m] z^m}_{\text{Anfangsbedingungen}} + z^{-k} X(z)$$

52

$$x[n-1] \leftrightarrow x[-1] + z^{-1} \cdot X(z)$$

$$X(z) = Y(z) + 3 \cdot (z^{-1} \cdot Y(z) + y[-1])$$

$$\frac{z}{z-\frac{1}{2}} = Y(z) + 3 \cdot (z^{-1} \cdot Y(z) + 1)$$

$$\frac{z}{z-\frac{1}{2}} = Y(z) \cdot (1 + 3 \cdot z^{-1}) + 3$$

$$Y(z) = \left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - 3\right) \cdot \frac{1}{1 + 3 \cdot z^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \cdot \frac{z}{z+3} - 3 \cdot \frac{z}{z+3}$$

$$\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \cdot \frac{z}{z+3} = \frac{A \cdot z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B \cdot z}{z+3}$$

$$z = A \cdot (z+3) + B \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(z = \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} = A \cdot \left(\frac{1}{2} + 3\right)$$

$$A = \frac{1}{7}$$

$$(z = -3)$$

$$-3 = B \cdot \left(-3 - \frac{1}{2}\right)$$

$$B = \frac{6}{7}$$

$$Y(z) = \frac{1}{7} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \left(\frac{6}{7} - 3\right) \cdot \frac{z}{z+3}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{15}{7} \cdot (-3)^n\right) \cdot \sigma[n]$$

b) $\boldsymbol{y[n] - \frac{1}{2} \cdot y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2} \cdot x[n-1],\ y[-1] = 0,\ x[n] = \sigma[n]}$

Formelsammlung

$$x[n+n_0] \leftrightarrow z^{n_0} \cdot X(z), \qquad R_{x_-} < |z| < R_{x_+}$$

$$\alpha^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$x[n-1] \leftrightarrow x[-1] + z^{-1} \cdot X(z)$$

$$Y(z) - \frac{1}{2} \cdot \left(y[-1] + z^{-1} \cdot Y(z)\right) = X(z) - \frac{1}{2} \cdot \left(x[-1] + z^{-1} \cdot X(z)\right)$$

$$Y(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right) = X(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right)$$

$$Y(z) = X(z)$$

$$y[n] = x[n] = \sigma[n]$$

c) $\boldsymbol{y[n] - \frac{1}{2} \cdot y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2} \cdot x[n-1],\ y[-1] = 1,\ x[n] = \sigma[n]}$

Formelsammlung

$$\sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1$$

$$Y(z) - \frac{1}{2} \cdot \left(y[-1] + z^{-1} \cdot Y(z)\right) = X(z) - \frac{1}{2} \cdot \left(x[-1] + z^{-1} \cdot X(z)\right)$$

$$Y(z) - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + z^{-1} \cdot Y(z)\right) = X(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right)$$

$$Y(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right) - \frac{1}{2} = X(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right)$$

$$Y(z) = \frac{\frac{z}{z-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right) + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{z}{z-1} \cdot \frac{2z-1}{2z}}{\frac{2z-1}{2z}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z-1} + \frac{z}{2z-1}$$

$$= \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$\downarrow$$

$$y[n] = \sigma[n] + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \sigma[n]$$

$$= \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \cdot \sigma[n]$$

Aufgabe 4.7:

Verwenden Sie die $\mathcal{Z}$-Transformation zur Berechnung von Impuls- und Sprungantwort des folgenden kausalen Systems:

$$\boldsymbol{y[n] - 2\rho \cdot cos(\varphi) \cdot y[n-1] + \rho^2 \cdot y[n-2] = x[n]}$$

$$Y(z) - 2\rho \cdot \cos(\varphi) \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + \rho^2 \cdot z^{-2} \cdot Y(z) = X(z)$$
$$Y(z) \cdot (1 - 2\rho \cdot \cos(\varphi) \cdot z^{-1} + \rho^2 \cdot z^{-2}) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$
$$= \frac{1}{1 - 2\rho \cdot \cos(\varphi) \cdot z^{-1} + \rho^2 \cdot z^{-2}}$$
$$= \frac{z^2}{z^2 - 2\rho z \cdot \cos(\varphi) + \rho^2}$$

