

Analysis für INF & WINF - UE-Test 1 - V1

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Musterlösung

(1) [3 Punkte] Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$, mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n} k^4.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die asymptotische Beziehung $a_n = \mathcal{O}(n^5)$ gilt.
 (b) Zeigen Sie weiters, dass auch die asymptotische Beziehung $a_n = \Omega(n^5)$ gilt. Auf welche andere asymptotische Beziehung können Sie daraus gemeinsam mit dem ersten Punkt insbesondere schließen?

Hinweis: Für den 2. Punkt ist es hilfreich, die Summe bei der "Mitte" aufzuteilen.

Lösung. Wir gehen nach dem Hinweis vor und schätzen zuerst die Folge in beide Richtungen ab:

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n} k^4 \leq \sum_{k=1}^{2n} (2n)^4 = 2n \cdot (2n)^4 = (2n)^5 = 32n^5 \quad (1)$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n} k^4 \geq \sum_{k=n+1}^{2n} k^4 \geq \sum_{k=n+1}^{2n} (n+1)^4 = n \cdot (n+1)^4 \geq n \cdot n^4 = n^5 \quad (2)$$

Zusammenfassend ergibt das

$$n^5 \leq a_n \leq 64n^5.$$

Es folgt:

$$\frac{a_n}{n^5} \leq 64 \Rightarrow \limsup \left| \frac{a_n}{n^5} \right| \leq 64 \Rightarrow a_n = \mathcal{O}(n^5)$$

und

$$\frac{n^5}{a_n} \leq 1 \Rightarrow \limsup \left| \frac{n^5}{a_n} \right| \leq 1 \Rightarrow a_n = \Omega(n^5)$$

Da $\Theta(f) = \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f)$, können wir schließen, dass $a_n = \Theta(n^5)$.

Anmerkung. Zur Schreibweise der Landau-Symbole. Eigentlich sind $\mathcal{O}(f), \Omega(f), \Theta(f), \dots$ Mengen von Funktionen. $\mathcal{O}(f)$ ist nämlich die Menge aller Funktionen g , sodass $\limsup \left| \frac{g(n)}{f(n)} \right| \leq C \in \mathbb{R}$. Das heißt, streng genommen, haben wir oben die Beziehung $a_n \in \mathcal{O}(n^5)$ gezeigt (nicht $=$). Nur vor dem Hintergrund, dass es sich um Mengen von Funktionen handelt, macht die Schreibweise oben mit \cap Sinn.

Aus (mir unerfindlichen) Gründen hat sich die Schreibweise $g = \mathcal{O}(f)$ durchgesetzt. Da es sich um die gängige Schreibweise handelt, ist diese auch anzuraten, aber man muss immer daran denken, dass es sich um keine Gleichheit im eigentlichen Sinn handelt. Beispielsweise, haben wir oben gezeigt (geschrieben), $a_n = \mathcal{O}(n^5)$ und $a_n = \Omega(n^5)$, aber es gilt **nicht** $\mathcal{O}(n^5) = \Omega(n^5)$, was man bei einer Gleichheit erwarten würde.

(2) [3 Punkte] Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n3^n}$$

konvergiert. Untersuchen Sie dabei auch die “Randfälle”, also die Stellen am Rande des (reellen) Konvergenzintervalls.

Lösung. Es gibt verschiedene Lösungsansätze, die alle zum Ziel führen. Aus pädagogischen Zwecken verwenden wir die Formel für den Konvergenzradius. Wir haben eine Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-x_0)^n a_n, \text{ mit } x_0 = 3 \text{ und } a_n = \frac{1}{n3^n}$$

vorliegen. Mit der Formel $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ und dem Wissen, dass $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ erhalten wir

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1/n3^n}} \quad (4)$$

$$= \liminf \sqrt[n]{n3^n} \quad (5)$$

$$= \liminf \sqrt[n]{n}3 \quad (6)$$

$$= 3 \quad (7)$$

Also erhalten wir, dass die Potenzreihe jedenfalls für alle $x \in (x_0 - R, x_0 + R) = (0, 6)$ konvergiert. Für die Randfälle müssen wir einsetzen:

- $x=0$: Wir erhalten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Das ist die alternierende harmonische Reihe, von der wir bereits wissen, dass sie konvergiert.

- $x=6$: Wir erhalten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Das ist die harmonische Reihe, von der wir bereits wissen, dass sie divergiert. Insgesamt erhalten wir, dass die Potenzreihe für alle $x \in [0, 6)$ konvergiert.

- (3) [2 Punkte = $\max(0, \frac{1}{2} \cdot (\text{Anzahl richtiger Antworten} - \text{Anzahl falscher Antworten})$]
 Das heißt: Frage richtig gekreuzt: 0.5 Punkte, falsch gekreuzt: -0.5 Punkte, nicht gekreuzt: 0 Punkte; insgesamt aber nicht weniger als 0 Punkte auf die gesamte Aufgabe.

Kreuzen Sie bei den folgenden Aussagen “wahr” oder “falsch” an. Bewertet werden in dieser Aufgabe lediglich Ihre gesetzten Kreuzerl, Sie können aber natürlich Nebenrechnungen oder -überlegungen machen (gehen aber nicht in die Bewertung ein).

Aussage	Antwort
Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, so muss a_n eine monotone Nullfolge sein.	<input type="radio"/> wahr <input checked="" type="radio"/> falsch
Es gilt $\frac{2n^2+1}{3n^3+n^2+2n+1} = \mathcal{O}(n^{-1})$.	<input checked="" type="radio"/> wahr <input type="radio"/> falsch
Ist $f(n) = 2^n$, so ist $f(2n) = \mathcal{O}(2^n)$.	<input type="radio"/> wahr <input checked="" type="radio"/> falsch
Es existiert $\varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bijektiv, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\varphi(n)}}{\varphi(n)} = 0$.	<input checked="" type="radio"/> wahr <input type="radio"/> falsch

Begründung. Die offizielle Lösung steht oben (Kreuze). Hier nur eine Begründung, warum die Kreuze so zu setzen sind.

- (a) Das Leibniz-Kriterium ist hier **nicht** anwendbar, da seine Aussage genau in die andere Richtung geht. Als einfaches Gegenbeispiel kann man $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ betrachten.
- (b) Wir nennen die Folge aus der Angabe a_n und betrachten den Bruch $\frac{a_n}{n-1}$. Falls der \limsup hiervon endlich ist, dann haben wir die Beziehung gezeigt. Tatsächlich gilt, $\frac{a_n}{n-1} = n \cdot a_n = \frac{2n^3+n}{3n^3+n^2+2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}$ (siehe erste Übung).
- (c) Wir betrachten wieder den Bruch $\frac{f(2n)}{2^n} = \frac{2^{2n}}{2^n} = 2^n$. Insbesondere ist der \limsup unendlich und wir erhalten, dass die behauptete Beziehung nicht gilt.
- (d) Wir betrachten die Folge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ und beobachten, dass $a_{\varphi(n)} = \frac{(-1)^{\varphi(n)}}{\varphi(n)}$. Die Aussage aus der Angabe ist also äquivalent dazu, dass wir eine Umsortierung der Folgenglieder a_n finden, sodass die Reihe gegen 0 konvergiert. Jetzt müsste man den Satz aus der Vorlesung anwenden, dass dies möglich ist, da die alternierende harmonische Reihe zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Alternativ kann man versuchen, sich den Satz so herzuleiten (zumindest in diesem Spezialfall).