8. Übung

Aufgabe 4.3:

Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch und bestimmen Sie Pole und Nullstellen. Wählen Sie den Konvergenzbereich derart, dass Sie ein rechtsseitiges Signal erhalten und berechnen Sie dieses.

a) $\boldsymbol{H(z) = \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(z-\frac{1}{4}\right)}}$

$$\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(z-\frac{1}{4}\right)} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-\frac{1}{4}}$$

$$1 = A\cdot\left(z-\frac{1}{4}\right) + B\cdot\left(z-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(z=\frac{1}{4}\right)$$

$$1 = A\cdot 0 + B\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$$B = -4$$

$$\left(z=\frac{1}{2}\right)$$

$$1 = A\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + B\cdot 0$$

$$A = 4$$

$$H(z) = z\cdot\left(\frac{4}{z-\frac{1}{2}} - \frac{4}{z-\frac{1}{4}}\right) = 4\cdot\left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-\frac{1}{4}}\right)$$

$$N = 0, \qquad P = \frac{1}{2},\frac{1}{4}$$

Formelsammlung

$$\alpha^n\cdot\sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$h[n] = 4\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\cdot\sigma[n], \qquad \infty \geq |z| > \max\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

b) $\boldsymbol{H(z) = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{4}\right)}}$

$$\frac{1}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{4}\right)} = \frac{A}{z-\frac{1}{3}} + \frac{B}{z+\frac{1}{4}}$$

$$1 = A\cdot\left(z+\frac{1}{4}\right) + B\cdot\left(z-\frac{1}{3}\right)$$

$$\left(z = -\frac{1}{4}\right)$$

$$1 = B\cdot\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$$

$$B = -\frac{12}{7}$$

$$\left(z = \frac{1}{3}\right)$$

$$1 = A\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$A = \frac{12}{7}$$

$$H(z) = \frac{12}{7}\cdot\left(\frac{1}{z-\frac{1}{3}} - \frac{1}{z+\frac{1}{4}}\right)$$

$$N = \infty, \qquad P = -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$$

Formelsammlung

$$x[n+n_0] \leftrightarrow z^{n_0}\cdot X(z), \qquad R_{x_-} < |z| < R_{x_+}$$

$$\alpha^n\cdot\sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$H'(z) = \frac{12}{7}\cdot\left(\frac{z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{z}{z+\frac{1}{4}}\right)$$

$$h'[n] = \frac{12}{7}\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)\cdot\sigma[n]$$

$$h[n] = h'[n-1]$$
$$= \frac{12}{7} \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) \cdot \sigma[n-1]$$
$$= \frac{12}{7} \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n}\right) \cdot \sigma[n-1], \qquad \infty \geq |z| > \max\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

c) $\boldsymbol{H(z) = \frac{1}{(3z-1)\cdot(6z-1)\cdot(2z-1)}}$

$$\frac{1}{(3z-1)\cdot(6z-1)\cdot(2z-1)} = \frac{A}{3z-1} + \frac{B}{6z-1} + \frac{C}{2z-1}$$
$$1 = A \cdot (6z-1) \cdot (2z-1) + B \cdot (3z-1) \cdot (2z-1) + C \cdot (3z-1) \cdot (6z-1)$$
$$\left(z = \frac{1}{6}\right)$$
$$1 = B \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{6} - 1\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{6} - 1\right)$$
$$1 = B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$B = 3$$

$$\left(z = \frac{1}{2}\right)$$
$$1 = C \cdot (3z-1) \cdot (6z-1)$$
$$1 = C \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdot (3-1)$$
$$1 = C \cdot \frac{1}{2} \cdot 2$$
$$C = 1$$

$$\left(z = \frac{1}{3}\right)$$
$$1 = A \cdot (6z-1) \cdot (2z-1) + B \cdot (3z-1) \cdot (2z-1) + C \cdot (3z-1) \cdot (6z-1)$$
$$1 = A \cdot (2-1) \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right)$$
$$1 = A \cdot (1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$A = -3$$

$$H(z) = -\frac{3}{3z-1} + \frac{3}{6z-1} + \frac{1}{2z-1}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-\frac{1}{6}} - \frac{1}{z-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-\frac{1}{2}}$$
$$N = \infty, \qquad P = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$$

Formelsammlung

$$x[n+n_0] \leftrightarrow z^{n_0} \cdot X(z), \qquad R_{x_-} < |z| < R_{x_+}$$
$$\alpha^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$H'(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{6}} - \frac{z}{z-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$
$$h'[n] = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{6}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \cdot \sigma[n]$$

$$h[n] = h'[n-1]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) \cdot \sigma[n-1]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n - 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \cdot \sigma[n-1]$$
$$= \left(3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \cdot \sigma[n-1], \qquad \infty \geq |z| > \max\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

d) $\boldsymbol{H(z) = \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}}$ **(nur Partialbruchzerlegung)**

$$\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$z = A \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right) + B$$
$$\left(z = \frac{1}{2}\right)$$
$$B = \frac{1}{2}$$

$$(z = 1)$$

$$1 = A \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$A = 1$$

$$H(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}$$

Aufgabe 4.4:

