Beispiel 442 (MA1 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 4, 05.04.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 03/2006

1 Angabe

Für die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} -2 & (t \leq 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$$

berechnen Sie $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Ist $F(x)$ stetig bzw. differenzierbar?

2 Lösung des Beispiels

$$G(x) = \int f(x)\,dx = -2x + c \qquad \forall\, x \leq 1$$

$$G(x) = \int f(x)\,dx = x + c \qquad \forall\, x > 1$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad \forall x \leq 1$$

$$F(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt \qquad \forall x > 1$$

$$F(x) = -2x \qquad \forall x \leq 1$$

$$F(x) = x - 3 \qquad \forall x > 1$$

$F(x)$ stetig, aber nicht differenzierbar an der Stelle $x = 1$.

Wie kommt man auf $F(x) = x - 3 \qquad \forall x > 1$?

$$\int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt = -2t|_0^1 + t|_1^x = -2 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 + x - 1 = x - 3$$

Warum ist $F(x)$ stetig, aber nicht differenzierbar an der Stelle $x = 1$?

$$\lim_{x \to 1} -2x = -2 \qquad \text{linksstetig}$$

$$\lim_{x \to 1} x - 3 = -2 \qquad \text{linksstetig } f(1) = -2$$