Formelsammlung

$$\rho^n \cdot \sin(\alpha n) \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{\rho z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2\rho z \cdot \cos(\alpha) + \rho^2}$$

$$\frac{z}{z^2 - 2\rho z \cdot \cos(\varphi) + \rho^2} = \frac{A \cdot \rho z \cdot \sin(\varphi)}{z^2 - 2\rho z \cdot \cos(\varphi) + \rho^2}$$
$$A = \frac{1}{\rho \cdot \sin(\alpha)}$$

$$h[n-1] = \frac{1}{\rho \cdot \sin(\varphi)} \cdot \rho^n \cdot \sin(\varphi n) \cdot \sigma[n]$$
$$h[n] = \frac{1}{\rho \cdot \sin(\varphi)} \cdot \rho^{n+1} \cdot \sin\big(\varphi \cdot (n+1)\big) \cdot \sigma[n+1]$$
$$= \rho^n \cdot \frac{\sin\big(\varphi \cdot (n+1)\big)}{\sin(\varphi)} \cdot \sigma[n+1]$$
$$\downarrow ^{1}$$
$$= \rho^n \cdot \frac{\sin\big(\varphi \cdot (n+1)\big)}{\sin(\varphi)} \cdot \sigma[n]$$

[1] Für Kausalität $h[n < 0] = 0$

$$a[n] = h[n] * \sigma[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot \sigma[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho^n \cdot \frac{\sin\big(\varphi \cdot (n+1)\big)}{\sin(\varphi)} \cdot \sigma[n] \cdot \sigma[n-k]$$

$$= \frac{1}{\sin(\varphi)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \rho^n \cdot \sin\big(\varphi \cdot (n+1)\big) \cdot \sigma[n-k]$$

$$= \frac{1}{\sin(\varphi)} \cdot \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} \rho^n \cdot \sin\big(\varphi \cdot (n+1)\big)$$

$$= \frac{1}{\sin(\varphi)} \cdot \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} \rho^n \cdot \frac{e^{j\varphi \cdot (n+1)} - e^{-j\varphi \cdot (n+1)}}{2j}$$

$$= \frac{1}{\sin(\varphi)} \cdot \sigma[n] \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\varphi} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\rho \cdot e^{j\varphi}\right)^n - e^{-j\varphi} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\rho \cdot e^{-j\varphi}\right)^n\right)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin(\varphi)} \cdot \sigma[n] \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\varphi} \cdot \frac{1-\left(\rho \cdot e^{j\varphi}\right)^{n+1}}{1-\rho \cdot e^{j\varphi}} - e^{-j\varphi} \cdot \frac{1-\left(\rho \cdot e^{-j\varphi}\right)^{n+1}}{1-\rho \cdot e^{-j\varphi}}\right)$$

$$= \cdots \cdot \left(\frac{e^{j\varphi} - \rho^{n+1} \cdot e^{j\varphi \cdot (n+2)}}{1-\rho \cdot e^{j\varphi}} - \frac{e^{-j\varphi} - \rho^{n+1} \cdot e^{-j\varphi \cdot (n+2)}}{1-\rho \cdot e^{-j\varphi}}\right)$$

$$= \cdots \cdot \left(\frac{\left(e^{j\varphi} - \rho^{n+1} \cdot e^{j\varphi \cdot (n+2)}\right) \cdot \left(1-\rho \cdot e^{-j\varphi}\right) - \left(e^{-j\varphi} - \rho^{n+1} \cdot e^{-j\varphi \cdot (n+2)}\right) \cdot \left(1-\rho \cdot e^{j\varphi}\right)}{1-\rho \cdot e^{j\varphi} - \rho \cdot e^{-j\varphi} + \rho^2}\right)$$

$$= \cdots \cdot \left(\frac{e^{j\varphi} - \rho^{n+1} \cdot e^{j\varphi \cdot (n+2)} - \rho + \rho^{n+2} \cdot e^{j\varphi \cdot (n+1)} - \left(e^{-j\varphi} - \rho^{n+1} \cdot e^{-j\varphi \cdot (n+2)} - \rho + \rho^{n+2} \cdot e^{-j\varphi \cdot (n+1)}\right)}{1-\rho \cdot \left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right) + \rho^2}\right)$$

$$= \cdots \cdot \left(\frac{e^{j\varphi} - \rho^{n+1} \cdot e^{j\varphi \cdot (n+2)} - \rho + \rho^{n+2} \cdot e^{j\varphi \cdot (n+1)} - e^{-j\varphi} + \rho^{n+1} \cdot e^{-j\varphi \cdot (n+2)} + \rho - \rho^{n+2} \cdot e^{-j\varphi \cdot (n+1)}}{1-2\rho \cdot \cos(\varphi) + \rho^2}\right)$$

