Übung 1

Bsp 1)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\psi\\ \delta\\ \omega\end{bmatrix} = f(x,u) = \begin{pmatrix} -\frac{R(p_1+p_2\delta)}{N^2}\psi + v \\ \omega \\ -\frac{1}{2}\frac{p_2}{N^2 m}\psi^2 + g + \frac{f_L}{m}\end{pmatrix}$$

$$y = h(x,u) = \frac{\psi(p_1+p_2\delta)}{N^2}$$

Ges: Ruhelage des Systems für konst. Eingangsgröße $u_R = [v_R\ f_{L,R}]^T$

$$-\frac{R(p_1+p_2\delta_R)}{N^2}\psi_R + v_R = 0 \Rightarrow \frac{R(p_1+p_2\delta_R)}{N^2}\psi_R = v_R \Rightarrow \frac{1}{p_2}\left(\frac{v_R}{\psi_R}\frac{N^2}{R} - p_1\right) = \delta_R \checkmark$$

$$\omega_R = 0 \checkmark$$

$$-\frac{1}{2}\frac{p_2}{N^2 m}\psi_R^2 + g + \frac{f_{L,R}}{m} = 0 \Rightarrow \psi_R = \pm\sqrt{2\frac{N^2 m}{p_2}\left(g + \frac{f_{L,R}}{m}\right)} \checkmark$$

Man findet die Ruhelage eines Systems, indem man $f(x,u)=0$ nach den Zustandsgrößen löst!

Ges: v_R so, dass mit $f_{L,R}=0$ und $\delta_R = \bar{\delta}$ eine Ruhelage darstellt.

$$\psi_R = \pm\sqrt{\frac{N^2}{2}mg}$$

$$v_R = \frac{R(p_1+p_2\bar{\delta})}{N^2}\sqrt{2\frac{N^2}{p_2}mg}$$

Ges: Linearisiertes System um die Ruhelage

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R(p_1+p_2\delta_R)}{N^2} & -\frac{Rp_2\psi_R}{N^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{p_2}{N^2 m}\psi_R & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\psi} & \frac{\partial f_1}{\partial\delta} & \frac{\partial f_1}{\partial\omega} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\psi} & & \\ \frac{\partial f_3}{\partial\psi} & & \frac{\partial f_3}{\partial\omega}\end{pmatrix}\right|_{x=x_R}$$

$$c^T = \begin{pmatrix}\frac{p_1+p_2\delta_R}{N^2} & \frac{\psi_R p_2}{N^2} & 0\end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial\psi} & \frac{\partial h}{\partial\delta} & \frac{\partial h}{\partial\omega}\end{pmatrix}\right|_{x=x_R}$$

$$B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1/m\end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial f_L}\\ \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial f_L}\end{pmatrix}\right|_{x=x_R}$$

$$D = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial u_1} & \frac{\partial h}{\partial u_2}\end{pmatrix}\right|_{x=x_R}$$

mit

$$\Delta\dot{x} = A\,\Delta x + B\,\Delta u$$

$$\Delta y = c^T\Delta x + D\,\Delta u$$

Bsp 2)

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} \omega \\ g - \frac{F}{m} - \frac{\rho g \pi h^2}{3m}(3R - h) \end{bmatrix} \qquad h(x,u) = h, \quad x = [h \ \omega]^T$$

$$u = F, \quad y = h$$

Ruhelage: $f(x,u) = 0$: $\omega_R = 0$

$$g - \frac{F_R}{m} - \frac{\rho g \pi h_R^2}{3m}(3R - h_R) = 0$$

$$F_R(h_R = \tfrac{R}{3}) = mg - \frac{\rho g \pi}{3} (3R - h) h_R^2 \Big|_{h_R = \frac{R}{3}}$$

$$= mg - \frac{\rho g \pi}{3}\left(3\frac{R}{9} - \frac{3}{27}\right)$$

$$= mg - \rho g \pi \left(\frac{R^3}{9} - \frac{R^3}{81}\right)$$

$$= mg - \rho g \pi R^3 \left(\frac{8}{81}\right)$$

Linearisiertes System:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\frac{\rho g \pi R}{m} h_R + \frac{\rho g \pi}{m} h^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0$$

Bsp 3) Überprüfen auf Linearität bzw. Zeitinvarianz

a) $5\ddot{y} - \frac{1}{10}\dot{y}y = 7{,}5\,t\,u$ mit $y = x_1$ und $\dot{y} = x_2$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{7{,}5}{5} t u + \frac{1}{50} x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

Linearität folgt wenn das System in der Form

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$ dargestellt werden kann.

Sind die Matrizen A, B, C, D zeitunabhängig folgt Zeitinvarianz

Dieses System ist nicht linear und zeitvariant.

b) $\frac{1}{2}\dddot{y} - 10\ddot{y} - \frac{1}{1+t}y = \sqrt{2}\int_0^t u(\tau)d\tau + \frac{1}{3}\dot{u}$

$x_1 = y \qquad x_4 = \int_0^t u(\tau)\,d\tau$

$x_2 = \dot{y}$

$x_3 = \ddot{y} \qquad x_5 = u$

$x_6 = \dot{u} = v$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{1+t} & 0 & 20 & 2\sqrt{2} & 0 \\ & & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ x \\ x_4 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

(höchste − niedrigste) Ableitung

⇒ linear und zeitvariant

3. Ableitung am Ausgang verlangt 3 Zustände

2. Ableitung beim Eingang verlangt 2 weitere Zustände

$|1 - (-1)| = 2$

⇒ 5 Zustandsgrößen

oder im Gesamtsystem: (höchste − niedrigste) = (3 − (−1)) = 5 + 1 Eingangsgröße

c) $\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\ddot{y} + 3y = \frac{7}{10}u \quad (n=2)$: $\quad x_1 = y, \; x_2 = \dot{y}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{\cos(c)} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} u \frac{\quad}{\cos(c)}$$

Linear und zeitinvariant!

Übung 2

Bsp 4) a)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x$$

$\det(A-\lambda E) = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \; \lambda_3 = 2$

$\hookrightarrow n_1 = 2 \qquad \hookrightarrow n_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rang}(A-\lambda_1 E) = 1 \Rightarrow g_1 = 2 \; (=3-1)$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wegen $n_1 = g_1 \Rightarrow$ Basis aus Eigenvektoren

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{rang}(A-\lambda_3 E) = 2 \Rightarrow g_2 = 1 \; (=3-2)$$

wegen $n_2 = g_2 \Rightarrow$ Basis aus Eigenvektoren

$$\Rightarrow V_1 = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \qquad V_1^{-1} = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} = \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Zustandstransformation: $x = V_1 z$

A in Jordan Normalform:

mit den $\lambda_{1,2,3}$ in d. Hauptdiagonalen

$$\boxed{\tilde{A}_1 = V^{-1} A V} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ & & \end{bmatrix}$$

$\tilde{A}_1$ ist in Diagonalform weil alle $n_i = g_i$

b)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x, \quad \det(A-\lambda E) = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \; \lambda_3 = 2$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \boxed{g_1 = 1 < n_1 = 2} \Rightarrow 1 \text{ Hauptvektor}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rang}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow g_2 = 1 = n_2 \Rightarrow \text{Eigenvektor}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \; = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{A}_2 \notin$ Diagonalmatrix weil $n_1 \neq g_1$ ist.

$$\Rightarrow V = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \qquad V^{-1} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} = \left.\begin{matrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1/2 & \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \Rightarrow \tilde{A}_2 = V^{-1} A V = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

oder:

