9. UE Analysis für INF und WINF

$\boxed{260}$ Vorbemerkung: Der Integrand $\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ ist definiert auf $(1, e]$ und dort monoton fallend. Wegen $\ln 1 = 0$ ist das Integral zunächst bei $x = 1$ uneigentlich. Wir bestimmen zunächst die Stammfunktion:

$\ln x = t$, $\frac{1}{x}dx = dt \implies \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt =$

$\overset{=}{C} + \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$. Diese Stammfunktion ist definiert und stetig auf $[1, e]$, aber bei $x = 1$ nicht differenzierbar. Daher brauchen wir keinen Grenzwert gegen 1 und erhalten:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x}\,\Big|_1^e = 2\cdot\sqrt{1} - 2\cdot\sqrt{0} = \underline{\underline{2.}}$$

$\boxed{263}$ Der Integrand xe^{-x} ist definiert auf $[0, \infty)$. Wir bestimmen zunächst wieder die Stammfunktion, und zwar durch partielle Integration:

$\int x\cdot e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$

$$\implies \int_0^\infty x\cdot e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^c x\cdot e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty}\left(-e^{-x}(x+1)\right)\Big|_0^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty} e^{-x}(x+1)\Big|_c^0 = 1 - \lim_{c\to\infty}\frac{c+1}{e^c} = 1 - \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“} =$$

$$= 1 - \lim_{c\to\infty}\frac{1}{e^c} = 1 - \text{„}\frac{1}{\infty}\text{“} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

Anmerkung: Bei $\boxed{260}$ liegt ein uneigentliches Integral 1. Art vor, bei $\boxed{263}$ ein uneigentliches Integral 2. Art.

277 Wir spalten zunächst auf:

$$\int_0^\infty \frac{2x-1}{3x^3+2x^2+3x+5}\,dx = \int_0^1 \frac{2x-1}{3x^3+2x^2+3x+5}\,dx + \int_1^\infty \frac{2x-1}{3x^3+2x^2+3x+5}\,dx.$$

Das erste Integral ist eigentlich, das zweite uneigentlich (2. Art), wobei der Integrand ≥ 0 ist. Wir benützen das Vergleichskriterium (Satz 5.61 im Buch):

$$0 \leq \frac{2x-1}{3x^3+2x^2+3x+5} \leq \frac{2x}{3x^3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2},\ \forall x\in[1,\infty)$$

und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^{-2}\,dx = \lim_{c\to\infty}(-x^{-1})\Big|_1^c =$

$= \lim_{c\to\infty}\frac{1}{x}\Big|_c^1 = \lim_{c\to\infty}\left(1-\frac{1}{c}\right) = 1$, also ist auch

$\int_0^\infty \frac{2x-1}{3x^3+2x^2+3x+5}\,dx$ konvergent.

285 Zu untersuchen ist – für $\alpha > 0$ – die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\cdot(\ln n)^\alpha}$. Wir benützen dazu das Integralkriterium (Satz 5.62 im Buch) und betrachten dazu $\int_2^\infty \frac{1}{x\cdot(\ln x)^\alpha}\,dx$. Dieses Integral ist uneigentlich von 2. Art, und wir bestimmen zunächst wieder die Stammfunktion:

$\ln x = t,\ \frac{1}{x}\,dx = dt \Longrightarrow \int \frac{1}{x\cdot(\ln x)^\alpha}\,dx = \int \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \int t^{-\alpha}\,dt =$

$$= \begin{cases} t^{-\alpha+1}/(-\alpha+1), & \alpha\neq 1 \\ \ln t, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(\ln x)^{1-\alpha}, & \alpha\neq 1, \\ \ln(\ln x), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Eine Probe durch Differenzieren ist leicht möglich.

Wir unterscheiden nun 3 Fälle:

(i) $0<\alpha<1 \Rightarrow 1-\alpha>0 \Rightarrow \int_2^\infty \frac{1}{x\cdot(\ln x)^\alpha}\,dx =$

$= \lim_{c\to\infty}\int_2^c \frac{1}{x\cdot(\ln x)^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{c\to\infty}\left((\ln c)^{1-\alpha}-(\ln 2)^{1-\alpha}\right)=$

$= \frac{1}{1-\alpha}\cdot\left(\text{"}\infty^{1-\alpha}\text{"}-(\ln 2)^{1-\alpha}\right)=\infty$, also ist in diesem Fall das Integral und somit auch die Reihe divergent.