$$= \cdots \cdot \left(\frac{\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) + \rho^{n+2} \cdot \left(e^{j\varphi \cdot (n+1)} - e^{-j\varphi \cdot (n+1)}\right) - \rho^{n+1} \cdot \left(e^{j\varphi \cdot (n+2)} - e^{-j\varphi \cdot (n+2)}\right)}{1-2\rho \cdot \cos(\varphi) + \rho^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin(\varphi)} \cdot \sigma[n] \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(\frac{2j \cdot \sin(\varphi) + \rho^{n+2} \cdot 2j \cdot \sin\big(\varphi \cdot (n+1)\big) - \rho^{n+1} \cdot 2j \cdot \sin\big(\varphi \cdot (n+2)\big)}{1-2\rho \cdot \cos(\varphi) + \rho^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin(\varphi)} \cdot \sigma[n] \cdot \left(\frac{\sin(\varphi) + \rho^{n+2} \cdot \sin\big(\varphi \cdot (n+1)\big) - \rho^{n+1} \cdot \sin\big(\varphi \cdot (n+2)\big)}{1-2\rho \cdot \cos(\varphi) + \rho^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1-2\rho \cdot \cos(\varphi) + \rho^2} \cdot \left(1 - \frac{\rho^{n+1} \cdot \sin\big(\varphi \cdot (n+2)\big) - \rho^{n+2} \cdot \sin\big(\varphi \cdot (n+1)\big)}{\sin(\varphi)}\right) \cdot \sigma[n]$$

Aufgabe 4.9:

Ein FIR-Filter habe die Impulsantwort

$$\boldsymbol{h[n]} = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha^n} & \boldsymbol{n = 0, \dots, N-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{sonst} \end{cases}$$

mit reellwertigem α. Filter mit einer Impulsantwort endlicher Dauer, werden üblicherweise mit nichtrekursiven Strukturen (z.B. Transversalfilter) implementiert.

a) **Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ und das Pol-/Nullstellendiagramm für das gegebene Filter. Für welche Werte α ist das Filter stabil?**

Formelsammlung

$$\alpha^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$x[n+n_0] \leftrightarrow z^{n_0} \cdot X(z), \qquad R_{x_-} < |z| < R_{x_+}$$

$$h[n] = \alpha^n \cdot (\sigma[n] - \sigma[n-N])$$
$$= \alpha^n \cdot \sigma[n] - \alpha^N \cdot \alpha^{n-N} \cdot \sigma[n-N]$$

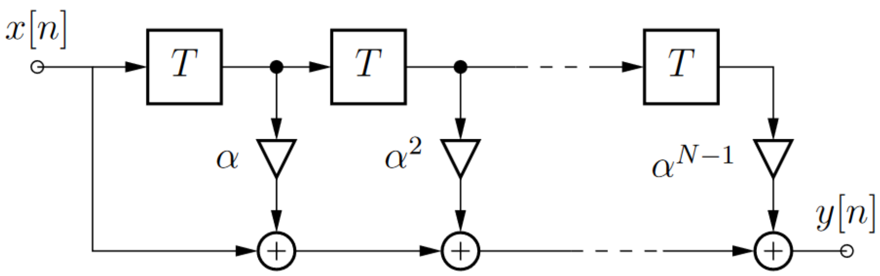
$$H(z) = \frac{z}{z-\alpha} - \alpha^N \cdot z^{-N} \cdot \frac{z}{z-\alpha}$$
$$= z \cdot \frac{1 - \alpha^N \cdot z^{-N}}{z-\alpha}$$
$$= \frac{z}{z^N} \cdot \frac{z^N - \alpha^N}{z-\alpha}$$
$$= \frac{1}{z^{N-1}} \cdot \frac{z^N - \alpha^N}{z-\alpha}$$

$$N = \alpha \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi k}{N}} \text{ mit } k \in [1; N-1],\ P = 0$$

Eigenschaft	Pole α $_n$ der Übertragungsfunktion
Asymptotisch stabiles System	Alle Pole α $_n$ besitzen einen Betrag |α $_n$| < 1
Grenzstabiles System	Alle Lösungen α $_n$ besitzen einen Betrag |a $_n$| < 1, zusätzlich liegt mindestens eine einfache Lösung mit Betrag |α $_n$| = 1 vor
Instabiles System	Es existiert mindestens eine Lösung α $_n$ mit einem Betrag |α $_n$| > 1 oder eine mehrfache Lösung mit Betrag |α $_n$| = 1