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ O.k. ist}$$

$$V = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad V^{-1} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Streckung ~~nicht~~ erlaubt!

mit Faktor 2 gestreckt

wenn auch v_1 (Eigenvek. f. v_2) gestreckt

Bsp 5) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u \qquad x(0) = x_0$

$y = [1 \quad 0]\, x \qquad \det(A-\lambda E = (-\lambda)\left(-\frac{d}{m}-\lambda\right) + \frac{k}{m} \overset{!}{=} 0$

$\lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2-4km}{4m^2}}$

mit $\tilde{d} = \frac{d}{m}$, $\tilde{k} = \frac{k}{h}$: $-\frac{\tilde{d}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{d}}{2}\right)^2 - \tilde{k}}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tilde{d} - \sqrt{\frac{1}{4}\tilde{d}^2 - \tilde{k}} & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{1}{2}\tilde{d} - \sqrt{\frac{1}{4}\tilde{d}^2 - \tilde{k}^2} \end{bmatrix} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\beta = -\alpha\left(\frac{1}{2}\tilde{d} - \sqrt{\frac{1}{4}\tilde{d}^2 - \tilde{k}}\right)$

$\alpha\tilde{k} + \beta($

Bsp 6)

a) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad u(t) = 1 + t \qquad x_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$

Das ist die Matrix aus Bsp 4.a.

Die Jordan Normalform der Matrix: $\tilde{A} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \qquad V = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$

wegen DIAGONALFORM

lässt ein Ablesen der Transitionsmatrix zu: $\qquad V^{-1} = \begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \quad \text{bzw} \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & -e^t & -e^t \\ 0 & e^t & e^t \\ 0 & 0 & -e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi = V\tilde{\Phi}V^{-1} \qquad \Phi = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^t - e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

b) Das System aus Bsp 4.b

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ liegt nicht in Diagonalform vor, denn es mussten Hauptvektoren wegen $n_1 > g_1$ verwendet werden.

Daher kommt auch (immer) der eingekreiste 1er!

Dann folgt die Transitionsmatrix zu (3.25) für diese Block!

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} e^t & t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi = V\tilde{\Phi}V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{\Phi} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 2t & 2t \\ 0 & 2e^t & 2e^t \\ 0 & 0 & -e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2t & 2t \\ 0 & e^t & e^t - e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des System von Bsp 6.a lautet:

$$\boxed{x(t) = \phi(t)x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau)\,B\,u(\tau)\,d\tau}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t - e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ e^{(t-\tau)} - e^{2(t-\tau)} \\ e^{2(t-\tau)} \end{bmatrix} (1+\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t - e^{2t} + 2e^t - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{5}{4} \\ e^{2t} - \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t e^{t-\tau} - e^{2(t-\tau)} + \tau e^{t-\tau} - \tau e^{2(t-\tau)}$$

$$\Big[-e^{t-\tau} + \frac{1}{2}e^{2(t-\tau)} - \tau e^{t-\tau} + \frac{\tau}{2}e^{2(t-\tau)} \dots\Big]_0^t$$

$$-1 + e^t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} - t + \dots$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{t}{2} + e^t - \frac{1}{2}e^{2t}$$

Grausliches Integral

Bsp 7

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \qquad x(0) = x_0$$

$$y = [0\,0\,1]\,x$$

Ges: Φ mit Hilfe der Laplace Transformation

$$\boxed{\hat{\phi}(s) = (sE - A)^{-1}} = \begin{pmatrix} s+1 & 0 & -1 \\ 0 & s-1 & -2 \\ -1 & 3 & s+4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(sE-A)} \begin{bmatrix} & & -(s-1) \\ & & 2(s+1) \\ & & (s+1)(s-1) \end{bmatrix}$$

für die spätere Lösung wird nur die letzte Spalte benötigt!

$$\det = (s+1)(s-1)(s+4) - (s-1) + 6(s+1)$$

$$= (s^2-1)(s+4) - s + 1 + 6s + 6 = s^3 + 4s^2 - s - 4 - s + 1 + 6s + 6$$

$$= s^3 + 4s^2 + 4s + 3$$

und $y(t) = c^T x(t) = [0\,0\,1]\,x(t) \Rightarrow$ auch nur die letzte Zeile wird benötigt.

diese Komponente Φ_{33} lautet $\dfrac{s^2-1}{s^3+4s^2+4s+3}$

Nullstelle durch probieren: $s = -3$

$$(s^3 + 4s^2 + 4s + 3) : (s+3) = s^2 + s + 1 \qquad s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}}\,i$$

$$\frac{-(s^3 + 3s^2)}{s^2 + 4s} \quad \frac{-(s^2 + 3s)}{s + 3}$$

$$s^2 - 1 = (As + B)(s+3) + C(s^2 + s + 1)$$

$$s^2 - 1 = As^2 + 3As + Bs + 3B + Cs^2 + Cs + C$$

$$1 = A + C \Rightarrow A = 1 - C$$
$$0 = 3A + B + C$$
$$-1 = 3B + C$$

$$0 = 3 - 3C - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}C + C$$
$$0 = \frac{8}{3} - \frac{7}{3}C \rightarrow C = \frac{8}{7}$$
$$A = -\frac{1}{7}, \quad B = -\frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \hat{\Phi}_{33}(s) = \frac{-s-5}{7(s^2+s+1)} + \frac{8}{7(s+3)}$$

$$\Rightarrow \Phi_{33} = \frac{8}{7}e^{-3t} + \dots$$

$$-s - 5 = A\Big(s + \frac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,i\Big) + B\Big(s + \frac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,i\Big)$$

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,i - 5 = B\Big(-\frac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,i + \frac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,i\Big)$$

$$-\frac{9}{2} - \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,i = 2\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,i\,B \Rightarrow B = j\frac{9}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$$

$$-1 = A + B$$

$$A = -\frac{1}{2} - \frac{9}{2\sqrt{3}}\,i$$

$$\frac{-\frac{1}{2} - \frac{9}{2\sqrt{3}}i}{s + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}}i} + \frac{-\frac{1}{2} + \frac{9}{2\sqrt{3}}i}{s + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}}i}$$

$$A\frac{1}{s - p_1} + B\frac{1}{s - p_2}$$

$$A\,e^{(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}}i)t} + B\,e^{(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}}i)t}$$

Bsp 8)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x, \quad \det(A) = \big(5(1+\lambda)\big) = -5 - 5\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \text{asymptotisch stabil}$$

Übung 3

Bsp 9, a) $\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -6 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1$

$y_1 = [2\,0\,0]\, x_1$

$\boxed{G(s) = c^T (sE-A)^{-1} b} + d$

$[2\,0\,0] \begin{bmatrix} s+3 & -2 & 2 \\ 6 & s & -5 \\ 6 & -2 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \frac{2}{\det(sE-A)} \left\{ -[-2(s-3)+4] \right\} = \frac{2}{\det} (2s-6-4)$

$(s+3)s(s-3) + 60 - 24 - 12s - 10s - 30 + 12s - 36$

s^2+3s

$s^3 - \cancel{3s^2} + \cancel{3s^2} - 9s - 30 - 10s$

$= \frac{4s-20}{s^3-19s-30} = G_1(s)$

$= \frac{4\cancel{(s-5)}}{(s+2)(s+3)\cancel{(s-5)}} = \frac{4}{(s+2)(s+3)}$

Die Übertragungsfunktion ist •) nicht sprungfähig: grad(n) > grad(z)