(ii) $\alpha=1 \Rightarrow \int_2^\infty \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_2^c \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx =$

$= \lim_{c\to\infty}\left(\ln(\ln c)-\ln(\ln 2)\right) = \text{"}\ln(\infty)\text{"}-\ln(\ln 2)=$

$=\infty$, also ist das Integral und somit die Reihe divergent.

(iii) $\alpha>1 \Rightarrow \alpha-1>0 \Rightarrow \int_2^\infty \frac{1}{x\cdot(\ln x)^\alpha}\,dx =$

$= \lim_{c\to\infty}\int_2^c \frac{1}{x\cdot(\ln x)^\alpha}\,dx = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left((\ln c)^{1-\alpha}-(\ln 2)^{1-\alpha}\right)=$

$\frac{1}{\alpha-1}\cdot\left(\frac{1}{(\ln 2)^{\alpha-1}}-\lim_{c\to\infty}\frac{1}{(\ln c)^{\alpha-1}}\right)=\frac{1}{\alpha-1}\cdot\left(\frac{1}{(\ln 2)^{\alpha-1}}-\right.$

$\left.-\frac{1}{\text{"}\infty^{\alpha-1}\text{"}}\right) = \left(\text{wegen "}\infty^{\alpha-1}\text{"}=\infty \text{ und "}\frac{1}{\infty}\text{"}=0\right)$

$=\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(\ln 2)^{\alpha-1}}$, also ist in diesem Fall das Integral und somit die Reihe konvergent.

$\boxed{309}$ (a) $z=F(x,y)=xy$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, und es gilt: $F(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}$. Die Höhenlinien ergeben sich mit $z=c$, und es gilt: $xy=c$ ist für $c=0$ das Geradenpaar $x=0$, $y=0$ (Koordinatenachsen) und für $c\neq 0$ die Hyperbel $y=\frac{c}{x}$, $x\neq 0$, mit den Asymptoten $x=0$ und $y=0$.

Anmerkung: Durch $z = xy$ ist eine Fläche 2. Grades definiert, ein sogenanntes „hyperbolisches Paraboloid", welches im Bauwesen als „Sattelfläche" Anwendung findet.

(b) $z = F(x,y) = \frac{x}{y}$ ist definiert auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid y=0\}$, also auf $\mathbb{R}^2$ ohne die x-Achse. Höhenlinien:

$z = c \Rightarrow$ es gibt 2 Fälle:

$c=0 \Rightarrow x=0$ (y-Achse); $c \neq 0 \Rightarrow y = \frac{1}{c} \cdot x$, also liegt eine Gerade durch den Ursprung mit der Steigung $\frac{1}{c}$ vor.

Anmerkung: Wegen $x = yz$ liegt – wie bei (a) – ein „hyperbolisches Paraboloid" vor, wobei die Rollen der x-Achse und der z-Achse vertauscht wurden.

$\boxed{314}$ (a) Für $\lambda > 0$ und $y, z \geq 0$ (x beliebig aus $\mathbb{R}$) gilt:

$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda x + (\lambda y \cdot \lambda z)^{\frac{1}{2}} = \lambda \cdot (x + (yz)^{\frac{1}{2}}) =$

$= \lambda \cdot f(x,y,z)$, also ist f homogen vom Grad 1.

(b) Angenommen, $\forall \lambda > 0,\ x, y \in \mathbb{R}$ gelte:

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r \cdot f(x,y)$, dann folgt:

$\lambda^2 x^2 + \lambda y = \lambda^r \cdot (x^2 + y)$. Setzen wir $x=0, y=1$, dann folgt $\lambda = \lambda^r$. Setzen wir $x=1, y=0$, dann folgt $\lambda^2 = \lambda^r$.

$\Longrightarrow \lambda = \lambda^2 \Longrightarrow \lambda = 0$ oder $\lambda = 1$. $\lightning$

(c) Für $\lambda > 0$, $x, y > 0$ gilt (mit a, b, c beliebig aus $\mathbb{R}$):

$f(\lambda x, \lambda y) = a \cdot (\lambda x)^b \cdot (\lambda y)^c = a \cdot \lambda^b x^b \cdot \lambda^c y^c =$

$= \lambda^{b+c} \cdot a x^b y^c = \lambda^{b+c} \cdot f(x,y)$, also ist die Funktion f homogen vom Grad $b+c$.