Gernot Polivka | 12009686 |

4. Übung

Aufgabe 2.3:

Das abgebildete System besteht aus zwei LTI-Systemen mit den Impulsantworten $h_1[n]$ und $h_2[n]$. Berechnen Sie die Antwort $y[n]$ des Gesamtsystems auf das Eingangssignal $x[n] = \delta[n] - \alpha \cdot \delta[n-1],\ |\alpha| < 1$.

$$\boldsymbol{h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cdot sin^2\left(\frac{\pi}{10} \cdot n\right), \qquad h_2[n] = \alpha^n \cdot \sigma[n]}$$

Weil h_1 und h_2 stabil sind darf man sie vertauschen[1]

$$y_1[n] = x[n] * h_2[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k] \cdot x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \cdot \sigma[k] \cdot (\delta[n-k] - \alpha \cdot \delta[n-k-1])$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot (\delta[n-k] - \alpha \cdot \delta[n-k-1])$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot \delta[n-k] - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} \cdot \delta[n-k-1]$$

$$(k = n, \qquad k = n-1)$$

$$\downarrow^{2}$$

$$= \alpha^n \cdot \sigma[n] - \alpha^{n-1+1} \cdot \sigma[n-1]$$

$$= \alpha^n \cdot (\sigma[n] - \sigma[n-1])$$

$$= \alpha^n \cdot \delta[n]$$

[1] Eigentlich sollte auch bei der richtigen Reihenfolge das gleiche Ergebnis herauskommen – mir bleibt aber immer ein Term mit $n-1$ übrig…

[2] Es kommt ein $\sigma[n]$ dazu, weil die Summe für $n < 0$ und gleichzeitig $k \geq 0$ immer 0 ist.

$$y[n] = y_1[n] * h_1[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[k] \cdot h_1[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \cdot sin^2\left(\frac{\pi}{10} \cdot k\right) \cdot \alpha^{n-k} \cdot \delta[n-k]$$

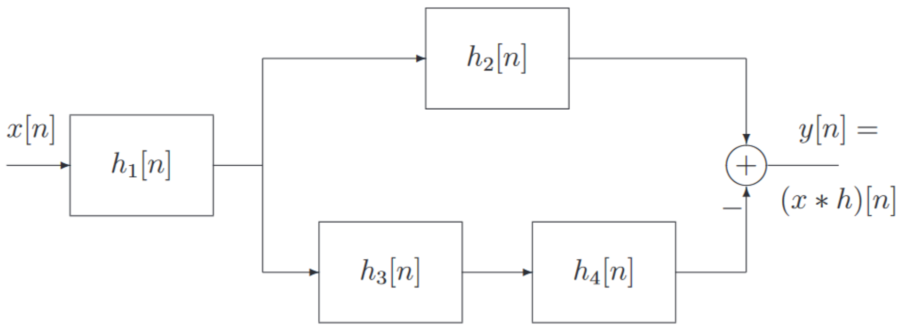
$$(k = n)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cdot sin^2\left(\frac{\pi}{10} \cdot n\right)$$

$$= h_1[n]$$

Aufgabe 2.4:

Berechnen Sie die Gesamtimpulsantwort $h[n]$ des abgebildeten Systems, das aus einzelnen LTI-Systemen zusammengesetzt ist.



$$\boldsymbol{h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sigma[n]}$$

$$\boldsymbol{h_2[n] = (n+1) \cdot \sigma[n]}$$

$$\boldsymbol{h_3[n] = h_2[n]}$$

$$\boldsymbol{h_4[n] = \delta[n-1]}$$

$$h_5[n] = h_3[n] * h_4[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_3[k] \cdot h_4[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+1) \cdot \sigma[k] \cdot \delta[n-k-1]$$

$$(k = n-1)$$

$$= n \cdot \sigma[n-1]$$

$$= h_2[n-1]$$

$$h_6 = h_2[n] - h_2[n-1]$$
$$= (n+1) \cdot \sigma[n] - n \cdot \sigma[n-1]$$
$$= n \cdot (\sigma[n] - \sigma[n-1]) + \sigma[n]$$
$$= \sigma[n]$$

$$h[n] = h_1[n] * h_6[n]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \sigma[k] \cdot \sigma[n-k]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \sigma[n-k]$$
$$= \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$\downarrow$$