Ein kausales LTI-System sei durch die folgende Differenzengleichung charakterisiert:

$$\boldsymbol{y[n] - \frac{1}{2} \cdot y[n-1] + \frac{1}{4} \cdot y[n-2] = x[n]}$$

a) **Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $\boldsymbol{H(z)}$ dieses Systems.**

Formelsammlung

$$x[n + n_0] \leftrightarrow z^{n_0} \cdot X(z), \qquad R_{x_-} < |z| < R_{x_+}$$

$$X(z) = Y(z) - \frac{1}{2} \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + \frac{1}{4} \cdot z^{-2} \cdot Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

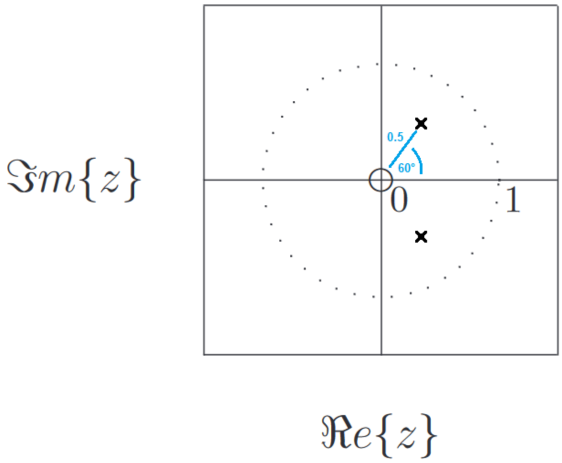
$$= \frac{Y(z)}{Y(z) - \frac{1}{2} \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + \frac{1}{4} \cdot z^{-2} \cdot Y(z)}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1} + \frac{1}{4} \cdot z^{-2}}$$

$$= \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{4}}$$

$$N = 0, \qquad P = \frac{1}{4} \pm j \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

b) Skizzieren Sie das Pol-/Nullstellendiagramm vom $H(z)$.



c) Bestimmen Sie mit Hilfe der $\mathcal{Z}$-Transformation die Systemantwort $y[n]$ für das Eingangssignal $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma[n]$.[1]

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$= \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{4}} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{z^3}{\left(z^2 - \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{A \cdot z + B \cdot z^2}{z^2 - \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{4}} + \frac{C \cdot z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$z^3 = A \cdot z \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right) + B \cdot z^2 \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right) + C \cdot z \cdot \left(z^2 - \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{4}\right)$$

$$\left(z = \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{8} = C \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$C = 1$$

$$(z = 1)$$

$$1 = A \cdot \frac{1}{2} + B \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

$$B = \frac{1}{2} - A$$

[1] Danke @Aaron!

$$(z = 2\ )$$

$$8 = A \cdot 3 + B \cdot 6 + \frac{13}{2}$$

$$8 = A \cdot 3 + \left(\frac{1}{2} - A\right) \cdot 6 + \frac{13}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = 0$$

Formelsammlung

$$\alpha^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - \alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$\rho^n \cdot \sin(\alpha n) \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{\rho z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2\rho z \cdot cos(\alpha) + \rho^2}, \qquad |z| > \rho$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2} \cdot z}{z^2 - \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{4}} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot z}{z^2 - \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{4}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma[n]$$

$$\downarrow$$

$$\frac{A \cdot \rho z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2\rho z \cdot cos(\alpha) + \rho^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot z}{z^2 - \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{4}}$$

$$A \cdot \rho z \cdot \sin(\alpha) = \frac{z}{2}, \qquad 2\rho z \cdot cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot z, \qquad \rho^2 = \frac{1}{4}$$

$$\rho = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad A = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot z}{z^2 - \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{4}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma[n]$$

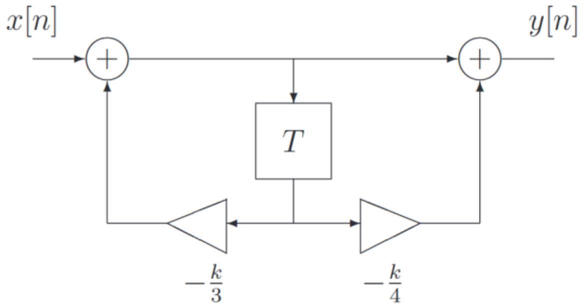
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{\rho z \cdot \sin(\alpha)}{z^2 - 2\rho z \cdot cos(\alpha) + \rho^2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma[n]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right) \cdot \sigma[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma[n]$$

$$= \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot n\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma[n]$$

Aufgabe 4.5:

