

Mathematik 1 für Informatik und Wirtschaftsinformatik

halbwegs mitgeschrieben von Ondřej Hošek

29. Juni 2010

Inhaltsübersicht

1. Grundlagen
 - a) Aufbau des Zahlensystems
 - b) komplexe Zahlen
 - c) Zahlentheorie
 - d) Relationen
 - e) Funktionen
2. Diskrete Mathematik
 - a) Kombinatorik
 - b) Graphentheorie
 - c) Algebra
3. Lineare Algebra
 - a) Rechnen mit Vektoren, Matrizen
 - b) Determinanten
 - c) Lösen von linearen Gleichungssystemen
4. Folgen, Reihen und Funktionen
 - a) Grenzwerte
5. Differentialrechnung in einer Variablen
 - a) Differentialquotient
 - b) Differentiationsregeln

1 Grundlagen

Mathematik: einerseits Logik (was betreibt man?), andererseits Mengenlehre (womit betreibt man es?)

1.1 Zahlen

1.1.1 Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Peano-Axiome: Eine Menge $\mathbb{N}$ heißt *Menge der natürlichen Zahlen*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. 0 ist eine natürliche Zahl: $0 \in \mathbb{N}$
2. Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat genau einen Nachfolger $n' \in \mathbb{N}$.
3. 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl, d.h. $\nexists n \in \mathbb{N} : n' = 0$.
4. Verschiedene natürliche Zahlen besitzen verschiedene Nachfolger, d.h. $\forall m, n \in \mathbb{N} : m' = n' \Rightarrow m = n$.
5. Besitzt eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{N}$ die beiden Eigenschaften
 - a) $0 \in S$
 - b) mit jeder natürlichen Zahl $n \in S$ ist auch $n' \in S$, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : n \in S \Rightarrow n' \in S$, dann gilt $S = \mathbb{N}$ (Induktionsprinzip).

Rechenoperation: $+$ definiert durch

$$\begin{aligned}n + 0 &= n \\n + 1 &= n' \\n + k' &= (n + k)'\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}n + 3 &= n + 2' \\&= (n + 2)'\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&= (n + 1')' \\&= ((n + 1)')' \\&= ((n')')' \\&= n'''\end{aligned}$$

Rechenoperation: $\cdot$ definiert durch

$$\begin{aligned}n \cdot 0 &= 0 \\n \cdot k' &= (n \cdot k) + n\end{aligned}$$

Ordnungsrelation: $\leq$ „natürliche Ordnung“ $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq \dots$ (wir verwenden $\leq$ als Ordnungsrelation, da sie im Gegensatz zu $<$ reflexiv ist)

Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

Beispiel:

$$\begin{aligned}1 &= 1^2 \\1 + 3 &= 2^2 \\1 + 3 + 5 &= 3^2\end{aligned}$$

Vermutung: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ergibt n^2 , d.h. $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 = 0^2 \\ S_1 &= 1 = 1^2 \end{aligned}$$

allgemeiner Schritt $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2 \\ S_{n+1} &= \underbrace{1 + 3 + \dots + (2n-1)}_{n^2} + (2n+1) = n^2 + (2n+1) \end{aligned}$$

also

$$S_{n+1} = (n+1)^2$$

Satz (Prinzip der vollständigen Induktion): Gilt für eine Aussage $P(n), n \in \mathbb{N}$, dass:

1. $P(0)$ wahr ist
2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

dann ist $P(n)$ wahr für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

Also:

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

Bemerkungen:

- (1.) heißt Induktionsanfang
- (2.) heißt Induktionsschritt ($P(n)$: Induktionsvoraussetzung, $P(n+1)$: Induktionsbehauptung)
- Statt $P(0)$ auch beliebiger Induktionsanfang $P(n_0)$ möglich; $P(n)$ gilt dann für alle $n \geq n_0$.
- Statt (2.) auch möglich:
(2.') $P(0), P(1), \dots, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beispiel 1: Behauptung $P(n) : 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ bzw. $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis:

1. Induktionsanfang $n = 0$: $0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$ OK
2. Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$:
Zu zeigen:

$$\begin{aligned} 0 + 1 + \dots + (n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ P(n) : 0 + 1 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \quad | + (n+1) \\ 0 + 1 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ 0 + 1 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n+1}{2}(n+2) \\ P(n+1) : 0 + 1 + \dots + n + (n+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

q.e.d.

Beispiel 2: Behauptung: $n^2 \geq n + 20$ für $n \geq 5$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. $n = 5 : 25 \geq 5 + 20$ OK

2. $n \rightarrow n + 1 :$

Zu zeigen:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &\geq (n+1) + 20 \\ n^2 &\geq n + 20 \\ (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 &\geq (n+20) + \underbrace{2n}_{\geq 0} + 1 \geq n + 21\end{aligned}$$

q.e.d.

Beispiel 3: Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt prim, wenn sie nicht als Produkt $n = r \cdot s$ mit $r, s \in \mathbb{N}, r < n, s < n$ darstellbar ist.

Behauptung: jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist entweder prim oder als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellbar.

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. *Induktionsanfang:* $n = 2 = 2^1$ prim. OK.

2. *Induktionsschritt:* $2, 3, \dots, n \rightarrow n + 1$

a) *Induktionsbehauptung:* $n + 1$ ist prim oder Produkt endlich vieler Primzahlen.

Wir betrachten $n + 1$:

i. $n + 1$ ist prim
oder

ii. $n + 1 = r \cdot s$ mit $r, s < n + 1$, also $r, s \leq n$
 r und s sind entweder prim oder Produkt endlich vieler Primzahlen.
 $\Rightarrow n + 1$ ist wieder Produkt endlich vieler Primzahlen.

q.e.d

1.1.2 Ganze und rationale Zahlen

$$\begin{aligned}\mathbb{N} \cup \{-1, -2, \dots\} &= \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \cup \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \dots \right\} &= \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} \cup \left\{ \sqrt{2}, \pi, e, 2\pi - \frac{1}{2}, \dots \right\} &= \mathbb{R} \\ \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} &\subseteq \mathbb{R} \\ \mathbb{Z} &= \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}\end{aligned}$$

$\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen. Hier gilt: $a + x = b$ ist in $\mathbb{Z}$ stets lösbar: $x = b - a$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen, wobei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \rightarrow$ Erweitern, Kürzen. In $\mathbb{Q}$ gilt: $a \cdot x = b$ ist $\forall a, b \in \mathbb{Q} \wedge a \neq 0$ stets lösbar: $x = \frac{b}{a} = b : a$

Behauptung: die Gleichung $x^2 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$, d.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: Angenommen, $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; p, q nicht beide gerade.

$\Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ gerade, p gerade, also $p = 2 \cdot r, r \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2 \Rightarrow q^2$ gerade, q gerade. *Widerspruch* zu p, q nicht beide gerade.