•) BIBO-stabil: Alle Pole in lin. HE

$(-3-\lambda)(-\lambda)(3-\lambda) - 60 + 24 + 12\lambda + 30 + 36 - \cancel{12\lambda} + 10\lambda$

$3\lambda + \lambda^2$

$9\lambda - \cancel{3\lambda^2} + \cancel{3\lambda^2} - \lambda^3 + 30 + 10\lambda = -\lambda^3 + 19\lambda + 30 = -(x+2)(x+3)(x-5)$

Das autonome System ist asymptotisch instabil: Eigenwert (A) i re. HE

b)

$\dot{x}_2 = \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ 6 & -10 \end{pmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u_2$ folgt $G(s) = \frac{4s^2+10s-60}{s^2+2s+10}$

$y_2 = [2\ \ 0]\, x_2 + 4\, u_2$

Diese Übertragungsfunktion ist •) sprungfähig

•) BIBO-stabil

$(8-\lambda)(-10-\lambda) + 90 = -80 - 8\lambda + 10\lambda + \lambda^2 + 90$

$= \lambda^2 + 2\lambda + 10 \qquad \lambda_{1,2} = \underline{-1} \pm \sqrt{\cdots}$

Das autonome System ist •) asymptotisch stabil

Bsp 10) $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\frac{1}{s}\} = \mathcal{L}^{-1}\{$

$\frac{7s^2+29s+320}{s(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-p_1)} + \frac{C}{(s-p_2)}$

$s^2+4s+29, \quad s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-29}$
$= -2 \pm 5j$

$7s^2+29s+320 = A(s-p_1)(s-p_2) + Bs(s-p_2) + Cs(s-p_1)$

p_1: $7p_1^2 + 29p_1 + 320 = Bp_1(p_1-p_2) \Rightarrow B =$

Bsp 11)

$$G(s)=\frac{s^4+5s^2+3s}{-2s^4-7s^3-7s^2+s+15}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}s^4-\frac{5}{2}s^2-\frac{3}{2}s}{1\cdot s^4+\frac{7}{2}s^3+\frac{7}{2}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{15}{2}}$$

$$=\frac{+\frac{7}{4}s^3-\frac{3}{4}s^2-\frac{7}{4}-\frac{15}{4}}{s^4+\frac{7}{2}s^3+\frac{7}{2}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{15}{2}}-\frac{1}{2}$$

$$(1-s)(5+2s)(s^2+2s+3)$$
$$(5+\cancel{2s}-3s-2s^2)(s^2+2s+3)$$
$$5s^2+10s+15-3s^3-6s^2-9s-2s^4-4s^3-6s^2$$
$$-7s^2+s-7s^3-2s^4+15$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{15}{2}\\1&0&0&1/2\\0&1&0&-7/2\\0&0&1&-7/2\end{bmatrix}X-\begin{bmatrix}\cancel{15/4}\\ 7/4\\ -3/4\\ 7/4\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&0&1\end{bmatrix}X-\frac{1}{2}u$$

Bsp 12)

$$G(s)=\frac{\overset{z_1}{(\frac{1}{\sqrt{3}}s-1)}\overset{z_2}{(s-1)}}{\underset{z_3}{(s^2+s+2)}\underset{z_4}{(s+1)}},\quad u(t)=\underbrace{5\cos(t-\frac{\pi}{3})}_{u_1}+\underbrace{\frac{13}{(t+5)^3}}_{u_2}+\underbrace{2}_{u_3}$$

für u_1: $|G(1)|=\cancel{\frac{(\frac{1}{\sqrt{3}}-1)\cdot 0}{8}}$

$$\frac{(\frac{1}{\sqrt{3}}s-1)(s-1)}{(s^3+s^2+2s+s^2+s+2)}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}\omega^2-\frac{1}{\sqrt{3}}j-j\omega+1}{-(j\omega^3-\omega^2 2+3j\omega+2}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\omega^2-j\omega(\frac{1}{\sqrt{3}}+1)}{2-2\omega^2+j(3\omega-\omega}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\omega^2-j\omega(\frac{1}{\sqrt{3}}+1))(2-2\omega^2-j(3\omega-\omega))}{(2-2\omega^2)^2+(3\omega-\omega^3)^2}$$

$$|G(j1)|=\left|\frac{[1-\frac{1}{\sqrt{3}}-j(\frac{1}{\sqrt{3}}+1)][2-2-j(3-1)]}{(2-2)^2+(3-1)^2}\right|=\left|\frac{2j+j\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}-2}{2}\right|$$

$$=\left|-\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+j\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2}\quad\sqrt{3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3+2\sqrt{3}+1+1-2\sqrt{3}+3}=\sqrt{\frac{8}{3}}$$

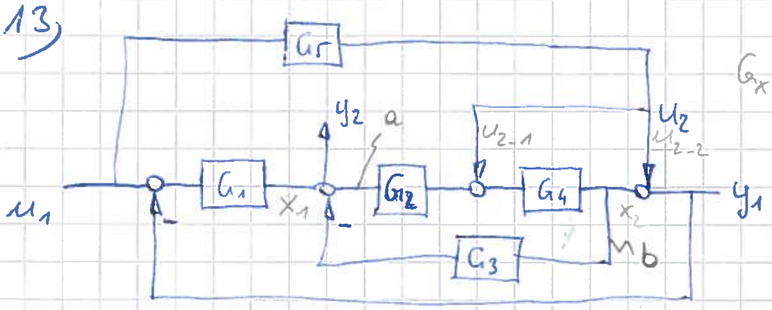
$$\arg(G(1j))=\arg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}j-1\right)+\arg(j-1)-\arg(\overset{1+j}{-1+j+2})-\arg(j+1)$$
$$=-30^\circ-45^\circ-45^\circ-45^\circ=-165^\circ=\underline{\underline{2{,}879\text{ rad}}}$$

$$y(t)=5\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}-\dots\right)+\underline{\underline{1}}\ \text{aus } u_3$$

$$\left(\left|\frac{1}{\sqrt{3}}j-1\right|\cdot|j-1|\right)/\left(|1+j|\cdot|1+j|\right)=\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{2}-\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{\frac{4-6}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{8}{3}}\Big/\sqrt{4}=\underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{3}}}}$$

Bsp 13)



$$G_x = \frac{x_2}{x_1} = \frac{G_2 G_4}{1 + G_2 G_3 G_4}$$

$$\frac{y_1}{u_1} = \frac{G_1 G_x}{1 + G_1 G_x \cdot 1} = \frac{G_1 G_2 G_4}{1 + G_1 \frac{G_2 G_4}{1 + G_2 G_3 G_4}} \quad \frac{1}{1 + G_2 G_3 G_4} = \frac{G_1 G_2 G_4}{1 + G_2 G_3 G_4 + G_1 G_2 G_4}$$

$$= \frac{G_1 G_2 G_4}{1 + G_2 G_4 (G_3 + G_1)}$$

$$\frac{y_2}{u_1} = \frac{G_1}{1 + G_x G_1} = \frac{G_1}{1 + \frac{G_2 G_4 G_1}{1 + G_2 G_3 G_4}} = \frac{G_1 (1 + G_2 G_3 G_4)}{1 + G_2 G_3 G_4 + G_2 G_4 G_1}$$

$a = \hat{y}_2 - b\, G_3$

$b = a\, G_2 G_4 + u_2 G_4$

$\quad = \hat{y}_2 G_2 G_4 - b\, G_3 G_2 G_4 + u_2 G_4$

$\hat{y}_1 = b + u_2$

$$\quad = \frac{1}{1 + G_2 G_3 G_4} \left(\hat{y}_2 G_2 G_4 + u_2 G_4 \right) + u_2$$