Geometrische Summenformel:

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$
$$\downarrow$$
$$= \sigma[n] \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \cdot \sigma[n]$$

Aufgabe 2.5:

Gegeben ist ein LTI-System mit der Impulsantwort

$$\boldsymbol{h[n] = 12 \cdot \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \cdot \sigma[n]}$$

a) **Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort $a[n]$ des Systems.**

$$a[n] = h[n] * \sigma[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 12 \cdot \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right) \cdot \sigma[k] \cdot \sigma[n-k]$$

$$= 12 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right) \cdot \sigma[n-k]$$

$$\downarrow ^3$$

$$= 12 \cdot \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$= 12 \cdot \sigma[n] \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$\downarrow$$

Geometrische Summenformel:

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

$$\downarrow$$

$$= 12 \cdot \sigma[n] \cdot \left(\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} - \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$= 12 \cdot \sigma[n] \cdot \left(\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{4}{3}} - \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= 12 \cdot \sigma[n] \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) - \frac{2}{3} \cdot \left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)$$

$$= 12 \cdot \sigma[n] \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

---

[3] Es kommt ein $\sigma[n]$ dazu, weil die Summe für $n < 0$ und gleichzeitig $k \geq 0$ immer 0 ist.

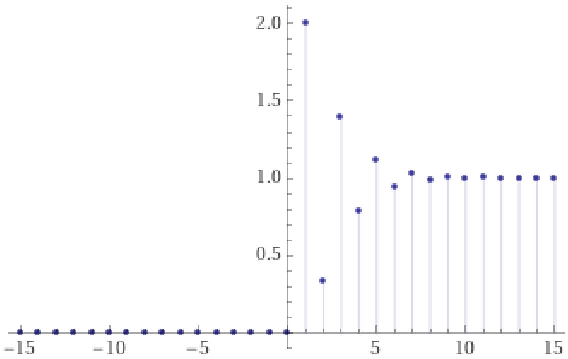
$$= 12 \cdot \sigma[n] \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \left(1 - 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \cdot \sigma[n]$$

$$= \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \cdot \sigma[n]$$

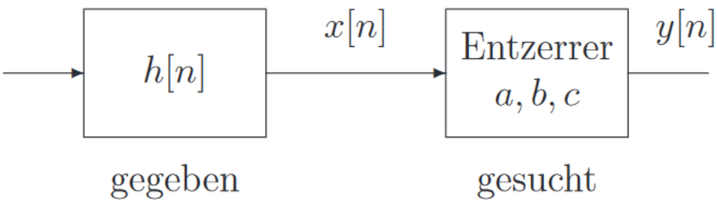
$$= \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) \cdot \sigma[n]$$

Wolfram Alpha[4]



b) Zur Vermeidung von Überschwingen der Sprungantwort $a[n]$ wird nun zum gegebenen System ein System in Kette geschaltet. Dieses Entzerrersystem wird durch die folgende Eingangs-/Ausgangsbeziehung beschrieben:

$$\boldsymbol{y[n] = a \cdot x[n] + b \cdot x[n-1] + c \cdot x[n-2]}$$



Wie sind die Koeffizienten a, b, c zu wählen, so dass das Gesamtsystem kein Überschwingen zeigt, d.h. die Sprungantwort des entzerrten Gesamtsystems $\tilde{a}[n] = \sigma[n - n_0]$?

n_0 sollte so klein wie möglich gewählt werden, damit das System schnell reagiert.

[4] discrete plot (1-(-1/3)^(n-1)-(-1/2)^(n-2))*Step(n) from n=-15 to n=15

$$y[n] = a \cdot x[n] + b \cdot x[n-1] + c \cdot x[n-2]$$
$$\downarrow$$
$$\tilde{a}[n] = a \cdot a[n] + b \cdot a[n-1] + c \cdot a[n-2]$$
$$\sigma[n-n_0] = a \cdot a[n] + b \cdot a[n-1] + c \cdot a[n-2]$$
$$(n_0 = 0)$$
$$\sigma[n] = a \cdot a[n] + b \cdot a[n-1] + c \cdot a[n-2]$$
$$= a \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) \cdot \sigma[n] + b \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right) \cdot \sigma[n-1]$$
$$+c \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-4}\right) \cdot \sigma[n-2]$$
$$(n = 0)$$
$$1 = a \cdot (0) \cdot \sigma[n] + b \cdot (0) \cdot \sigma[0-1] + c \cdot (12) \cdot \sigma[0-2]$$
$$1 = 0$$