Also: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.1.3 Reelle Zahlen

$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen = Menge aller positiven und negativen, endlichen und unendlichen Dezimalzahlen.

$$127,5 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} \quad \text{endliche Dezimalzahl}$$

$$\frac{5}{11} = 0,4545 \dots = 0,4\overline{5} \quad \text{reinperiodische Dezimalzahl}$$

$$\frac{1}{12} = 0,0833 \dots = 0,08\dot{3} \quad \text{schließlich periodische Dezimalzahl}$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135 \dots \quad \text{nichtperiodische unendliche Dezimalzahl}$$

Endliche und periodische Dezimalzahlen sind rational ($\mathbb{Q}$), nichtperiodische und unendliche Dezimalzahlen sind irrational ($\mathbb{I}$). Sowohl rationale als auch irrationale Zahlen sind reell ($\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} r \in \mathbb{R} \Rightarrow r &= \pm c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} \dots \\ &= \pm \left(c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \dots + c_1 10 + c_0 + c_{-1} 10^{-1} + \dots \right) \\ &\quad \text{Dezimalentwicklung von } r \text{ zu Basis } 10 \text{ mit Ziffern } c_i = \{0, 1, \dots, 9\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \in \mathbb{R} : |r| &= \begin{cases} r & r \geq 0 \\ -r & r < 0 \end{cases} \quad \text{Betrag von } r \\ \lfloor r \rfloor &= \max \{k \in \mathbb{Z} | k \leq r\} \quad \text{Ganzteil (floor)} \\ \{r\} &= r - \lfloor r \rfloor \quad \text{Bruchteil} \\ \Rightarrow r &= \lfloor r \rfloor + \{r\} \end{aligned}$$

Rechnen in $\mathbb{R}$: Operationen $+$ und $\cdot$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Abgeschlossenheit:* $\forall a, b$

$$\begin{aligned} a, b \in \mathbb{R} &\Rightarrow a + b \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. *Assoziativgesetze:* $\forall a, b, c$

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

3. *Existenz von neutralen Elementen:* $\forall a$

$$\begin{aligned} a + 0 &= 0 + a = a \\ a \cdot 1 &= 1 \cdot a = a \end{aligned}$$

4. *Existenz von inversen Elementen:*

$$\begin{aligned} a + (-a) &= (-a) + a = 0 \quad \forall a \\ a \cdot \frac{1}{a} &= \frac{1}{a} \cdot a = 1 \quad \forall a \neq 0 \end{aligned}$$

5. *Kommutativgesetz:* $\forall a, b$

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

6. *Distributivgesetz:* $\forall a, b, c$

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bildet einen „Körper“. Ferner gilt für die natürliche Ordnung $\leq$:

$$\begin{aligned} a \leq b &\Rightarrow a + c \leq b + c \\ a \leq b &\Rightarrow \begin{cases} ac \leq bc & c \geq 0 \\ ac \geq bc & c < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wie werden Zahlen im Computer dargestellt?

Basis $b > 1$: $r = \pm (c_k b^k + \dots + c_1 b + c_0 + c_{-1} b^{-1} + \dots)$ mit $0 \leq c < b$

Darstellung im Computer:

$$\begin{aligned} r &= \underbrace{\pm}_{\text{Vorzeichen}} \underbrace{0, d_1 \dots d_n}_{\text{Mantisse}} \text{E} \underbrace{\pm e_1 \dots e_m}_{\text{Exponent}} \quad (\text{Gleitkomma-Darstellung}) \\ &= \pm (d_1 b^{-1} + \dots + d_n b^{-n}) \cdot b^{\pm(e_1 b^{m-1} + \dots + e_m)} \end{aligned}$$

Sei M die Menge der „Maschinenzahlen“, abhängig von m, n, b . Achtung: $M \neq \mathbb{R}$!

1.1.4 Komplexe Zahlen

quadratische Gleichungen: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\begin{aligned} \Delta b^2 - 4ac &> 0 \Rightarrow \text{zwei reelle Lösungen} \\ &= 0 \Rightarrow \text{eine reelle Lösung} \\ &< 0 \Rightarrow \text{keine reelle Lösung (insbesondere } x^2 + 1 = 0) \end{aligned}$$

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ mit $i^2 = -1$

$z = \underbrace{a}_{\text{Realteil } \Re(z)} + \underbrace{bi}_{\text{Imaginärteil } \Im(z)} \quad i$ (Elektrotechniker $a + bj$, da i schon für Stromstärke reserviert)

$\bar{z} = a - bi$ konjugiert komplexe Zahl

Gauß'sche Zahlenebene: zweidimensionale Ebene, horizontale Achse $\Re$, vertikale Achse $\Im$

$z = a + bi$: kartesische Koordinaten

$z = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi)) = [r; \phi]$: Polarkoordinaten (r : Radius, $r \geq 0$; ϕ : Argument, $0 \leq \phi < 2\pi$ oder $-\pi < \phi \leq \pi$)

Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten:

- $[r; \phi] \rightarrow (a; b)$:

$$\begin{aligned} a &= r \cdot \cos(\phi) \\ b &= r \cdot \sin(\phi) \end{aligned}$$

- $(a; b) \rightarrow [r; \phi]$:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \underbrace{\pm \pi}_{\text{je nach Quadrant}} \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} 2i = (0; 2) &= \left[2; \frac{\pi}{2}\right] \\ -1 + \sqrt{3}i = (-1; \sqrt{3}) &= [?] \\ r &= \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \\ \phi &= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \\ -1 + \sqrt{3}i &= \left[2; \frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

Rechnen mit komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten:
für

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + b_1 i \\ z_2 &= a_2 + b_2 i \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$ bildet einen Körper, aber die Ordnung $\leq$ geht verloren!

Multiplikation in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 (\cos(\phi_1) + i \sin(\phi_1)) \\ z_2 &= r_2 (\cos(\phi_2) + i \sin(\phi_2)) \\ \Rightarrow z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 (\cos(\phi_1) + i \sin(\phi_1)) (\cos(\phi_2) + i \sin(\phi_2)) \\ &= r_1 r_2 \left(\underbrace{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) - \sin(\phi_1) \sin(\phi_2)}_{\cos(\phi_1 + \phi_2)} + i \underbrace{(\sin(\phi_1) \cos(\phi_2) + \cos(\phi_1) \sin(\phi_2))}_{\sin(\phi_1 + \phi_2)} \right) \end{aligned}$$

also

$$[r_1; \phi_1] \cdot [r_2; \phi_2] = [r_1 r_2; \phi_1 + \phi_2]$$

Folgerungen:

1. $z = [r; \phi] \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \left[\frac{1}{r}; -\phi\right]$, denn $z \cdot z^{-1} = [r; \phi] \cdot \left[\frac{1}{r}; -\phi\right] = \left[\frac{r}{r}; \phi - \phi\right] = [1; 0] = 1$

$$2. \ z = [r; \phi] \Rightarrow z^n = [r^n; n \cdot \phi] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$3. \text{ insbesondere f\"ur } r = 1: (\cos(\phi) + i \sin(\phi))^n = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \text{ (Moivre'sche Formel)}$$

Wurzelziehen in $\mathbb{C}$:

Sei $z = [R; \psi]$; gesucht wird $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$ (also $w = \sqrt[n]{z}$)

$$\Rightarrow w_k = \left[\sqrt[n]{R}; \frac{\psi + 2k\pi}{n} \right] \text{ mit } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

das sind n verschiedene n te Wurzeln von z in $\mathbb{C}$ ($n \geq 1; z \neq 0$)

Beispiel:

$$\begin{aligned} w^3 &= 8 = [8; 0] \\ \Rightarrow w_k &= \left[\sqrt[3]{8}; \frac{0 + 2k\pi}{3} \right] = \left[2; \frac{2k\pi}{3} \right] \quad k = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} w_0 &= [2; 0] = 2 \\ w_1 &= \left[2; \frac{2\pi}{3} \right] = -1 + \sqrt{3}i \\ w_2 &= \left[2; \frac{4\pi}{3} \right] = -1 - \sqrt{3}i \\ w_3 &= \left[2; \frac{6\pi}{3} \right] = [2; 0] = w_0 \end{aligned}$$

Die n ten Wurzeln einer Zahl z bilden immer ein gleichseitiges n -Eck auf Kreis mit Radius $\sqrt[n]{R}$.

