Bitte frei lassen! **Punkte:** **Note:**

Analysis für Informatik und WI - Vorlesungsprüfung - (Panholzer)

Arbeitszeit: 100 min.

Familienname: Vorname:

Matrikelnummer:

(1) [$8 = 4(a)+4(b)$ Punkte] Unter Zuhilfenahme von in der Vorlesung kennen gelernten Konvergenzkriterien untersuche man die folgenden Reihen auf Konvergenz und gebe eine begründete Antwort, ob Konvergenz vorliegt oder nicht.

(a) $$R_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$$

(b) $$R_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Hinweis: für Aufgabe (*b*) ist das Integralkriterium von Nutzen!

(2) [8 Punkte] Mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren bestimme man die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) = 2x + 3y + 6z$$

auf der Kugeloberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Radius $R = 7$, also unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49.$$

(3) [8 Punkte] Man bestimme die Lösung $y(x)$ der linearen Differentialgleichung

$$x^2y' + xy = 2,$$

welche $y(1) = 1$ erfüllt.

(4) [$8 = 2(a)+2(b)+2(c)+2(d)$ Punkte]

(a) Man gebe eine präzise Definition des Begriffes einer "Stammfunktion" $F(x)$ einer gegebenen Funktion $f(x)$.

(b) Man formuliere den Haupsatz der Differential- und Integralrechnung.

(c) An der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gelte für die Funktion $f(x)$, daß $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$. Was besitzt dann die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ?

(d) Für die Ableitung einer differenzierbaren reellen Funktion $f(x)$ gelte, daß $f'(x) = 0$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Was gilt dann für die Funktion $f(x)$ selbst?

(5) [8 Punkte] Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zum Thema "Folgen und Reihen" (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein; für jede vollständig richtige Antwort gibt es einen Punkt; es werden für falsche Antworten KEINE Punkte abgezogen):

Welche der folgenden Aussagen sind/ist richtig?
- Jeder Häufungspunkt ist Grenzwert
- Jeder Grenzwert ist Häufungspunkt

Gegeben ist eine Folge a_n. Was gilt?
- a_n besitzt höchstens einen Grenzwert
- a_n besitzt mindestens einen Grenzwert

Welche der folgenden Aussagen sind/ist richtig?
- Jede beschränkte Folge ist konvergent
- Jede konvergente Folge ist beschränkt
- Jede monotone Folge ist konvergent
- Jede konvergente Folge ist monoton

Sei a_n eine Cauchy-Folge, also für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N(\epsilon)$, sodaß $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m > N(\epsilon)$. Was gilt dann? 2, 3, 2, 3
- a_n ist monoton
- a_n ist konvergent
- a_n ist Nullfolge

Gegeben seien die Folgen $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{n}{n^2+1}$. Welche "Landau-Beziehungen" gelten?
- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$
- $a_n = o(b_n)$
- $a_n \sim b_n$

Angenommen die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergiert. Was wissen wir dann über die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ der Reihenglieder?
- a_n bildet eine Nullfolge
- $a_n = o(1)$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Wie ist das Cauchy-Produkt zweier Reihen $\sum_{n\geq 0} a_n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n$ definiert ?
- $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k\right)$
- $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k + b_{n-k}\right)$
- $\boxed{\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right)}$

Wie kann man den Konvergenzradius R einer Potenzreihe bestimmen?
- $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$
- $R = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
- $R = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$