$\hat{y}_2 = (u_1 - \hat{y}_1)\, G_1$

$$\quad = G_1 u_1 - \frac{G_1}{1 + G_2 G_3 G_4} \left(\hat{y}_2 G_2 G_4 + u_2 G_4 \right) - u_2 G_1$$

$$\hat{y}_2 = \frac{1 + G_2 G_3 G_4}{G_1 G_2 G_4}$$

Bsp 14)

Polstellen aus Diagramm: $p_1 = -8 \quad p_2 = -1 + 3j$

$p_3 = p_2^* = -1 - 3j$

Nullstellen aus Diagramm: $n_1 = -4 \quad n_2 = -2 \quad n_3 = 5$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{25(s+4)(s+2)(s-5)}{(s+8)(s^2+2s+9)}$$

Angabe: $V = 25$

$(s+1-3j)(s+1+3j)$

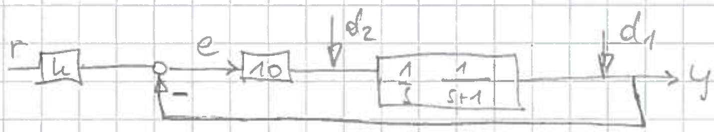
$s^2 + s + \cancel{3js}$ $\qquad s^2+2s+9$

$+ s + 1 + \cancel{3j}$

$- \cancel{3js} - \cancel{3j} + 9$

Das System ist
- ◦) BIBO-stabil
- ◦) sprungfähig
- ◦) nicht phasenminimal

Bsp 15)



$d_1 = d_2 = 0 \qquad r(t) = \sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

$$\hat{y} = \hat{e}\, 10 \frac{1}{s(s+1)} \qquad \hat{e} = k\hat{r} - \hat{y}$$

$$= (k\hat{r} - \hat{y}) \frac{10}{s(s+1)} \Rightarrow \hat{y}\left(1 + \frac{10}{s(s+1)}\right) = k\hat{r}\frac{10}{s(s+1)}$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \hat{r}\frac{10k}{s(s+1)+10} = \hat{r}\frac{10k}{s^2+s+10}$$

$\Rightarrow k \in$ beliebig

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\hat{e} = \lim_{s\to 0} s\left(k\frac{1}{s} - \frac{1}{s}\frac{10k}{s^2+s+10}\right) = \lim_{s\to 0} k\left(1 - \frac{10}{s^2+s+10}\right) = k\,0$$

1) $d_1 = 0,\ d_2 = \sigma(t)$

$$\hat{y} = (10\hat{e} + \hat{d}_2)\frac{1}{s(s+1)} \qquad \hat{e} = -\hat{y}$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \frac{\hat{d}_2}{s^2+s+10}, \quad \hat{d}_2 = \frac{1}{s}, \quad \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s(-\hat{y}) = -\frac{1}{10}$$

2) $d_1 = \sigma(t),\ d_2 = 0$

$$\hat{y} = \hat{e}\,10\frac{1}{s(s+1)} + \hat{d}_1 \Rightarrow \hat{y} = \frac{s^2+s}{s^2+s+10}\hat{d}_1, \quad \lim_{t\to\infty} e(t) = -\lim_{s\to 0} s(\hat{y}) = 0$$

3) $d_1 = t,\ d_2 = 0$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\left(-\frac{1}{s^2}\right)\frac{s^2+s}{s^2+s+10} = -\frac{1}{10}$$

Bsp 16)

$$G(s) = -\frac{1}{50}\,\frac{s^2+99s-100}{(s^2-4s+100)(s+0{,}1)} = \frac{-(s-1)(s+100)}{50\cdot 0{,}1\cdot 100\left(\frac{s}{0{,}1}+1\right)\left[\left(\frac{s}{10}\right)^2 + 2\cdot\left(-0{,}2\cdot\frac{s}{10}\right)+1\right]}$$

$s^2 + 99s - 100 : (s-1) = s + 100$

$-(s^2 - s)$

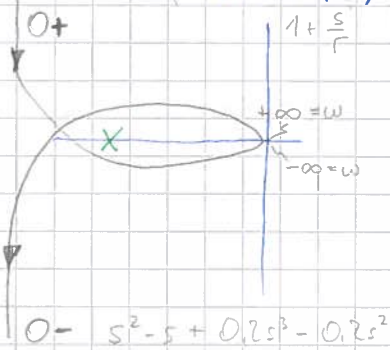
$100s - 100$

$$= \frac{(-s+1)\left(\frac{s}{100}+1\right)}{5\left(\frac{s}{0{,}1}+1\right)\left[\left(\frac{s}{10}\right)^2 + 2\left(-0{,}2\frac{s}{10}\right)+1\right]}$$

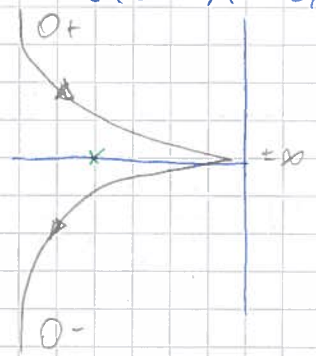
Übertragungsfkt. i. normierter Form

Beispiel 17)

$$L_1(s) = \frac{1+2s}{s(s-1)(1+0{,}2s)} \qquad L_2(s) = \frac{1+2s}{s(s^2-1)(1+0{,}2s)}$$



$s^2 - s + 0{,}2s^3 - 0{,}2s^2$



Bestimmung der Stabilität mittels Nyquist-Kriterium:

a)

$$\frac{1+2s}{s^2+0{,}2s^3-s-0{,}2s^2} = \frac{(1+2j\omega)}{-0{,}2\omega^3 j - 0{,}8\omega^2 - j\omega} \rightarrow \frac{(1+2j\omega)(-0{,}8\omega^2+j\omega+j\omega^3)}{(0{,}8\omega)^2+(\omega+0{,}2\omega^3)^2}$$

$$= \frac{-0{,}8\omega^2 + 2\omega^2 - 2\omega^4 + j(\omega+\omega^3-0{,}8\omega^2)}{(0{,}8\omega)^2+(\omega+0{,}4\omega^4+0{,}04\omega^6}$$

$$\boxed{\Delta\arg(1+L_1(j\omega)) = 3\pi = [\underbrace{3}_{\max(\mathrm{grad}(n_s, z_s))} - \underbrace{1}_{N_-(n(s))} + \underbrace{1}_{N_+(n(s))}]\pi = 3\pi} \Rightarrow T_{r,y} = \text{stabil}$$

b)

$$\Delta\arg(1+L_2(j\omega)) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \neq [4 - 2 + 1]\pi = 3\pi \Rightarrow \text{instabil}$$

Beispiel 18)

$t_r\omega_c = 1{,}5 \qquad \phi + \ddot{u} \approx 70$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(\frac{s}{3}+1)} \qquad t_r = \frac{3}{4}s \qquad \ddot{u} = 10\% \qquad R(s) = \frac{V(sT+1)}{sT_R+1}$$

$$\omega_c \approx \frac{4 \cdot 1{,}5}{3} s^{-1} = \frac{4}{3}\frac{3}{2} = 2 \qquad \phi = 60°$$

$$-\arg(j\omega_c) - \arg(j\omega_c+1) - \arg\left(j\frac{\omega_c}{3}+1\right) + \varphi_{LIN} \overset{!}{=} 60° - \pi = -120°$$