Stabil für alle $\alpha < \infty$

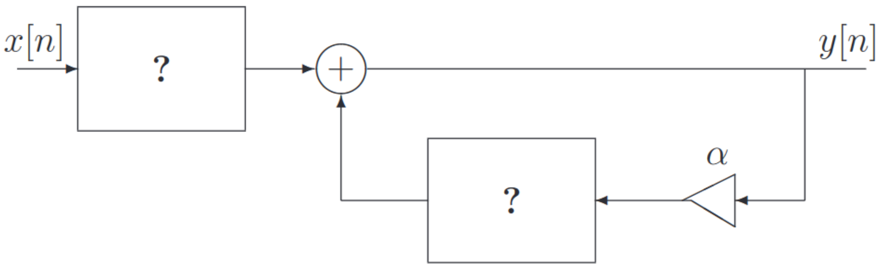
b) Skizzieren Sie eine nichtrekursive Filterstruktur (Transversalfilter) mit der die gegebene Impulsantwort realisiert werden kann.[2]



c) Wie viele Additionen, Multiplikationen und Speicherelemente benötigt diese Struktur in Abhängigkeit von N?

$N-1$ Stück von allem.

d) Zeigen Sie, dass die gegebene Impulsantwort endlicher Dauer auch mit folgendem rekursiven System erzeugt werden kann. Bestimmen Sie dazu die beiden mit „?" gekennzeichneten (linearen und zeitinvarianten) Teilfilter.



$$Y(z) = H_1(z) \cdot X(z) + Y(z) \cdot \alpha \cdot H_2(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 - \alpha \cdot H_2(z)}$$

$$\frac{1}{z^{N-1}} \cdot \frac{z^N - \alpha^N}{z - \alpha} = \frac{H_1(z)}{1 - \alpha \cdot H_2(z)}$$

$$\frac{H_1(z)}{1 - \alpha \cdot H_2(z)} = \frac{z^N - \alpha^N}{z^N - \alpha \cdot z^{N-1}}$$

$$= \frac{1 - \alpha^N \cdot z^{-N}}{1 - \alpha \cdot z^{-1}}$$

$$H_1(z) = 1 - \alpha^N \cdot z^{-N}, \qquad H_2(z) = z^{-1}$$

[2] aus Lösung übernommen

e) Für welche Werte von α ist das rekursive Filter stabil?

Eigenschaft	Pole α_n der Übertragungsfunktion
Asymptotisch stabiles System	Alle Pole α_n besitzen einen Betrag $\lvert\alpha_n\rvert < 1$
Grenzstabiles System	Alle Lösungen α_n besitzen einen Betrag $\lvert a_n\rvert < 1$, zusätzlich liegt mindestens eine einfache Lösung mit Betrag $\lvert\alpha_n\rvert = 1$ vor
Instabiles System	Es existiert mindestens eine Lösung α_n mit einem Betrag $\lvert\alpha_n\rvert > 1$ oder eine mehrfache Lösung mit Betrag $\lvert\alpha_n\rvert = 1$

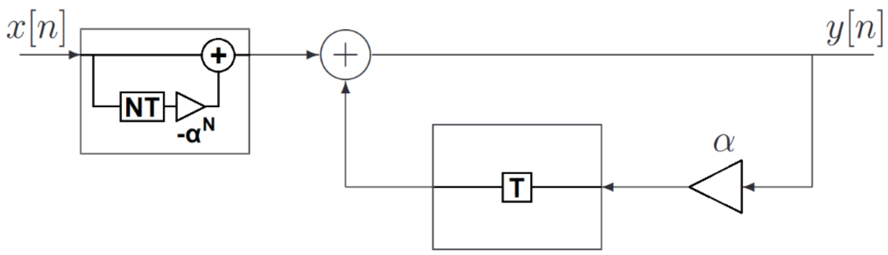
$$\frac{1}{H(z)} = \frac{1 - \alpha \cdot z^{-1}}{1 - \alpha^N \cdot z^{-N}} = 0$$

$$0 = 1 - \alpha \cdot z^{-1}$$

$$z = \alpha$$

Stabil für $|\alpha| < 1$

f) Vergleichen Sie die Komplexität (Anzahl Additionen, Multiplikationen und Speicherelemente) mit jener des Transversalfilters.



2 Additionen, 2 Multiplikationen, $N + 1$ Speicherelemente