Von einem digitalen Filter ist das Schaltbild gegeben:



a) **Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ dieses Filters.**

$$v[n] = x[n] + v[n-1] \cdot \left(-\frac{k}{3}\right)$$

$$V(z) = X(z) + z^{-1} \cdot V(z) \cdot \left(-\frac{k}{3}\right)$$

$$V(z) \cdot \left(1 + z^{-1} \cdot \frac{k}{3}\right) = X(z)$$

$$V(z) = \frac{X(z)}{1 + z^{-1} \cdot \frac{k}{3}}$$

$$y[n] = v[n] + v[n-1] \cdot \left(-\frac{k}{4}\right)$$

$$Y(z) = V(z) - z^{-1} \cdot V(z) \cdot \frac{k}{4}$$

$$= X(z) \cdot \frac{1 - z^{-1} \cdot \frac{k}{4}}{1 + z^{-1} \cdot \frac{k}{3}}$$

$$= X(z) \cdot \frac{z - \frac{k}{4}}{z + \frac{k}{3}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$= \frac{z - \frac{k}{4}}{z + \frac{k}{3}}$$

b) Wählen Sie den Parameter k so, dass das Filter stabil ist. Skizzieren Sie das Pol-/Nullstellendiagramm für dieses stabile Filter.

Stabilität im $\mathcal{Z}$-Bereich

Eigenschaft	Pole α n der Übertragungsfunktion
Asymptotisch stabiles System	Alle Pole α n besitzen einen Betrag |α n | < 1
Grenzstabiles System	Alle Lösungen α n besitzen einen Betrag |a n | < 1, zusätzlich liegt mindestens eine einfache Lösung mit Betrag |α n | = 1 vor
Instabiles System	Es existiert mindestens eine Lösung α n mit einem Betrag |α n | > 1 oder eine mehrfache Lösung mit Betrag |α n | = 1

$$H(z) = \frac{z - \frac{k}{4}}{z + \frac{k}{3}}$$

$$|p| < 1$$

$$\left|-\frac{k}{3}\right| < 1$$

$$|k| < 3$$

c) Berechnen und skizzieren Sie die Impulsantwort $h[n]$ und die Sprungantwort $a[n]$ des stabilen Filters.

Formelsammlung

$$\alpha^n \cdot \sigma[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| > |\alpha|$$

$$x[n+n_0] \leftrightarrow z^{n_0} \cdot X(z), \qquad R_{x_-} < |z| < R_{x_+}$$

$$H(z) = \frac{z - \frac{k}{4}}{z + \frac{k}{3}} = \frac{z}{z + \frac{k}{3}} - \frac{k}{4} \cdot \frac{1}{z + \frac{k}{3}}$$

$$h[n] = \left(-\frac{k}{3}\right)^n \cdot \sigma[n] - \frac{k}{4} \cdot \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z + \frac{k}{3}}\right)_{n=n+1}$$

$$= \left(-\frac{k}{3}\right)^n \cdot \sigma[n] - \frac{k}{4} \cdot \left(\left(-\frac{k}{3}\right)^n \cdot \sigma[n]\right)_{n=n+1}$$

$$= \left(-\frac{k}{3}\right)^n \cdot \sigma[n] - \frac{k}{4} \cdot \left(-\frac{k}{3}\right)^{n-1} \cdot \sigma[n-1]$$

$$A(z) = H(z) \cdot \mathcal{Z}(\sigma[n])$$
$$= \frac{z - \frac{k}{4}}{z + \frac{k}{3}} \cdot \frac{z}{z-1}$$
$$= \frac{z \cdot \left(z - \frac{k}{4}\right)}{\left(z + \frac{k}{3}\right) \cdot (z-1)}$$

$$\frac{z \cdot \left(z - \frac{k}{4}\right)}{\left(z + \frac{k}{3}\right) \cdot (z-1)} = \frac{A \cdot z}{z + \frac{k}{3}} + \frac{B \cdot z}{z-1}$$
$$z \cdot \left(z - \frac{k}{4}\right) = A \cdot z \cdot (z-1) + B \cdot z \cdot \left(z + \frac{k}{3}\right)$$
$$z - \frac{k}{4} = A \cdot (z-1) + B \cdot \left(z + \frac{k}{3}\right)$$

$$(z = 1)$$
$$1 - \frac{k}{4} = B \cdot \left(1 + \frac{k}{3}\right)$$
$$B = \frac{1 - \frac{k}{4}}{1 + \frac{k}{3}}$$

$$\left(z = -\frac{k}{3}\right)$$
$$-\frac{k}{3} - \frac{k}{4} = A \cdot \left(-\frac{k}{3} - 1\right)$$
$$-k \cdot \frac{7}{12} = -A \cdot \frac{k+3}{3}$$
$$A = \frac{7}{4} \cdot \frac{k}{k+3}$$

$$A(z) = \frac{7}{4} \cdot \frac{k}{k+3} \cdot \frac{z}{z + \frac{k}{3}} + \frac{1 - \frac{k}{4}}{1 + \frac{k}{3}} \cdot \frac{z}{z-1}$$
$$a[n] = \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{k}} \cdot \left(-\frac{k}{3}\right)^n + \frac{1 - \frac{k}{4}}{1 + \frac{k}{3}}\right) \cdot \sigma[n]$$