Fundamentalsatz der Algebra: Jede quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) ist in $\mathbb{C}$ lösbar und hat im Allgemeinen zwei Lösungen. Jede algebraische Gleichung $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ von Grad $n \geq 1$ mit reellen oder komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ ($a_n \neq 0$) besitzt in $\mathbb{C}$ im Allgemeinen n Lösungen.

Es ist nicht möglich, Gleichungen mit Grad $n \geq 5$ mit einer Lösungsformel zu lösen.

1.2 Elementare Zahlentheorie

1.2.1 Teilbarkeit

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$: $b|a \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a = b \cdot c$, z.B. $2|6, \underbrace{1|6, 6|6}_{\text{triviale Teiler}}$

$d = \text{ggT}(a, b) \iff d|a, d|b \quad \wedge \quad t|a, t|b \Rightarrow t|d \quad \forall t$ (größter gemeinsamer Teiler)

analog: kleinstes gemeinsames Vielfaches $\text{kgV}(a, b)$

$$\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = a \cdot b$$

$$\text{z.B. } \text{ggT}(6, 10) = 2, \text{ kgV}(6, 10) = 30$$

Wie kann der ggT effizient bestimmt werden?

Division mit Rest: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 : \exists q, r \in \mathbb{Z} : a = b \cdot q + r$ mit $0 \leq r < b$

Am Computer: wir wählen $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ und $r = a - b \cdot q$

Euklidischer Algorithmus:

$$\begin{aligned}
 a &= b \cdot q_0 + r_0 & 0 < r_0 < b \\
 b &= r_0 \cdot q_1 + r_1 & 0 < r_1 < r_0 \\
 c &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\
 &\vdots \\
 r_{k-2} &= r_{k-1} \cdot q_k + r_k \\
 r_{k-1} &= r_k \cdot q_{k+1} + 0
 \end{aligned}$$

letzter Rest $r_k \neq 0$ ist $\text{ggT}(a, b)$

Algorithmus terminiert stets, da $r_0 > r_1 > r_2 > \dots > 0$.

Behauptung: $r_k = \text{ggT}(a, b)$

Beweis:

1. $r_k | r_{k-1} \Rightarrow r_k | r_{k-2} \Rightarrow \dots \Rightarrow r_k | b, r_k | a$
2. angenommen, $t | a, t | b \Rightarrow t | r_0 \Rightarrow t | r_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow t | r_k$ q.e.d.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 \text{ggT}(59, 11) &=? \\
 59 &= 11 \cdot 5 + 4 \\
 11 &= 4 \cdot 2 + 3 \\
 4 &= 3 \cdot 1 + 1 = \text{ggT}(59, 11) \\
 3 &= 1 \cdot 3 + 0 \\
 \hline
 1 &= 4 - 3 \cdot 1 \\
 &= 4 - (11 - 4 \cdot 2) \\
 &= 4 \cdot 3 - 11 \cdot 1 \\
 &= (59 - 11 \cdot 5) \cdot 3 - 11 \cdot 1 \\
 &= \underbrace{59}_{a} \cdot 3 - \underbrace{11}_{b} \cdot 16 \\
 &= 3a - 16b
 \end{aligned}$$

Satz: Es gilt stets $\text{ggT}(a, b) = e \cdot a + f \cdot b$ mit geeigneten Koeffizienten $e, f \in \mathbb{Z}$.

1.2.2 Primzahlen

$p \geq 2$ heißt prim $\Leftrightarrow$ es gilt nicht $p = r \cdot s$ mit $r < p, s < p \Leftrightarrow p$ besitzt nur triviale Teiler $\pm 1, \pm p$.

Menge aller Primzahlen $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

Behauptung: für $p \in \mathbb{P}$ gilt $p | ab \Rightarrow p | a$ oder $p | b$.

Beweis:

1. Fall: $p | a$ ✓
2. Fall: $p \nmid a \Rightarrow \text{ggT}(a, p) = 1 \Rightarrow \exists e, f \in \mathbb{Z} :$

$$\begin{aligned}
 1 &= e \cdot a + f \cdot p \quad | \cdot b \\
 b &= \underbrace{eab}_{p | \cdot} + \underbrace{fbp}_{p | \cdot}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p | b$ q.e.d.

z.B. $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

Satz (Fundamentalsatz der Zahlentheorie): Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen: $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$ mit $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}$. Diese Darstellung ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.

Beweis:

1. Darstellung möglich: siehe Beispiel 3 in 1.1.
2. Eindeutigkeit: angenommen, $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$ mit $p_i, q_j \in \mathbb{P}$. $\Rightarrow p_1 | q_1 \cdot \dots \cdot q_s \Rightarrow p_1 | q_1$
oBdA [ohne Beschränkung der Allgemeinheit] $\Rightarrow p_1 = q_1$.
 $p_2 \cdot \dots \cdot p_r = q_2 \cdot \dots \cdot q_s \Rightarrow p_2 | q_2 \Rightarrow p_2 = q_2$
Schließlich folgt $r = s$ und $p_1 = q_1, \dots, p_r = q_r$, d.h. Darstellung bis auf Reihenfolge eindeutig.
q.e.d.

1.2.3 Kongruenzen und Restklassen

Seien $a, b \in \mathbb{Z}, m > 2$ Modul.

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m | a - b, \text{ d.h. } \exists q : a - b = q \cdot m$$

$$\begin{aligned} a &\equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m | a - b, \text{ d.h. } \exists q : a - b = q \cdot m \\ &\Leftrightarrow a = q_1 \cdot m + r \\ &\quad b = q_2 \cdot m + r \end{aligned}$$

d.h. a und b besitzen bei Division durch m denselben Rest.

z.B. $12 \equiv 26 \pmod{7}$, kurz $12 \equiv_7 26$.

