Beispiel 97 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 9, 01.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Es sei a_n die Anzahl aller Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten.

2 Lösung des Beispiels

Wir sehen uns zunächst einige Werte von n an:

$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
		$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$
			$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$
			$\{3,1\}$	$\{3,1\}$	$\{3,1\}$
				$\{3\}$	$\{4\}$
				$\{4,1\}$	$\{4,1\}$
				$\{4,2\}$	$\{4,2\}$
					$\{5\}$
					$\{5,1\}$
					$\{5,2\}$
					$\{5,3\}$
					$\{5,3,1\}$

Wir sehen also, dass die Anzahl der Elemente in der Lösungsmenge von den beiden vorhergehenden abhängt und wählen daher folgende Rekursion:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \qquad n \geq 2, x_0 = 1, x_1 = 2$$

Wir lösen diese homogene Differenzengleichung 2. Ordnung durch die Ansatzmethode ($x = \lambda^n$) und formen die Gleichung in ein charakteristisches Polynom um:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Nach dem Wurzelsatz von Vieta erhalten wir als Lösungen:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Wir erhalten somit die homogene Lösung:

$$\lambda_n^{(h)} = c_1 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Nun ermitteln wir die Koeffizienten durch 'Auswerten':

- $n = 0$:

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1$$

- $n = 1$:

$$2 = \lambda_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + (1 - \lambda_1) \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ergibt als Lösungen:

$$\lambda_1 = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \qquad \lambda_2 = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$$

Die Lösung lautet nun:

$$x_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$