Keine Lösung → n_0 zu klein

$$(n_0 = 1)$$
$$\sigma[n-1] = a \cdot a[n] + b \cdot a[n-1] + c \cdot a[n-2]$$
$$= a \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) \cdot \sigma[n] + b \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right) \cdot \sigma[n-1]$$
$$+c \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-4}\right) \cdot \sigma[n-2]$$
$$(n = 1)$$
$$1 = a \cdot \left(1 - 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{1-2}\right) + b \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)$$
$$1 = 2a$$
$$a = \frac{1}{2}$$

$$(n = 2)$$
$$1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{1} - 1\right) + b \cdot \left(1 - 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) + c \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)$$
$$1 = \frac{1}{6} + 2b$$
$$b = \frac{5}{12}$$

$$(n=3)$$

$$1=a\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{1}\right)+b\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{1}-1\right)+c\cdot\left(1-1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)$$

$$1=\frac{25}{36}+\frac{5}{36}+2c$$

$$c=\frac{1}{12}$$

c) Wie groß sollte zweckmäßigerweise die Zeitverzögerung n_0 gewählt werden?

n_0 sollte so klein wie möglich gewählt werden, damit das System schnell reagiert.

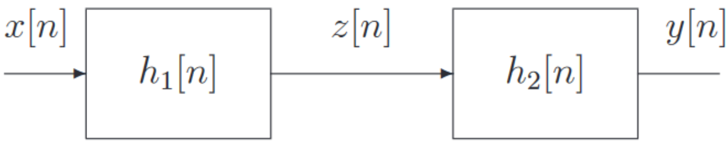
Aufgabe 2.6:

Ein System sei als Kettenschaltung zweier Teilsysteme realisiert. Das erste Teilsystem ist durch die Eingangs-/Ausgangsbeziehung:

$$\boldsymbol{z[n]=\sum_{k=n-N+1}^{n} x[k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[n-k]\cdot x[k]}$$

charakterisiert. Vom zweiten System ist die Impulsantwort bekannt:

$$\boldsymbol{h_2[n]=2\cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\cdot sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\cdot\sigma[n]}$$



a) Berechnen und skizzieren Sie die Impulsantwort $h_1[n]$ des ersten Teilsystems und die Impulsantwort $h[n]$ des Gesamtsystems.

$$\sum_{k=n-N+1}^{n} x[k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[n-k]\cdot x[k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sigma[k-(n-N+1)]\cdot\sigma[n-k]\cdot x[k]$$

$$h_1[n-k]=\sigma[k-n+N-1]\cdot\sigma[n-k]$$

$$h_1[n]=\sigma[-n+N-1]\cdot\sigma[n]$$

$$=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & sonst\end{cases}$$

$$h[n] = h_1 * h_2$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] \cdot h_2[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[-k+N-1] \cdot \sigma[k] \cdot 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (n-k)\right) \cdot \sigma[n-k]$$

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (n-k)\right) \cdot \sigma[n-k]$$

Wenn $n > N-1$:[5]

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (n-k)\right)$$

$$= 0$$

Wenn $n < N-1$:

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (n-k)\right)$$

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot(n-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot(n-k)}}{2j}$$

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sigma[n] \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot(n-k)} - \sum_{k=0}^{n} e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot(n-k)}\right)$$

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sigma[n] \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k} - \sum_{k=0}^{n} e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot n} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot k}\right)$$

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sigma[n] \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^k - e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}}\right)^k\right)$$

$$\downarrow$$

Geometrische Summenformel:

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

$$\downarrow$$

[5] $= 0$, weil eine ganze Periode vom Sinus durchlaufen wird.