Rechnen mit Kongruenzen:

1. Addition: $a \equiv_m b \Rightarrow a + c \equiv_m b + c$
2. Multiplikation: $a \equiv_m b \Rightarrow a \cdot c \equiv_m b \cdot c$
3. Division: $a \cdot c \equiv_m b \cdot c$ und $\text{ggT}(c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv_m b$

z.B.

$$\begin{aligned} 12 &\equiv_7 26 \mid + 2 \Rightarrow 14 \equiv_7 28 \checkmark \\ &\cdot 3 \Rightarrow 36 \equiv_7 78 \checkmark \\ &: 2 \Rightarrow 6 \equiv_7 13 \checkmark \text{ weil } \text{ggT}(2, 7) = 1 \end{aligned}$$

Gleichungen mit Kongruenzen:

z.B.

$$\begin{aligned} 2x &\equiv_7 1 \\ x &=? \end{aligned}$$

Lemma: Zu $c \in \mathbb{Z}$ existiert ein $d \in \mathbb{Z}$ mit $c \cdot d \equiv_m 1 \Leftrightarrow \text{ggT}(c, m) = 1$.

Beweis:

Hin-Richtung:

$$\begin{aligned} c \cdot d &\equiv_m 1 \Rightarrow \exists q : cd - 1 = q \cdot m \\ cd - q \cdot m &= 1 \Rightarrow \text{ggT}(c, m) = 1 \end{aligned}$$

Zurück-Richtung:

$$\begin{aligned} \text{ggT}(c, m) = 1 &\Rightarrow \exists d, e : c \cdot d + e \cdot m = 1 \\ &\Rightarrow c \cdot d \equiv_m 1 \end{aligned}$$

z.B.

$$\begin{aligned} \text{ggT}(2, 7) : 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 1 = 7 - 2 \cdot 3 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \quad 1 \equiv_7 -2 \cdot 3 \\ &\Rightarrow x \equiv_7 -3 \equiv_7 4 \end{aligned}$$

Beweis der Division:

$$\begin{aligned} ac \equiv_m bc, \text{ggT}(c, m) = 1 &\Rightarrow a \equiv_m b \\ &\Rightarrow \exists d : c \cdot d \equiv_m 1 \\ a(cd) &\equiv_m b(cd) \\ a \cdot 1 &\equiv_m b \cdot 1 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Wir betrachten die Menge

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv_m b\} \\ &= \{a, a \pm m, a \pm 2m\} \\ &= a + m\mathbb{Z} \\ &\text{Restklasse von } a \text{ modulo } m \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{m, 2m, 3m, \dots, 0, -m, -2m, \dots\} \\ &\quad \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1} \\ \mathbb{Z} &= \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \dots \cup \overline{m-1} \\ \mathbb{Z}_m &= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\} \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_m$ ist die (endliche) Menge der Restklassen modulo m .

Prüfziffern zur Fehlererkennung:

ISBN: Internationale Standard-Buchnummer

z.B. ISBN $\underbrace{3}_{\text{Gruppe Verlag}} - \underbrace{211}_{\text{Titel}} - \underbrace{82084}_{\text{Prüfziffer}} - \underbrace{1}_{\text{Prüfziffer}}$, allgemein: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 p$.

Es muss gelten: $10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + \dots + 2a_1 + p \equiv_{11} 0$ mit $p \in \{0, 1, 2, \dots, 9, X\}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow p \equiv -10a_1 - 9a_2 - \dots - 2a_9 \\ &\quad p \equiv WTF \end{aligned}$$

z.B.: $p \equiv 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + \dots + 9 \cdot 4 \equiv 166 \equiv_{11} 1$

Satz: Jeder Fehler in einer Ziffer sowie alle Vertauschungen zweier Ziffern werden vom ISBN-Code erkannt.

Beweis:

1. Angenommen, zwei ISBN unterscheiden sich an einer Stelle:

$$\begin{aligned} &\dots a \dots \\ &\dots b \dots \\ &\quad \uparrow \\ &\quad n \end{aligned}$$

Angenommen, beide ISBN wären korrekt.

$$\begin{aligned}
 s + na &\equiv s + nb & a, b &\in \{0, 1, \dots, 9, X\} \\
 & & 1 &\leq n \leq 10 \\
 & & s &\text{ restliche Summe} \\
 n(a - b) &\equiv_{11} 0 \\
 \Rightarrow a - b &\equiv_{11} 0 \\
 a &\equiv_{11} b \\
 \Rightarrow a &= b
 \end{aligned}$$

2. Angenommen, zwei ISBN unterscheiden sich durch Vertauschen zweier Ziffern:

$$\begin{array}{ccc}
 \dots a \dots b \dots & & \\
 \dots b \dots a \dots & & \\
 \uparrow & \uparrow & \\
 m & n &
 \end{array}$$

1.3 Elementare Aussagenlogik

1.3.1 Aussagen und Prädikate

Aussage sprachlicher Ausdruck, der entweder wahr oder falsch sein kann, d.h. der einen Wahrheitswert in $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ annehmen kann.

Prädikat Ausdruck der Form $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, welcher variable $x_1, \dots, x_n$ enthält und erst durch Einsetzen für diese Zahl ...

Beispiele für Aussagen:

- Die Erde ist ein Planet.
- $1 + 1 = 3$
- Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, ist Summe zweier Primzahlen.

Beispiele für Prädikate:

- $P(x) : x \text{ ist ein Planet} \quad x \in \{\text{Erde, Mond, Sonne}\}$
- $Q(x) : x \text{ ist eine Primzahl} \quad x \subseteq \mathbb{N}$
- $R(x, y) : x \text{ ist kleiner als } y \quad x, y \in \mathbb{R}$

1. Verknüpfung von Aussagen mittels Junktoren

a, b Aussagen: $\underbrace{\neg a}$, $\underbrace{a \wedge b}$, $\underbrace{a \vee b}$, $\underbrace{a \rightarrow b}$, $\underbrace{a \leftrightarrow b}$
Negation Konjunktion Disjunktion Implikation Äquivalenz

Definition mittels Wahrheitstafel:

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

→ Aussagenlogik

2. Binden von Variablen in Prädikaten mittels Quantoren

$P(x)$ Prädikat : $\underbrace{\exists}_{\text{Existenzquantor}} x : P(x), \underbrace{\forall}_{\text{Allquantor}} x : P(x)$

Beispiel: zweistelliges Prädikat $P(x, y) : x < y$ für $x, y \in \mathbb{N}$

- $\forall x \exists y : P(x, y)$ wahre Aussage (z.B. $y = x + 1$)
- $\exists y \forall x : P(x, y)$ falsche Aussage (es gibt keine größte natürliche Zahl)
- $\exists x : P(x, y) = Q(y)$ neues (einstelliges) Prädikat
z.B. $Q(0)$ falsche Aussage, $Q(1)$ wahre Aussage

1.3.2 Äquivalente Formeln

Es gilt:

- $\neg(a \wedge b)$ ist gleichbedeutend mit $(\neg a) \vee (\neg b)$
- $a \rightarrow b$ ist gleichbedeutend mit $(\neg a) \vee b$
- $a \leftrightarrow b$ ist gleichbedeutend mit $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$

Definition: Unter einer Formel der Aussagenlogik versteht man einen Ausdruck der Form $F(a, b, c, \dots)$, der sich aus Aussagevariablen $a, b, c, \dots$ und Junktoren in endlich vielen Schritten aufbauen lässt.