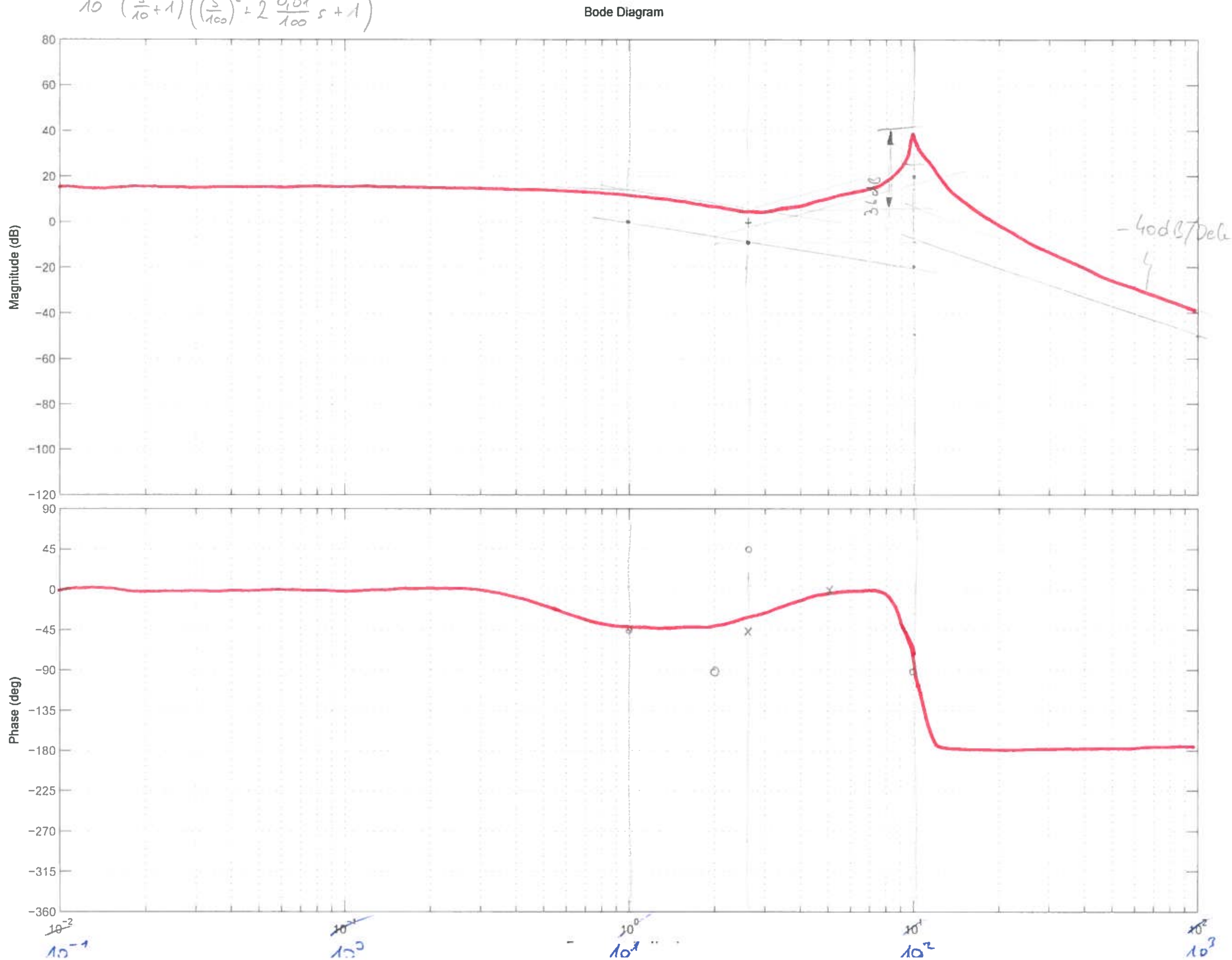
$$-90° - \arctan(2) - \arctan\left(\tfrac{2}{3}\right) + \varphi_{LIN} = -120° = -\tfrac{2}{3}\pi$$

$$\Rightarrow \varphi_{LIN} = \arctan(2) + \arctan\left(\tfrac{2}{3}\right) - \underbrace{\tfrac{1}{6}\pi}_{\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3})} =$$

$$= \left[\arctan\left(\frac{2\ \frac{2}{3}}{1-2\frac{2}{3}}\right) + \pi\right] - \frac{1}{6}\pi = -\arctan(4) + \frac{5}{6}\pi$$

Bsp 20)
$$G(s) = \frac{s+25}{\left(\left(\frac{s}{100}\right)^2 + 2\,\frac{0{,}01}{100}\,s + 1\right)(s+10)} = \frac{25\;\left(\frac{s}{25}+1\right)}{10\;\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\left(\frac{s}{100}\right)^2 + 2\,\frac{0{,}01}{100}\,s+1\right)}$$

$$40\ \log\left(\sqrt{2\cdot 0{,}01}\right) = 20\ \log(2\cdot 0{,}01) = 20\left[\log(2) - \log(0{,}01)\right]$$
$$\approx 6\,dB - 40\,dB = -36\,dB$$