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sigma[n] \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot n} \cdot \frac{1-\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{n+1}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}}} - e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot n} \cdot \frac{1-\left(e^{j\frac{2\pi}{N}}\right)^{n+1}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}}}\right)$$

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sigma[n] \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot n} \cdot \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot(n+1)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}}} - e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot n} \cdot \frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot(n+1)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}}}\right)$$

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sigma[n] \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot n} \cdot \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot(n+1)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{N}}}{e^{j\frac{\pi}{N}}} - e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot n} \cdot \frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot(n+1)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}}} \cdot \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}}}{e^{-j\frac{\pi}{N}}}\right)$$

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sigma[n] \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot n} \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{N}}-e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot(n+1)+j\frac{\pi}{N}}}{e^{j\frac{\pi}{N}}-e^{-j\frac{\pi}{N}}} - e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot n} \cdot \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}}-e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot(n+1)-j\frac{\pi}{N}}}{e^{-j\frac{\pi}{N}}-e^{j\frac{\pi}{N}}}\right)$$

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sigma[n] \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot n} \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{N}}-e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(n+1-\frac{1}{2}\right)}}{2j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)} - e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot n} \cdot \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}}-e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(n+1-\frac{1}{2}\right)}}{-2j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}\right)$$

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sigma[n] \cdot \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{2j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)} \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot n} \cdot \left(e^{j\frac{\pi}{N}} - e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right) + e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot n} \cdot \left(e^{-j\frac{\pi}{N}} - e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sigma[n] \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n} e^{j\frac{\pi}{N}} - e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n} e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)} + e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot n} e^{-j\frac{\pi}{N}} - e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot n} e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sigma[n] \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)} - e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}} + e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)} - e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sigma[n] \cdot \left(e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)} + e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)} - e^{j\frac{\pi}{N}} - e^{-j\frac{\pi}{N}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sigma[n] \cdot \left(2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot \left(n+\frac{1}{2}\right)\right) - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)$$

$$= -\sigma[n] \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{N} \cdot (2n+1)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)$$

$$\downarrow$$

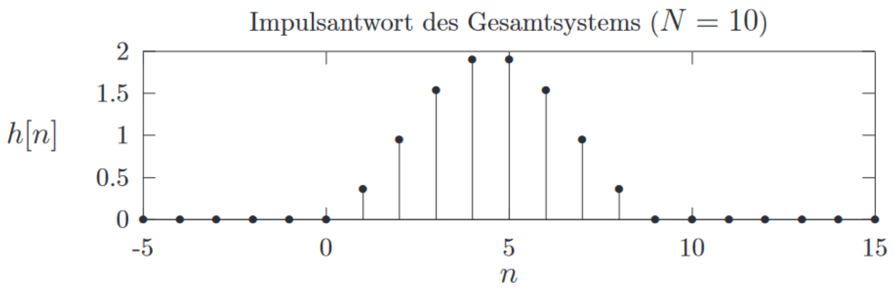
$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$= -\sigma[n] \cdot \left(-2 \cdot \sin\left(\frac{\left(\frac{\pi}{N} \cdot (2n+1)\right) + \frac{\pi}{N}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\left(\frac{\pi}{N} \cdot (2n+1)\right) - \frac{\pi}{N}}{2}\right)\right)$$

$$= 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N} \cdot (n+1)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N} n\right) \cdot \sigma[n]$$

$$h[n] = \begin{cases} 2 \cdot \sin\left({}^{\pi}/_{N} \cdot (n+1)\right) \cdot \sin\left({}^{\pi}/_{N} \cdot n\right) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$



b) Berechnen Sie die Antwort $y[n]$ des Gesamtsystems auf das Eingangssignal:

$$\boldsymbol{x[n] = sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \qquad -\infty < n < \infty}$$

$$z[n] = x[n] * h_1[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k] \cdot x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[-k+N-1] \cdot \sigma[k] \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (n-k)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (n-k)\right)$$

$$\downarrow {}^{6}$$

$$= 0$$

$$y[n] = z[n] * h_2[n]$$

$$= 0$$

c) Vertauschen Sie jetzt die Reihenfolge der beiden Teilsysteme und wiederholen Sie Punkt b). Warum erhält man dabei ein anderes Ergebnis, obwohl doch beide Teilsysteme LTI-Systeme sind und die Faltungsoperation normalerweise assoziativ ist?

$$z[n] = x[n] * h_2[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k] \cdot x[n-k]$$

[6] Summe über ganze Periode = 0.