Beispiel: $F(a, b, c) = \neg(a \wedge b) \rightarrow c$

Definition: Eine Formel F heißt

1. gültig (Tautologie), falls F für jede Belegung der Aussagevariablen mit Werten aus $\mathbb{B}$ wahr ist
2. erfüllbar, falls F für mindestens eine solche Belegung wahr ist
3. unerfüllbar (Kontradiktion), falls F für jede solche Belegung falsch ist

Beispiele:

- $F(a, b) = (\neg a \rightarrow (a \rightarrow b))$ ist Tautologie:

a	b	$\neg a$	$a \rightarrow b$	$\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

- $F(a) = a \vee \neg a$ ist Tautologie
- $F(a, b) = a \wedge b$ ist erfüllbar
- $F(a) = a \wedge \neg a$ ist Kontradiktion

Syntaktik versus Semantik

zum Beispiel $a \wedge b, b \wedge a$: semantisch äquivalent, syntaktisch unterschiedlich

Definition: seien F_1, F_2 Formeln. Dann gilt:

1. $F_1 \Leftrightarrow F_2$ (semantische oder mathematische Äquivalenz), wenn $F_1 \leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist, d.h. wenn die Formeln F_1, F_2 bei beliebiger Belegung ihrer Aussagevariablen entweder beide wahr oder beide falsch sind.
2. $F_1 \Rightarrow F_2$ (semantische oder mathematische Implikation), wenn $F_1 \rightarrow F_2$ eine Tautologie ist, d.h. dass immer dann, wenn F_1 wahr ist, auch F_2 wahr sein muss.

Beispiele:

- $a \wedge b \neq b \wedge a$, aber $a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$
- $a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b$
- $a \rightarrow b \Rightarrow (a \vee c) \rightarrow (b \vee c)$, denn $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \vee c) \rightarrow (b \vee c))$ ist eine Tautologie
- Sätze der Aussagen- und Prädikatenlogik (siehe Tabelle auf der Homepage), z.B.
 - $(a \wedge b) \wedge c \Leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$
 - $a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
 - $a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$ (Verschmelzungsgesetz)
 - $\vdots$

1.3.3 Mathematische Beweise

$\Leftrightarrow, \Rightarrow$

mathematischer Satz: $\underbrace{F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n}_{\text{Voraussetzungen}} \Rightarrow \underbrace{G}_{\text{Behauptung}}$, kurz $F \Rightarrow G$

1. direkter Beweis: $F \rightarrow G$ ist Tautologie

2. indirekter Beweis:

- $F \rightarrow G \Leftrightarrow \neg F \vee G \Leftrightarrow \neg(F \wedge \neg G)$, also $F \wedge \neg G$ ist Kontradiktion
- $F \rightarrow G \Leftrightarrow \neg G \rightarrow \neg F$ (Kontraposition)

3. Beweis durch vollständige Induktion

Bemerkung: $F \Rightarrow G$: F ist hinreichend für G und G ist notwendig für F .

1.4 Mengen

Definition (Cantor, 1895): Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung unseres Denkens eines Ganzen.

Beispiele:

- $\emptyset$
- $\text{ASCII} = \{0, 1, \dots, 9, A, \dots, Z, a, \dots, z, +, \$, \dots\}$
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{P} = \{2, 3, 5, \dots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl}\}$
- $M = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, \dots\}$ (Multimenge)

Rechnen mit Mengen:

- $x \in A, A \subseteq B, A \cup B, A \cap B, \bigcup_{i \in I} A_i, \bigcap_{i \in I} A_i, A \setminus B, A \triangle B, \overline{A}, A \times B$
- Potenzmenge $\mathcal{P}(A) = \{C \mid C \subseteq A\}$, z.B. $A = \{0, 1\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, A\}$ $|A| = 2 \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 4 = 2^2$

Satz: Ist A endlich, so gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Beweis durch vollständige Induktion nach $n = |A|$:

- $n = 0$: $A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, |\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0 \checkmark$
- $n \rightarrow n+1$: also $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$. Zu zeigen: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{n+1}$
 $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\{a_1, \dots, a_n\}) \cup \{A \cup \{a_{n+1}\} \mid A \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}\}$
 $|\mathcal{P}(A)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ q.e.d.

1.4.1 ?

1.4.2 ?

1.4.3 ?

Graphische Darstellung von Halbordnungsrelationen:

R Halbordnungsrelation, $G(R)$ zugehöriger Graph

- Weglassen von Schlingen
- Weglassen von Kanten gemäß der Transitivität
- Weglassen aller Orientierungen

→ Hasse-Diagramm

Beispiele:

- $(P(\{0,1\}), \subseteq)$
- $A = \{a, b, c, d, e, f\}, x \leq x \forall x, x \leq a \forall x, e \leq d, f \leq d$
- $n \geq 1, T_n = \{m \in \mathbb{N} : m|n\} =$ Menge aller positiven Teiler von $n \Rightarrow (T_n, |)$ ist Halbordnungsrelation, z.B. $T_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

1.4.4 Funktionen

Definition: Seien A, B nichtleere Mengen. Eine Funktion (Abbildung) $f : A \rightarrow B$ ist ein Tripel (A, B, R_f) wobei $R_f \subseteq A \times B$ eine Relation ist, bei der zu *jedem* $a \in A$ *genau* ein $b \in B$ mit $a R_f b$ existiert.

$$\left(\underbrace{A}_{\text{Definitionsmenge}}, \underbrace{B}_{\text{Zielmenge, Wertemenge}}, \underbrace{R_f}_{\text{Graph der Funktion}} \right)$$

Schreibweise: $f : A \rightarrow B$ statt $R_f \subseteq A \times B$ und $f(\underbrace{a}_{\text{Argument, Urbild}}) = b$ statt $(a, b) \in R_f$.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

Definition: Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt

1. *injektiv*, wenn es zu jedem $b \in B$ höchstens ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$ (d.h. falls $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \quad \forall a_1, a_2 \in A$; „kein Wert in B wird mehr als einmal getroffen“)
2. *surjektiv*, wenn es zu jedem $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$ („jeder Wert in B wird mindestens einmal getroffen“)
3. *bijektiv*, wenn es zu jedem $b \in B$ *genau ein* $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$, also wenn f injektiv und surjektiv ist.

Beispiele:

- Studierende(r) → Matrikelnummer (injektiv, da es für jede Matrikelnummer höchstens eine(n) Studierende(n) gibt; nicht surjektiv, da es unbelegte Matrikelnummern gibt)
- Studierende(r) → hauptgemeldete Universität (nicht injektiv, da eine Universität mehr als eine(n) Studierende(n) hat; surjektiv, da jede Universität mindestens eine(n) hauptgemeldete(n) Studierende(n) hat)
- Universität → Rektor (bijektiv)

- $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^2$ weder injektiv noch surjektiv
- $f_2 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$ injektiv aber nicht surjektiv
- $f_3 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, f_3(x) = x^2$ bijektiv

Satz: Haben zwei endliche Mengen A, B gleich viele Elemente, dann sind für jede Funktion $f : A \rightarrow B$ folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist injektiv
2. f ist surjektiv
3. f ist bijektiv

Beweis: Seien $A = \{a_1, \dots, a_n\}, B = \{b_1, \dots, b_n\}, |A| = |B| = n$.