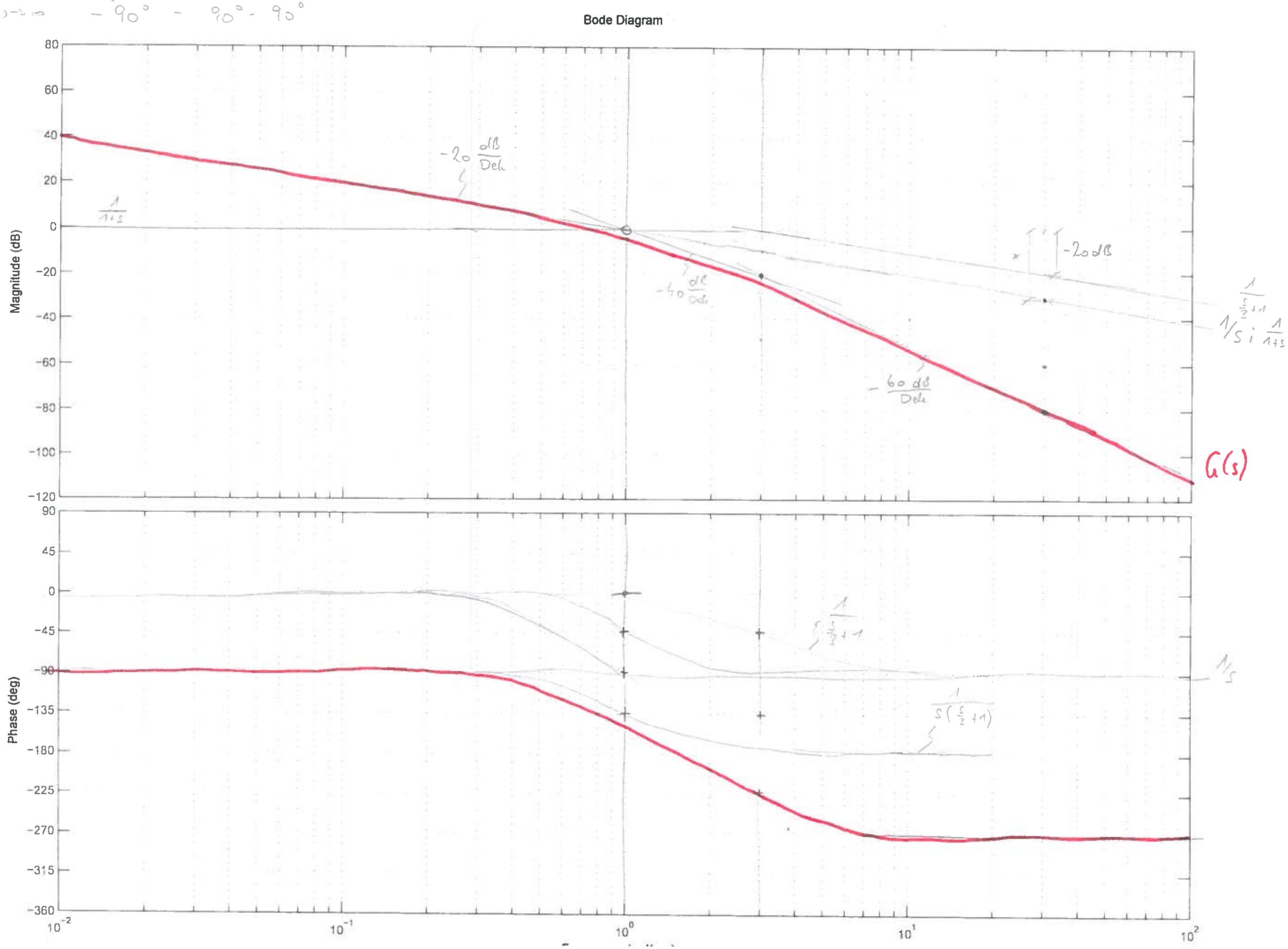


Bsp 18

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s\frac{1}{3}+1)}$$

$-\arg(j\omega) - \arg(j\omega+1) - \arg(j\frac{\omega}{3}+1)$

$-90° \quad - \quad 90° - 90°$



Bsp 22)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad \text{Ges: Abtastsyst.} \quad x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k$$

$$\Phi = \exp(A T_a) \qquad \Gamma = \int_0^t \exp(A\tau)\, d\tau\, B$$

$(-\lambda)(-2-\lambda)+1 = 2\lambda + \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{12} = -1 + \sqrt{\ldots} \rightarrow -1 \quad n_1 = 2$

$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow g_1 = 2-1 = 1 \Rightarrow$ Hauptvektor

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) = V^{-1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$\Phi = V \tilde{\Phi} V^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t & e^{-t}-t \\ -e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t+e^{-t} & t \\ -t & e^{-t}-t \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi = \begin{bmatrix} T_A + e^{T_A} & T_A \\ T_A & e^{T_A} - T_A \end{bmatrix}$

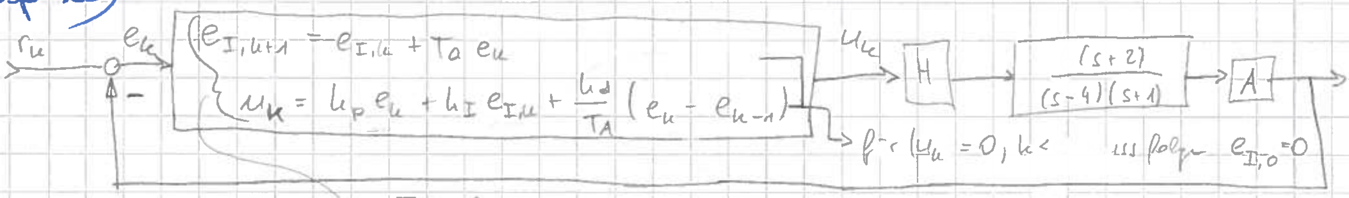
Lösung: $\Phi = \begin{bmatrix} (1+T)\, e^{-T_A} & T_A\, e^{T_A} \\ -T_A\, e^{-T_A} & (1-T_A) e^{-T_A} \end{bmatrix}$

~~Bsp 23~~

$\Gamma = \int_0^{T_A} \exp(A\tau)\, d\tau\, B = \int_0^{T_A} \begin{pmatrix} \tau e^{-\tau} \\ e^{-\tau} - \tau e^{-\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{matrix} -\tau e^{-\tau}\Big|_0^{T_A} + \int_0^{T_A} e^{-\tau} d\tau \\ -e^{-\tau}\Big|_0^{T_A} + \tau e^{-\tau}\Big|_0^{T_A} - \int_0^{T_A} e^{-\tau} d\tau \end{matrix}$

$= \begin{matrix} -T_A e^{-T_A} - e^{-T_A} + 1 \\ -e^{-T_A} + 1 + T_A e^{-T_A} + e^{-T_A} - 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 - (1+T_A)\, e^{-T_A} \\ T_A\, e^{-T_A} \end{pmatrix}$

Bsp 23)



$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_A$

$y_k = c^T x_k + d u_A$

z-Transf.

$z\left(e_{I,z}(z) - e_{I,0} z^0\right) = e_{I,z} + T e_z \Rightarrow e_I = \frac{1}{z-1}\left(e_{I,0} z + T_A e_z\right)$

$u_z = k_p e_z + k_I e_{I,z} + \frac{k_d}{T_A}\left(\frac{z-1}{z} e_z - e_{-1}\right) \qquad = 0 \text{ (AB)}$

$= k_p e_z + \frac{k_I}{z-1}\left(e_{I,0} z + T_A e_z\right) + \frac{k_d}{T_A}\left(\frac{z-1}{z} e_z - e_{-1}\right)$

$= k_p e_z + \frac{k_I}{z-1} T_A e_z + \frac{k_d}{T_A} \frac{z-1}{z} e_z$

$$\Rightarrow \frac{u_z}{e_z} = k_p + \frac{k_I}{z-1} T_A + \frac{k_d}{T_A} \frac{z-1}{z}$$

$e_z = \frac{z}{z-1}$ (wegen $e_k \cdot (1)^k$)

$u_z = k_p \frac{z}{z-1} + \frac{k_I}{z-1} T_A \frac{z}{z-1} + k_d \frac{1}{T_A} \cancel{\frac{z-1}{z}} \cancel{\frac{z}{z-1}}$

$\Rightarrow u_k = k_p (1)^k + k_I\, k T_A) + \frac{k_d}{T_A} \delta_k$

Bsp 24)

$$G(s) = \frac{6(s+2)}{(s-4)(s+1)} \qquad 0 = A + B + C$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{ \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s} \right)\Big|_{t=kT_A} \right) \right\}$$

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{6(s+2)}{s(s-4)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s+1} \qquad 6(s+2) = A(s-4)(s+1) + \quad s \; s+ \quad + Cs \; -4$$

$$s=4: \quad 36 = B\,20 \Rightarrow B = \frac{36}{20} = \frac{9}{5}$$

$$= -\frac{3}{s} + \frac{9}{5(s-4)} + \frac{6}{5(s+1)}$$

$$s=-1: \quad 6 = 5C \rightarrow C = \frac{6}{5}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = -3\sigma(t) + \frac{9}{5} e^{4t} + \frac{6}{5} e^{-t} \qquad A = -\frac{9}{5} - \frac{6}{5} = -\frac{15}{5} = -3$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\Big|_{t=kT_A} = -3\sigma(kT_A) + \frac{9}{5} e^{4kT_A} + \frac{6}{5} e^{-kT_A}$$

$$\mathcal{Z}(\ldots) = -3\frac{z}{z-1} + \frac{9}{5}\frac{z}{z-e^{4T_A}} + \frac{6}{5}\frac{z}{z-e^{-T_A}}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}(\ldots) = -3 + \frac{9}{5}\frac{z-1}{z-e^{4T_A}} + \frac{6}{5}\frac{z-1}{z-e^{-T_A}}$$

