Analysis

Matthias Gusenbauer

12. März 2012

Folgen:

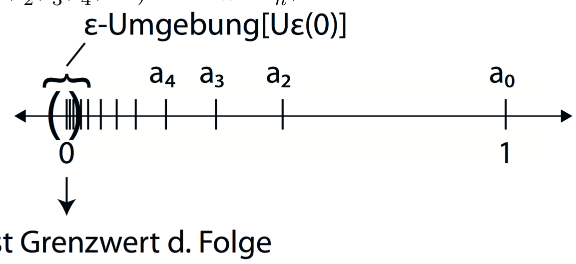
$(\overbrace{a_0, a_1, a_2, ...}^{Folgeglieder}), \quad \underbrace{a_i}_{i\,=\,Index} \quad \in \mathbb{R}$

Reelle Zahlenfolge

Folge: $(a_n)n \in \mathbb{N}$
$a \ : \ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
$(a(0), a(1), \ ...)$

Manchmal sind Folgen rekursiv definiert

<u>Grenzwerte:</u>
Bsp.:
$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ ...\right) \qquad a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$



beliebiges $\epsilon > 0$ vorgeben
$U_\epsilon(c) = \underbrace{(c-\epsilon, c+\epsilon)}_{offenes\ Interval}$

fast alle(alle bis auf endlich viele) Folgeglieder liegen in einer $U_\epsilon(c)$

$$\begin{aligned} &\text{c ist Grenzwert der Folge } a_n \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \text{fast alle Folgeglieder liegen in } U_\epsilon(c) \\ &\Updownarrow \\ &\forall \epsilon > 0 : \exists N = N(\epsilon) : |a_n - c| < \epsilon, \forall n \geq N \\ &\uparrow \end{aligned}$$

Index ab dem alle Folgenglieder Abstand $< \epsilon$ haben

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = c$

$$\text{Folge} \begin{cases} \text{es existiert ein GW} \leftarrow a_n \text{ konvergent} \\ \text{kein GW} \leftarrow a_n \text{ divergent} \end{cases}$$

$a_n = n \qquad (0, 1, 2, 3, ...)$
divergent

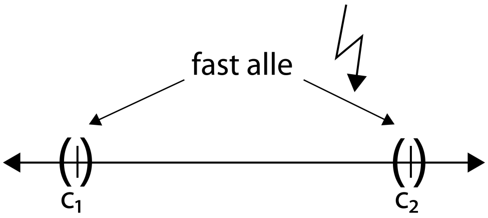
Folge ist uneigentlich konvergent gegen ∞
a_n besitzt uneigentlichen Grenzwert ∞

$$\Updownarrow$$

$\forall K \in \mathbb{R} : \exists N = N(K) : a_n > K : \forall n \geq N \qquad$ [fast alle Folgenglieder sind >]

analog $-\infty$

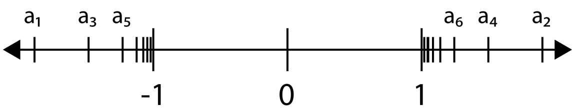
Angenommen es gäbe 2 Grenzwerte:



$\Rightarrow$ nur 1 Grenzwert!

Häufungspunkt:
Bsp.:
$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} \qquad n \geq 1$

$\left(-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, ...\right)$



-1 & 1 sind Häufungspunkte von a_n

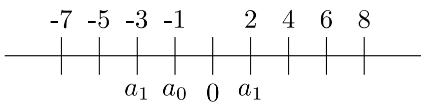
c ist Häufungspunkt v. Folge $a_n \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \underbrace{U_\epsilon(c)}_{(c-\epsilon, c+\epsilon)}$ liegen unendlich viele Folgeglieder

- Folge kann mehrere Häufungspunkte besitzen!
- wenn c Grenzwert $\Rightarrow$ c ist Häufungspunkt

Uneigentlicher Häufungspunkt $(+\infty, -\infty)$

a_n besitzt HP $+\infty \qquad \forall K \in \mathbb{R} : \infty$ viele Folgenglieder vona_n sind grösser als K

Bsp: $a_n = (-1)^n \cdot n$



keine uneigentlichen GW
besitzt uneigentlichen Häufungspunkt $+\infty$ und uneigentlichen HP $-\infty$

Folge(a_n) $n \geq 0$: gösster HP: limes superior von a_n (inkl. uneigentl.) **lim sup**

kleinster HP: limes inferior von a_n **lim inf**

<u>Monotonie und Beschränktheit von Folgen</u>

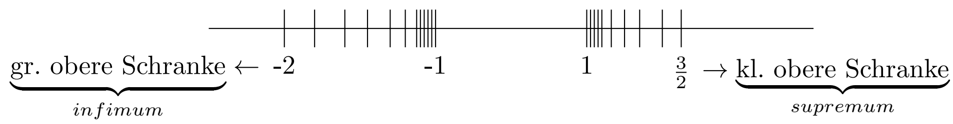
a_n monoton steigend/wachsend $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
a_n streng monoton steigend $\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

analog fallend

<u>Beschränkt</u>

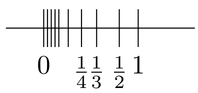
a_n ist nach oben Beschränkt $\Leftrightarrow \exists$ Schranke $S : a_n < S, \forall n \in \mathbb{N}$
a_n ist nach unten Beschränkt $\Leftrightarrow \exists$ Schranke $s : a_n > s, \forall n \in \mathbb{N}$

Bsp:
$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} \qquad n \geq 1$



Folge a_n nach oben beschränkt & nach unten beschränkt → Folge ist beschränkt.

