Assistant Prof. Dr. rer. nat. habil. Benedikt Stufler
M. Sc. Philipp Beltran

Sommersemester 2022
28. Juni 2022

Algebra und Diskrete Mathematik

Klausur

Hinweise:

- Es sind außer einem Stift keine Hilfsmittel erlaubt.
- Bitte schalten Sie Ihre Mobiltelefone und sonstige elektronischen Geräte aus und verstauen Sie diese.
- Legen Sie bitte Ihren Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
- Bitte überprüfen Sie, ob Sie **fünf** Aufgaben erhalten haben.
- Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün und auch nicht mit Bleistift.
- Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
- Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.
- Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Sie haben **100 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	$\sum$
/16	/16	/20	/28	/20	/100

Aufgabe 1. [16 Punkte]

Überprüfen Sie, ob folgende Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und beweisen Sie Ihre Behauptung:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2(n+1) & 4n & 4n \\ -n & -2(n-1) & -2n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. [16 Punkte]

Kreuzen Sie den richtigen Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen an. Eine richtige Antwort führt zu zwei Punkten, eine falsche zu keinem Punkt. Ein Ankreuzen von "keine Angabe" führt zu einem Punkt.

Aussage
Ist V ein Vektorraum, so ist die leere Menge $\emptyset$ ein Untervektorraum von V.
Ein Integritätsring enthält mindestens zwei Elemente.
Jede injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist surjektiv.
Jede surjektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist injektiv.
Es gibt Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ die linear unabhängig sind.
Es gibt eine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ hat Dimension 2 als $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Die Elemente $1, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ sind $\mathbb{Q}$-linear unabhängig, wenn man $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum betrachtet.

Aufgabe 3. [20 Punkte]

Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist, und berechnen Sie die Determinante von A^{-1}.

b) Berechnen Sie die Determinante von A^2.

c) Berechnen Sie die Determinante von $A + A$.

d) Erklären Sie, ob es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass A^n nicht invertierbar ist.

Aufgabe 4. [28 Punkte]

a) Überprüfen Sie, ob die Vektoren

$$v_1 := (1,3), \quad v_2 := (2,1), \quad v_3 := (4,7)$$

ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$ bilden.

b) Bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^2$?

c) Existiert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(v_1) = (-2,-1), \quad f(v_2) = (6,3), \quad \text{und} \quad f(v_3) = (1,1)?$$

Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 5. [20 Punkte]

a) Geben Sie die Definition einer Äquivalenzrelation an.

b) Sei $M = \{1, \ldots, 9\}$. Geben Sie die kleinste Menge $R \subset M \times M$ an, die eine Äquivalenzrelation auf M bildet und die Elemente $(3,4), (5,6), (5,7), (7,8)$ enthält. Begründen Sie kurz die Richtigkeit Ihrer Antwort.