Bsp 25)

$k_I = k_d = 0$, $T_A = \ln(3/2)$, $k_p = 1$, $T_A = \ln(3/2)$ $\qquad 3^2 = 9 \quad 3^4 = 81 \quad 2^4 = 16$

Geschlossenen Regelkreis betrachten $\quad T_{r,y}(z) = \frac{k_p G(z)}{1 + k_p G(z)}$

$$G(z) = -3 + \frac{9}{5}\frac{z-1}{z-\left(\frac{3}{2}\right)^4} + \frac{6}{5}\frac{z-1}{z-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{-3\left(-\frac{81}{16}+z\right) + \frac{9}{5}(z-1)\left(z-\frac{2}{3}\right) + 6/5\,(z-1)\left(z-\frac{81}{16}\right)}{\left(z-\frac{81}{16}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)} \qquad T_{r,y}(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

für eingeschwungene Lösung:

harmonische Fkt $\rightarrow |G| \sin(\omega t + \varphi)$

andere Fkt $\rightarrow$ Endwertsatz

$$T_{r,y} = \frac{6{,}912\,z - 2{,}85}{z^2 + 1{,}183z + 0{,}525}$$

JURY-Verfahren:

z^3	1	1,183	0,525	
	0,525	1,183	1	$\lambda_3 = \frac{0{,}525}{1}$
z^2	$1 - \frac{0{,}525}{1} \cdot 0{,}525 = 0{,}7243$	$1{,}183 - \frac{0{,}525}{1} 1{,}183 = 0{,}561925$	0 / 0	$\lambda_2 = \frac{0{,}561925}{0{,}7243} = 0{,}775$
	0,561925	0,7243		
	0,289	0,000582		
	0,000582	0,289		

> 0

erfüllt

$$(u_k) = \sin(k + 35°) + \underbrace{3(1)}_{b_k}$$

$$\Rightarrow y_k = \left|T_{r,y}\left(e^{j\omega_0 T_A}\right)\right| \sin\left(k + 35° + \arg\left(T_{r,y}\left(e^{j\omega_0 T_A}\right)\right)\right)$$

$$+ \lim_{k\to\infty} 3\, T_{r,y}\, b_k$$

$$= \ldots + \lim_{z\to 1} (z-1)\, 3\, T_{r,y}\, b_z$$

$$b_z = \frac{z}{z-1}$$

Bsp 26)

$$G(s) = 10\,\frac{(s-1)}{s(s^2+s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\cancel{(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})}\ s^2+s+1} + \cancel{\frac{C}{(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})}}$$

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+s+1}$$

$$10(s-1) = As(s^2+s+1) + B(s^2+s+1) + Cs^3 + Ds^2$$

$$10s - 10 = As^3 + As^2 + As + Bs^2 + Bs + B + Cs^3 + Ds^2$$

$$0 = A + C \Rightarrow C = -20$$
$$0 = A + B + D \Rightarrow D = -10$$
$$10 = A + B \Rightarrow A = 20$$
$$-10 = B$$

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{20}{s} - \frac{10}{s^2} - \frac{10(2s+1)}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{20}{s} - \frac{10}{s^2} - 20\,\frac{(s+\frac{1}{2})}{(s+\frac{1}{2})^2\ \frac{3}{4}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = 20\sigma(t) - 10t - 20\,e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,t\right)$$

Abtast.: $20\sigma(kT_A) - 10kT_A - 20e^{-\frac{1}{2}kT_A}\cos\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,kT_A\right)$

Z-Transformieren:

$$20\,\frac{z}{z-1} - 10\,\frac{T_A z}{(z-1)^2} - 20\,\frac{z\left(z - e^{-\frac{1}{2}T_A}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}T_A\right)\right)}{z^2 - 2ze^{-\frac{1}{2}T_A}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}T_A\right) + e^{-2\frac{1}{2}T_A}}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left(\mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\Big|_{t=kT_A}\right)\right)$$

$$G(z) = 20 - \frac{10\,T_A}{(z-1)} - 20\,\frac{(z-1)\left(z - e^{-\frac{1}{2}T_A}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}T_A\right)\right)}{z^2 - 2ze^{-\frac{1}{2}T_A}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}T_A\right) + e^{-T_A}}$$

Bsp 27)
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} x$$

PBH - Eigenvektortest: Es gibt $w_i^T A = \lambda w_i^T$ mit $w_i^T b = 0$

$\rightarrow$ nicht erreichbar

Es gibt $A v_i = \lambda v_i$ mit $c^T v_i = 0$

$\rightarrow$ nicht beobachtbar

1) Erreichbarkeit:

$$(3-\lambda)(-4-\lambda)(-5-\lambda) + 4 + 12(-4-\lambda) - 2(3-\lambda)$$

$$(-12 - 3\lambda + 4\lambda + \lambda^2)(-5-\lambda) + 4 - 48 - 12\lambda - 6 + 2\lambda$$

$$60 + 12\lambda + 15\lambda + 3\lambda^2 - 20\lambda - 4\lambda^2 - 5\lambda^2 - \lambda^3 - 10\lambda - 50$$

$$-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 10 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$(-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 10) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 - 7\lambda - 10$$
$$-(-\lambda^3 + \lambda^2)$$
$$-7\lambda^2 - 3\lambda$$
$$-7\lambda^2 + 7\lambda$$
$$-10\lambda + 10$$

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 \Rightarrow \lambda_{2,3} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{40}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{matrix} -5 \\ -2 \end{matrix}$$

$$w_i \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 0) \Rightarrow w_i = \underbrace{(0\ 0\ 0)}_{\text{einzige Möglichkeit}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$w_i \begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ \boxed{0} & -2 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & -3 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 0) \Rightarrow w_i = (0 \quad \Rightarrow \text{erreichbar}$$

↳ lassen nur $\vec{0}$ zu wegen fixiert

2) Beobachtbar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \qquad c^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{!}{\Rightarrow} v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$2\alpha - 4\beta = 0$$
$$4\beta = 0 \Rightarrow \text{nur Nullvektor möglich} \rightarrow \text{Beobachtbar}$$

Bsp 27 b)
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \ -1 \ 1)\, x$$

$$H = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 \\ m_3 & m_4 & m_5 \end{pmatrix}$$

$$m_k = c^T A^{k-1} b$$

$$m_1 = 0 \qquad m_2 = (0 \ -1 \ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$m_3 = (0 \ -1 \ 1)\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2-4 = -6 \qquad m_4 = (0 \ -1 \ 1)\begin{pmatrix} 19 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} = 30$$

$$m_5 = (0 \ -1 \ 1)\begin{pmatrix} \cancel{57-24-108} \\ 0+48+18 \\ 38-24-90 \end{pmatrix} = (-1 \ 1)\begin{pmatrix} 66 \\ -76 \end{pmatrix} = -142$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 30 \\ -6 & 30 & -142 \end{pmatrix}, \quad \det(H) = -360 - 360 + 216 - 568 \neq 0$$

$\Rightarrow$ erreichbar und beobachtbar!