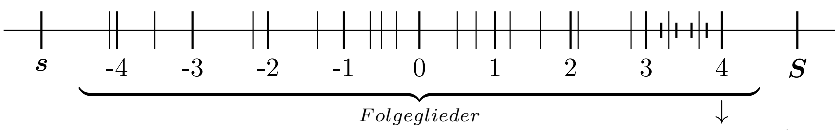
$a_n = \frac{1}{n} \qquad n \geq 1$



supremum sup $a_n = 1 = max\ a_n$
inf $a_n = 0$

<u>Vollständigkeitssatz d. reellen Zahlen</u>

a_n beschr. Folge $\Rightarrow$ • a_n besitzt ein supr.
• a_n besitzt ein inf.



$3 < sup < 4$
Teile Intervall wiederum
in kleinere Teile, usw (BUCH!)

Folge nicht nach oben beschränkt $\Rightarrow sup\ a_n := +\infty$
Folge nicht nach unten beschränkt $\Rightarrow inf\ a_n := -\infty$

Satz(Hauptsatz über monotone Folgen)

Die monotone Folge a_n ist genau dann konvergent, falls sie beschränkt ist.

$$a_n \text{beschränkt} \Leftrightarrow a_n \text{konvergent}$$

monoton $\Rightarrow$ konvergent
Beweis: a_n sei eine mon. wachs. Folge die beschränkt ist $\Rightarrow$ S = sup a_n existiert.
Vollständigkeitssatz v. $\mathbb{R}$
$\Rightarrow S - \epsilon$ ist keine obere Schranke
$\epsilon > 0$ beliebig
$\Rightarrow \exists a_n : a_n > S - \epsilon$
a_n monoton wachsen $\Rightarrow a_n > S - \epsilon,$ für alle n $\geq \mathbb{N}$
$\Rightarrow |a_n - S| < \epsilon \qquad \forall n > \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ sup a_n ist Grenzwert d. Folge a_n
$\Rightarrow a_n$konvergent $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = S$
$\Rightarrow$ analog falls a_n monoton fallend $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = inf\ a_n$

Bernulli'sche Ungleichung

$(1+x)^n > 1 + n \cdot x \qquad$ falls $n \geq 2, x > -1, x \neq 0$

Beweis vollst. Induktion:
$(1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0, x\neq 0} > 1 + 2x$

$n \to n+1$

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{Ind.Vor.einsetz} \cdot (1+x) > (1+nx)\cdot(1+x)$$
$$= 1 + \underbrace{nx + x}_{(n+1)\cdot x} + \underbrace{n \cdot x^2}_{>0} > 1 + (n+1)x$$

Bsp:
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a_n \qquad n \geq 1$ wir werden zeigen:

1. Folge a_n ist beschränkt
2. Folge a_n ist mon. wachsend

$\Rightarrow$ GW existiert $\qquad a_n$ ist konvergent
$\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n =: e$

ad 1. & 2. Buch S.145

Rechenregeln f. konvergente Folgen:

$a_n \overset{n\to\infty}{\to} a \in \mathbb{R} \qquad b_n \overset{n\to\infty}{\to} b \in \mathbb{R} \qquad$ [eigentlich konvergent]

$c_n := a_n + b_n \qquad c_n$ konvergent und konv. gegen a+b $\qquad c_n \overset{n\to\infty}{\to} a + b$
$c_n := a_n - b_n \qquad c_n \overset{n\to\infty}{\to} a - b$
$(a_n \cdot b_n) \overset{n\to\infty}{\to} a \cdot b$
$(\underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{R}} \cdot a_n) \overset{n\to\infty}{\to} \lambda \cdot a$
$\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$ & $b_1, b_2, ... \neq 0$
Beweise siehe Buch.

Achtung bei uneigentlichen Konvergenzen!
unbestimmte Formen:
"$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$0 \cdot \infty$", "1^∞", "0^0", "∞^0"

$a_n \cdot b_n \qquad$ "$\infty \cdot 0$"

Bsp:

- $\underbrace{n}_{\infty} \cdot \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{0} = \frac{1}{n} \to 0$
- $\underbrace{n}_{\infty} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{0} = \sqrt{n} \to \infty$
- $\underbrace{n}_{\infty} \cdot \overbrace{\frac{1}{n}}^{0} = 1$

Rechenregeln f. uneigentliche konvergente Folgen

$a_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty, b_n \overset{n\to\infty}{\to} b$

$a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$

$\lambda \cdot a_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty, \lambda > 0 \vee -\infty, \lambda < 0$

$a_n \cdot b_n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty, b > 0 \vee -\infty, b < 0$

$\frac{b_n}{a_n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

$a_n \to +\infty \qquad b_n \to +\infty$

$a_n - b_n$: KEINE Aussage!

Bsp

$$\frac{n^2+5\cdot\sqrt{n}-3}{2n^n-5n+1} = \text{„}\frac{\infty}{\infty} - \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{5\sqrt{n}}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(2-\frac{5}{2}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\overbrace{1}^{1} + \overbrace{\frac{5}{n^{\frac{1}{2}}}}^{0} - \overbrace{\frac{3}{n^2}}^{0}}{\underbrace{2}_{2} - \underbrace{\frac{5}{n}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}} = \frac{1}{2}$$