1. $\Rightarrow$ 2.: sei f injektiv $\Rightarrow f(A) = \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\} \subseteq B$ und $|f(A)| = |B| = n \Rightarrow f(A) = B$, d.h. f surjektiv

2. $\Rightarrow$ 3.: sei f surjektiv, d.h. $f(A) = B$. Angenommen, f ist nicht injektiv, d.h. $\exists a_i \neq a_j$ mit $f(a_i) = f(a_j) \Rightarrow |f(A)| = |\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}| \leq n - 1 < |B|$, Widerspruch zu $f(A) = B$, also ist f surjektiv und injektiv, damit bijektiv.

3. $\Rightarrow$ 1.: klar. Q.E.D.

Zusammensetzung (Komposition) von Funktionen:

$f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ Funktionen

betrachten $g \circ f : A \rightarrow C$ mit $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

Funktionenkomposition

z.B. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

inverse Funktion:

$f : A \rightarrow B, f^{-1} : B \rightarrow A$ heißt *inverse Funktion* von f , wenn $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ gilt (id_A, id_B identische Abbildungen auf A bzw. B , d.h. $x \mapsto x$)

$f^{-1} \circ f : A \rightarrow A = \text{id}_A$

$f \circ f^{-1} : B \rightarrow B = \text{id}_B$

Beispiel: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 \Rightarrow f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ hat keine f^{-1} !

Satz: Zu $f : A \rightarrow B$ existiert genau dann eine inverse Funktion $f^{-1} : B \rightarrow A$, wenn f bijektiv ist.

2 Diskrete Mathematik

diskret $\neq$ kontinuierlich

2.1 Kombinatorik

Kombinatorik = Theorie des Zählens

A endliche Menge: $|A| = \#A = \text{Anzahl der Elemente von } A$

2.1.1 Grundaufgaben der Kombinatorik

1. Summenregel: gibt es m Elemente vom Typ A und n Elemente von Typ B , dann gibt es $m + n$ Möglichkeiten, ein Element von Typ A oder B zu wählen: $|A \cup B| = |A| + |B|$, falls $A \cap B = \emptyset$.
z.B. Autovermittlung: 5 VW + 3 Opel = 8 Autos zur Auswahl

2. Produktregel: unter den obigen Annahmen gibt es $m \cdot n$ Möglichkeiten, Elemente von Typ A und B zu kombinieren: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
 z. B. Computerprogramm für 4 verschiedene Betriebssysteme in 6 Benutzersprachen $\Rightarrow$ 24 verschiedene Versionen
 z. B. Anzahl der Binärfolgen der Länge n : $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_n = 2^n$
3. Gleichheitsregel: entsprechen die Typen A und B einander umkehrbar eindeutig, dann gibt es genauso viele Möglichkeiten, ein Element von Typ A auszuwählen wie für B .
 d. h. $\exists f : A \rightarrow B$ bijektiv $\Rightarrow |A| = |B|$
 z. B. Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ für $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^n$$

$$B \subseteq A \mapsto (b_1, \dots, b_n) \text{ mit } b_i = \begin{cases} 0 & a_i \notin B \\ 1 & a_i \in B \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{z. B. } \{a_1, a_3, a_4, a_n\} &\mapsto (1, 0, 1, 1, 0, \dots, 0, 1) \\ \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| &= |\{0, 1\}^n| = 2^n \checkmark \end{aligned}$$

Schreibweisen:

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \text{ für } n \geq 1, 0! = 1$$

(nebenbei: 1000! hat 249 Nullen)

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Binomialkoeffizienten}} = \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-k+1)}{k!}}_{\text{praktischer}} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ für } 1 \leq k \leq n, \binom{n}{0} = 1$$

z.B.

$$\begin{aligned} 5! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \\ \binom{5}{2} &= \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 \\ \binom{5}{3} &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10 \end{aligned}$$

Grundlegende Anordnungs- und Auswahlprobleme:

Sei A eine Menge mit n Elementen (n -Menge).

1. Anordnungen ohne Einschränkungen sind geordnete k -Tupel $(a_1, \dots, a_k)$ von Elementen von A (Variationen mit Wiederholungen)

1. Platz	2. Platz	...	k -ter Platz
n	n		n

$= n^k$ Möglichkeiten

$$\# \text{Variationen mit Wiederholung: } \bar{V}_n^k = |A^k| = n^k$$

$$\text{z. B. Fußballtoto: } A = \{1, 2, X\}, k = 12 \Rightarrow \bar{V}_3^{12} = 3^{12} \text{ Tipps}$$

2. Anordnungen verschiedener Elemente sind geordnete k -Tupel $(a_1, \dots, a_k)$ verschiedener Elemente von A (Variationen ohne Wiederholungen)

1. Platz	2. Platz	...	k -ter Platz
n	$n-1$		$n-k+1$

$= \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten

#Variationen ohne Wiederholung: $V_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

z. B. Alphabet $A = \{A, B, \dots, Z\}$, #Wörter aus 4 verschiedenen Buchstaben: $V_{26}^4 = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$

3. Permutationen einer Menge A sind alle bijektiven Funktionen $\pi : A \rightarrow A$, das sind alle möglichen Anordnungen der n Elemente von A .

#Permutationen $P_n = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdots (n-n+1) = n!$

z. B. 3 Gläser mit Bier, Schnaps, Wein; $A = \{B, S, W\} \Rightarrow BSW, BWS, SBW, SWB, WBS, WSB$
 $P_3 = 3! = 6$

4. Permutationen einer Multimenge (Permutationen mit Wiederholung) sind Anordnungen der

Elemente einer Multimenge $A = \left\{ \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{k_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{a_r, \dots, a_r}_{k_r} \right\}, k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$

#Permutationen mit Wiederholung: $P_n^{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_r!}$

z. B. 3 Gläser mit Bier, Bier, Wein; $A = \{B, B, W\} \Rightarrow BBW, BWB, WBB$

$P_3^{2,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3$

5. Auswählen einer Teilmenge (Kombinationen ohne Wiederholungen) sind ungeordnete k -Tupel $\{a_1, \dots, a_k\}$ verschiedener Elemente von A ; das sind k -elementige Teilmengen von A .

#Kombinationen ohne Wiederholungen: $C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$

z. B. Lotto „6 aus 45“: $C_{45}^6 = \binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6!} = 8\,145\,060$ Tipps

6. Auswählen einer Teilmultimenge (Kombinationen mit Wiederholungen) sind ungeordnete k -Tupel $\{a_1, \dots, a_k\}$ von nicht notwendig verschiedenen Elementen von A ; das sind k -elementige Teilmultimengen von A .