Bsp 28)
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$16 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{2} = \tfrac{32}{2} - \tfrac{9}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{24}{2} = 12$$

$$\tfrac{8}{2} - \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2} = 1$$

$$\tfrac{8}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2} = 3$$

$$y = (0 \ 1 \ 1)\, x$$

1) Erreichbarkeit:
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(R) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \text{Erreichbar}$$

2) Beobachtbarkeit:

$$1 + \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2} = 1$$

$$-\tfrac{18}{2} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{2} = -3$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det(\Theta) = -12 + 2 + 4 + 6 = 0$$

$\Rightarrow$ nicht beobachtbar

b)
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Ordnung der Übertragungsfunktion
=
Rang der Beobachtbarkeitsmatrix

$$y = (0 \ 1 \ 1)\, x$$

1) Erreichbarkeit:
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(R) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \text{nicht erreichbar}$$

2) Beobachtbarkeit:
$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(\Theta) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \longrightarrow \text{beobachtbar!}$$

$-11{,}5 + 16 = 1{,}5$

Bsp. 29)

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{1}{2} & 8 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{2} & 6 & 5 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{13}{2} & \frac{51}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{21}{4} \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{21}{4} \end{bmatrix} \qquad \det(R) = 0 \Rightarrow \text{nicht vollständig erreichbar}$$

Ges: Parametrisierung des erreichbaren Unterraum V_r und des darauf orthogonal stehenden nicht erreichbaren Unterraums V_{nr} in der Form

$$V_r = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \}$$

$$V_{nr} = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x = \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 \}$$

Die Matrix R hat $\operatorname{rang}(R) = 2$, das System ist also nicht vollständig erreichbar.

Der erreichbare Unterraum wird dann von z.B.: der ersten und zweiten Spalte der Erreichbarkeitsmatrix aufgespannt.

$$V_r = \left\{ x = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Der nicht erreichbare Unterraum wird dann ~~[illegible]~~ von darauf normal stehenden Vektoren aufgespannt.

Es gilt: $v_1^T w = 0, \quad v_2^T w = 0$

z.B.: $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Es soll nun eine Steuerfolge u_k, $k = 0,1$ gefunden werden, die das System von einem beliebigen Zustand innerhalb von zwei Schritten in den Ursprung $\mathbf{x} = 0$ zurückführt.

Formel von Ackermann:

$$[0\ 0 \cdots 1] = v_1^T [b\ Ab\ \cdots] = [\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6{,}5 & 13{,}25 \\ 0 & -1 & -2{,}5 & -5{,}25 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -2{,}5 & 5{,}25 \end{bmatrix} = [0\ 0\ 0\ 1]$$

Dieses System kann nicht nach v_1 gelöst werden.

Denn:
1) $\mathrm{rang}(R) = 2$
2) $\det(R) = 0$ } äquivalent
3) usw.

Daher arbeitet man mit dem erreichbaren Unterraum

$$x_1 = \phi x_0 + \Gamma u_0$$

$$x_2 = \phi x_1 + \Gamma u_1 \overset{!}{=} 0$$

$$= \phi^2 x_0 + \phi \Gamma u_0 + \Gamma u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad [\phi\Gamma, \Gamma] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = -\phi^2 x_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & -13/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1/4 & -5/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ x_{3,0} \\ x_{4,0} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_0 + 3u_1 = 1/4\, x_{2,0} - 13/2\, x_{3,0}$$

$$+ \underline{\underline{u_1}} = +1/4\, x_{2,0} - 5/2\, x_{3,0}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u_0}} = -\frac{1}{2} x_{2,0} + 1\, x_{3,0}$$

x_0

$x_1 = \phi x_0 + \Gamma u_0$

$x_2 = \phi x_1 + \Gamma u_1 = 0$

$= \boxed{\phi^2 x_0 + \phi \Gamma u_0 + \Gamma u_1 = 0}$

ges: u_0, u_1

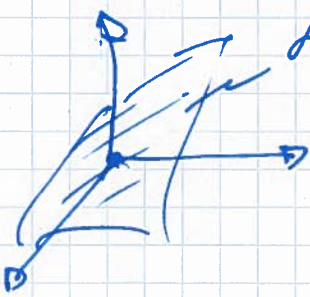
$\Rightarrow \quad \phi \Gamma u_0 + \Gamma u_1 = -\phi^2 x_0$

$$\underbrace{\underbrace{[\phi\Gamma, \Gamma]}_{4 \times 2}}_{A} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{-\phi^2 x_0}_{4 \times 1}}_{b}$$

$\dim(\mathrm{range}(A)) = 2$

Steuerbarkeit:

Dieses ϕ kann den immer höheren Potenzierung das Gleichungssystem vereinfachen => Steuerbar aber n. Erreichbar



$\mathcal{L}\{\phi\Gamma, \Gamma\}$

$\exists$ Lsg, wenn $b \in \mathcal{L}\{\phi\Gamma, \Gamma\}$

$x_0 = 0$

$x_1 = \cancel{\phi x_0} + \Gamma u_0$

$x_2 = \phi \Gamma u_0 + \Gamma u_1 = x \in \mathbb{R}^4$

Erreichbarkeit:

→ kein ϕ in Bedingungsgleichung für u

Bsp 30) $\left(k^T = \left[\frac{13}{2} \quad -\frac{37}{2} \quad -6 \right] \right)$ Lösung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad u = k^T x + g r$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \end{matrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 1]\, x$$

$$p_{g\,soll}(z) = (z+1)(z+2)(z+3) = z^3 + 3z^2 + 2z^2 + 6z + z^2 + 3z + 2z + 6$$
$$= z^3 + 6z^2 + 11z + 6$$

$$[0 \; 0 \; 1] = v_1^T \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \Rightarrow R^{-1} = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{matrix}$$

$$v_1^T = [0 \quad 0 \quad 1/4]$$

$$k^T = -v_1^T p_{g\,soll}(A) = -v_1^T \left[6E + 11 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -21 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ -3 & 27 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= -v_1^T \begin{pmatrix} \cancel{} & \cancel{} & \cancel{} \\ \cancel{} & & \cancel{} \\ -26 & 74 & 24 \end{pmatrix} = -\left[-\frac{26}{4} \quad \frac{74}{4} \quad \frac{24}{4} \right]$$

$$\Rightarrow k^T = \frac{13}{2} \quad -\frac{37}{2} \quad -6$$

$g = ?$ für $\lim\limits_{t \to \infty} (y - r)\Big|_{r = \sigma(t)} = 0$

$$g = \frac{1}{c^T(-A - b k^T)^{-1} b} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{13}{2} \quad -\frac{37}{2} \quad -6 \right) = \begin{matrix} \frac{13}{2} & -\frac{37}{2} & -6 \\ \frac{13}{2} & -\frac{37}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$[1 \; 0 \; 1] \begin{bmatrix} \boxed{-\left(1 + \frac{13}{2}\right)} & 1 + \frac{37}{2} & \boxed{6} \\ \boxed{-\frac{13}{2}} & -4 + \frac{37}{2} & \boxed{6} \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1 \; 0 \; 1] \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -\frac{15}{2} \\ -\frac{13}{2} \end{matrix}} & \frac{39}{2} & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 6 \end{matrix}} \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\left(-\frac{29}{2} + 6\right) - \left(-\frac{39}{2} + 6\right) + \left(\frac{13}{2} - \frac{29}{2}\right) - \left(\frac{15}{2} - \frac{39}{2}\right) \right] \frac{1}{\frac{435}{4} + \frac{234}{2} + \frac{78}{2} - \frac{174}{2} - \frac{90}{2} - \frac{507}{4}}$$

$$= \left[-\frac{17}{2} + \frac{27}{2} - \frac{16}{2} + \frac{24}{2} \right] \frac{1}{\frac{-36 + 312 - 264}{2}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow g = \frac{2}{3}$$