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot \sigma[k] \cdot sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (n-k)\right)$$

$$= 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (n-k)\right)$$

$$\downarrow$$

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\downarrow$$

$$= sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} cos\left(\frac{2\pi k}{N} - \frac{2\pi}{N} \cdot (n-k)\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi k}{N} + \frac{2\pi}{N} \cdot (n-k)\right)\right)$$

$$= sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} cos\left(\frac{4\pi k}{N} - \frac{2\pi}{N} n\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right)\right)$$

$$= sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot (2k-n)\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right)\right)$$

$$= \infty$$

Für eine Vertauschung müssen beide Teilsysteme stabil sein.
h_2 ist nicht stabil.

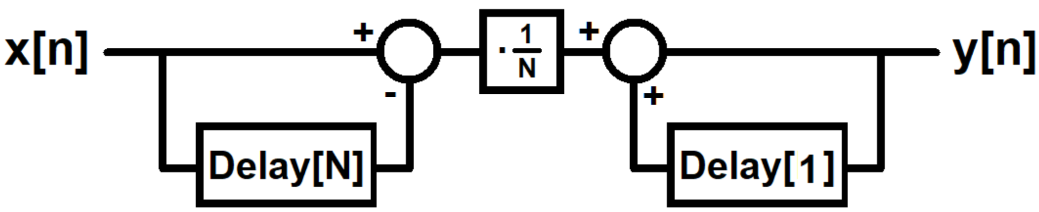
Aufgabe 2.7:

Es soll das Eingangs-/Ausgangsverhalten eines zeitdiskreten Systems untersucht werden, wobei das betrachtete System durch die folgende Differenzengleichung charakterisiert sei:

$$\boldsymbol{y[n] = y[n-1] + \frac{1}{N} \cdot (x[n] - x[n-N])}$$

Und $x[n] = y[n] = 0$ für $n < 0$. Dabei repräsentiert $x[n]$ das Eingangssignal und $y[n]$ das Ausgangssignal des Systems.

a) **Zeichnen Sie ein Schaltbild des Systems bestehend aus Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen.**



b) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h[n]$ und die Sprungantwort $a[n]$ des Systems.[7]

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot z^{-n}$$

$$\mathcal{Z}(y[n]) = \mathcal{Z}\left(y[n-1] + \frac{1}{N} \cdot (x[n] - x[n-N])\right)$$

$$Y(z) = z^{-1} \cdot Y(z) + \frac{1}{N} \cdot \left(X(z) - z^{-N} \cdot X(z)\right)$$

$$Y(z) \cdot (1 - z^{-1}) = \frac{1}{N} \cdot X(z) \cdot (1 - z^{-N})$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - z^{-N} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{z}{z-1} - z^{-N} \cdot \frac{z}{z-1}\right)$$

$$\downarrow$$

$$h[n] = \frac{1}{N} \cdot \left(\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) - \mathcal{Z}^{-1}\left(z^{-N} \cdot \frac{z}{z-1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot (\sigma[n] - \sigma[n-N])$$

$$a[n] = h[n] * \sigma[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot \sigma[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \cdot (\sigma[k] - \sigma[k-N]) \cdot \sigma[n-k]$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[k] \cdot \sigma[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma[k-N] \cdot \sigma[n-k]\right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sigma[n-k] - \sum_{k=N}^{\infty} \sigma[n-k]\right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \left(\sigma[n] \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 - \sigma[n-N] \cdot \sum_{k=N}^{n} 1\right)$$

[7] Formel aus „sus2_zt_22_handout.pdf“, S. 41

$$= \frac{1}{N} \cdot \big(\sigma[n] \cdot (n+1) - \sigma[n-N] \cdot (n-N+1)\big)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \big((\sigma[n] - \sigma[n-N]) \cdot (n+1) + \sigma[n-N] \cdot N\big)$$

$$a[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ {}^{1}/_{N} \cdot (n+1) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 1 & n \geq N \end{cases}$$

c) Versuchen Sie eine alternative Systemrealisierung zu finden, die die gleiche Impulsantwort $h[n]$ aufweist, jedoch keine Rückkopplung verwendet.

$$h[n] = \frac{1}{N} \cdot (\sigma[n] - \sigma[n-N])$$

$$y[n] = \sum_{k=\infty}^{\infty} h[n] \cdot x[n-k]$$

$$= \sum_{k=\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \cdot (\sigma[k] - \sigma[k-N]) \cdot x[n-k]$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$$

(Gleitender-Mittelwert-Filter)