#Kombinationen mit Wiederholung: $\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

Beweis: o. B. d. A. $A = \{1, 2, \dots, n\}$

Kombination ohne Wiederholung: $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq A$ mit $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$. $C_n^k =$

$|\{(a_1, \dots, a_k) \mid 1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq n\}| = \binom{n}{k}$

Kombination mit Wiederholung: $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq A$ mit $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n$

$\Leftrightarrow 1 \leq \underbrace{a_1}_{b_1} < \underbrace{a_2+1}_{b_2} < \underbrace{a_3+2}_{b_3} < \dots < \underbrace{a_k+k-1}_{b_k} \leq n+k-1$

$\Leftrightarrow 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq n+k-1$

$\rightarrow \overline{C}_n^k = |\{(a_1, \dots, a_k) \mid 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n\}|$

$= |\{(b_1, \dots, b_k) \mid 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq n+k-1\}|$

$= C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$ q. e. d.

z. B. #Würfe mit 3 Würfeln, falls man die Würfel nicht unterscheidet: $A = \{1, \dots, 6\}, k = 3$

$\overline{C}_6^3 = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$

Zusammenfassung:

	Anordnungsprobleme	Auswahlprobleme	Anordnungs- und Auswahlprobleme
	Permutationen	Kombinationen	Variationen
keine Wiederholungen	$P_n = n!$	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$	$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$
Wiederholungen	$P_n^{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}$	$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$	$\overline{V}_n^k = n^k$

2.1.2 Der binomische Lehrsatz

Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k}$ für $0 \leq k \leq n$

$n = 0$	$\binom{0}{0}$		
$n = 1$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$	
$n = 2$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$
		$\vdots$	

Pascal'sches Dreieck:

		1			1
		1	1		2
	1	2	1		4
1	3	3	1		8
1	4	6	4	1	$16 = 2^4$
		$\vdots$			

Satz: Für $0 \leq k \leq n$ gilt:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
4. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ (Beweis siehe Übung)

Satz (binomischer Lehrsatz): Für $x, y \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 (x+y)^n &= \underbrace{(x+y)(x+y) \cdots (x+y)}_{n \text{ Faktoren}} \\
 &= \text{Summe von Produkten der Form } x^k y^{n-k} \quad (k=0, \dots, n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\# \text{Produkt} &= P_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \\ \rightarrow (x, y)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \text{ q. e. d.}\end{aligned}$$

2.2 Graphentheorie

2.2.1 ?

2.2.2 ?

2.2.3 Euler'sche und Hamilton'sche Linien

Definition: Eine Euler'sche Linie (EL) in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kantenfolge in G , die alle Knoten und alle Kanten enthält, und zwar jede Kante genau $1 \times$. Eine Hamilton'sche Linie (HL) ist eine Kantenfolge in G , die alle Knoten genau $1 \times$ enthält (ausgenommen eventuell Anfangsknoten=Endknoten).

Beispiel: K_5 besitzt eine geschlossene EL ($\rightarrow$ Euler'scher Graph) und eine geschlossene HL ($\rightarrow$ Hamilton'scher Graph).

allgemein: Briefträgerproblem, Problem des Handlungsreisenden (*traveling salesman problem*)

Satz: Ein ungerichteter Graph G besitzt genau dann eine geschlossene EL, wenn G zusammenhängend ist und alle Knotengrade $d(v)$ ($v \in V(G)$) gerade sind.

Beweis:

1. Sei G Euler'scher Graph, sei k geschlossene EL in G
 $\Rightarrow G$ ist zusammenhängend
 $v \in V$ beliebige Knoten: bei jedem Durchlauf durch v längs k entsteht ein Beitrag von 2 zu $d(v) \Rightarrow d(v)$ gerade
 $\Rightarrow G$ enthält geschlossene Kantenfolge und damit Kreis k_1
2. ?

$G' = (V, E')$ mit $E' = E \setminus k_1$ (entferne k_1 aus G)

$d(v)$ gerade $\forall v \in V(G') = V'$

$\Rightarrow G'$ enthält Kreis k_2 , usw.

Erhalten Kreise $k_1, k_2, k_3, \dots, k_r$, welche durch geeignete Zusammensetzung eine geschlossene EL k bilden.

Beispiel: K_5 : $V = \{v_1, \dots, v_5\}$, $d(v_i) = 4$ gerade $\forall i$

$k_1 = v_1 v_2 v_3 v_1$

$k_2 = v_3 v_4 v_5 v_3$

$k_3 = v_1 v_5 v_2 v_4 v_1$

$\Rightarrow k = v_1 v_2 \underbrace{v_3 v_4 v_5 v_3}_{k_2} \underbrace{v_1 v_5 v_2 v_4 v_1}_{k_3}$ ist EL.

Beispiel: Brücken von Königsberg: alle Grade ungerade $\Rightarrow \nexists$ EL

Bemerkung: G ungerichtet, G besitzt offene EL $\Leftrightarrow$ genau 2 Knoten haben ungeraden Grad

G gerichtet: G besitzt geschlossene EL $\Leftrightarrow G$ ist schwach zusammenhängend, $d^+(v) = d^-(v) \quad \forall v \in V$

Es gibt (bislang) keine effiziente Lösung für das Finden einer Hamilton'schen Linie.

2.2.4 Netzwerke und Algorithmen

Wir betrachten ein *Netzwerk* (= bewerteter Graph): $G = (V, E, w)$ mit Bewertungsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ (bspw. Entfernung, Kosten, Kapazität)

Beispiel: Eisenbahnnetz zwischen 5 Städten. Bewertung = Kosten für alle möglichen Verbindungen

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$w(E) = \{(ab, 4), (ac, 7), (ae, 11), (cd, 3), (ce, 10), (be, 10), (bd, 8), (de, 12)\}$$

Gesucht ist ein Eisenbahnnetz, an welches alle Städte angeschlossen sind, mit minimalen Errichtungskosten $\rightarrow$ Minimalgerüst, minimaler spannender Baum (*minimal spanning tree*)

Definition: ein *spannender Baum* T eines schlichten, ungerichteten, zusammenhängenden Graphen G ist ein Baum mit $V(T) = V(G)$, $E(T) \subseteq E(G)$. Ein *Gerüst* (oder *spannender Wald*) eines schlichten, ungerichteten Graphen G ist ein Wald W mit $V(W) = V(G)$, $E(W) \subseteq E(G)$ und denselben Zusammenhangskomponenten wie G . Ist E bewertet, so nennt man ein Gerüst W ein Minimalgerüst, falls $w(W) = \sum_{e \in E(W)} w(e)$ minimal ist. Es müssen stets $|E| - |V| + 1$ Kanten entfernt werden.

Algorithmus von Kruskal zur Bestimmung eines Minimalgerüsts W eines ungerichteten, bewerteten Graphen $G = (V, E, w)$

1. Man nummeriert die Kanten $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ nach steigendem Gewicht: $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$
2. Man setze $E' = \emptyset$
3. Für $j := 1$ bis m :
Ist der Graph $(V, E' \cup \{e_j\})$ kreisfrei, so setze $E' := E' \cup \{e_j\}$.

$\Rightarrow W = (V, E')$ ist Minimalgerüst von G . Abbruch in Schleife 3 möglich nach Auswahl von $|V| - 1$ Kanten (oder $|V| - \#$ Zusammenhangskomponenten Kanten, falls G nicht zusammenhängend).

Zurück zum Beispiel:

e	$w(e)$	E'	Partition
			$a b c d e$
cd	3	✓	$a b cd e$
ab	4	✓	$ab cd e$
ac	7	✓	$abcd e$
bd	8	✗	$abcd e$
be	10	✓	$abcde$
Abbruch			
ce	10		
ae	11		
de	12		

$$w(W) = 24$$

Nun betrachten wir einen gerichteten oder ungerichteten, bewerteten Graphen mit Länge $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Die Länge einer Kantenfolge $e_1, e_2, \dots, e_k : w(e_1 e_2 \dots e_k) = \sum_{j=1}^k w(e_j)$. Distanz zwischen zwei Knoten v und w :

$$d(v, w) = \begin{cases} \text{minimale Länge einer KF von } v \text{ nach } w \\ \infty, \text{ falls keine KF von } v \text{ nach } w \text{ existiert} \end{cases}$$

Gesucht: Distanz zwischen vorgegebenem Anfangs- und Endknoten $\rightarrow$ Dijkstra-Algorithmus

Algorithmus von Dijkstra zur Bestimmung aller Distanzen $d(v_0, v)$ von einem Knoten v_0 eines Netzwerks $G = (V, E, w)$ mit nichtnegativer Bewertungsfunktion w .

1. Man setze $l(v_0) = 0, l(v) = \infty$ für alle $v \neq v_0, U = \{v_0\}, u = v_0$.
2. Für alle Knoten $v \in V \setminus U$ mit $(u, v) \in E$:
a) Wenn $l(v) > l(u) + w(u, v)$, dann setze $l(v) = l(u) + w(u, v), p(v) = u$

3. Man bestimme $m = \min_{v \in V \setminus U} l(v)$; falls $m = \infty$, dann ENDE.
Man wähle einen Knoten $z \in V \setminus U$ mit $l(z) = m$ und setze $U = U \cup \{z\}, u = z$.
4. Ist $U = V$, dann ENDE, sonst Fortsetzung bei 2.

Notizen:

- $l(v)$ ist die Länge eines Weges von v_0 nach v .
- $p(v)$ ist der Vorgänger von v .
- $V = U \cup (V \setminus U)$. U enthält am Anfang nur v_0 , wird aber immer größer; $V \setminus U$ wird immer kleiner.
- U enthält endgültig markierte Knoten, $l(v) = d(v_0, v)$.
- $V \setminus U$ enthält vorläufig markierte Knoten, $l(v) = \infty$ falls (bisher) kein Weg von v_0 nach v gefunden wurde.
- Rekonstruktion eines kürzesten Weges von v_0 nach v : $v, p(v), p(p(v)), \dots, v_0$.

Beispiel:

$G = (V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E \diamond w(E))$
 $E \diamond w(E) = \{(v_0v_1, 2), (v_0v_2, 5), (v_1v_3, 4), (v_1v_4, 3), (v_3v_5, 4), (v_4v_2, 2), (v_4v_3, 2), (v_4v_5, 6)\}$. Gesucht: alle Distanzen von v_0 aus.

Initialisierung: $l(v_0) = 0, l(v_1) = \dots = l(v_5) = \infty, U = \{v_0\}, u = v_0$

1. Durchlauf:

a) Nachkommen von $u = v_0$: v_1, v_2

- $l(v_1) = \min\{\infty, 0 + 2\} = 2$
- $l(v_2) = \min\{\infty, 0 + 5\} = 5$

b) $m = 2, z = v_1, U = \{v_0, v_1\}, u = v_1$

2. Durchlauf:

a) Nachkommen von $u = v_1$: v_2, v_3, v_4

- $l(v_2) = \min\{5, 2 + 2\} = 4$
- $l(v_3) = \min\{\infty, 2 + 4\} = 6$
- $l(v_4) = \min\{\infty, 2 + 3\} = 5$

b) $m = 4, z = v_2, U = \{v_0, v_1, v_2\}, u = v_2$

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Auswahl	Vorgänger
0	[0]	∞	∞	∞	∞	∞	v_0	X
1		[2]	5	∞	∞	∞	v_1	v_0
2			[4]	6	5	∞	v_2	v_1
3				6	[5]	∞	v_4	v_1
4				[6]		11	v_3	v_1
5						[10]	v_5	v_3

$[d]$ = alle gesuchten Distanzen von v_0 aus (insbesondere Distanz $d(v_0, v_5) = 10$, kürzester Weg: $v_0v_1v_3v_5$).

2.3 Algebraische Strukturen

2.3.1 Binäre Operationen

z.B. Addition, Multiplikation in $\mathbb{N}$

$$(3, 7) \mapsto 3 + 7 = 10$$

$$3 \cdot 7 = 21$$

Definition: Sei A Menge. Eine binäre Operation $\circ$ auf A ist eine Abbildung $\circ : A \times A \rightarrow A$, die je zwei Elementen $a, b \in A$ ein Element $a \circ b \in A$ zuordnet. Das Paar $(A, \circ)$ heißt eine *algebraische Struktur* oder ein *Gruppoid*.

Beispiele:

- $a + b, a \cdot b, a - b$ in $\mathbb{Q}, a^b$ in $\mathbb{R}^+$
- $A \cup B, A \cap B, A \triangle B$ in $\mathcal{P}(M)$
- $A = \mathbb{Z}_4, a \cdot b = a \cdot b \pmod{4}$:

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

(Operationstafel)

Mögliche Eigenschaften:

1. Assoziativgesetz: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \forall a, b, c$
2. Existenz eines neutralen Elementes e : $a \circ e = e \circ a = a \quad \forall a$
3. Existenz inverser Elemente a' zu a : $a \circ a' = a' \circ a = e$
4. Kommutativgesetz: $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b$

Beispiele:

- $+, \cdot$ in $\mathbb{N}$ sind assoziativ und kommutativ
- $\cup, \cap$ in $\mathcal{P}(M)$ sind assoziativ und kommutativ
- $(\mathbb{Z}, +) : e = 0, a' = -a \quad \forall a$
- $(\mathbb{Z}, \cdot) : e = 1, a' = \frac{1}{a}$ nur für $a = 1, a = -1$
- $(\mathcal{P}(M), \triangle)$
 - assoziativ, kommutativ
 - $\emptyset$ ist neutrales Element, denn $A \triangle \emptyset = A \quad \forall A$
 - $A' = A \quad \forall A$, denn $A \triangle A = \emptyset$

Satz: In einem Gruppoid $(A, \circ)$ existiert höchstens ein neutrales Element. Ist $\circ$ assoziativ, gibt es höchstens ein inverses Element a' zu jedem a .

Beweis:

- Angenommen, e_1, e_2 sind neutrale Elemente. $e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2$.

- Angenommen, a', a'' invers zu a . $a' = a' \circ e = a' \circ (a \circ a'') = (a' \circ a) \circ a'' = e \circ a'' = a''$.

Operationen können auch mehrstellig sein: $\circ : \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n \rightarrow A$ n -stellige Operation ($n \geq 0$).

$\circ(a, b, c)$

Eine Menge A zusammen mit einem oder mehreren Operatoren $\circ, *, \dots$ heißt *algebraische Struktur* oder *Algebra*: $(A; \circ, *, \dots)$

z.B. $\left(\mathbb{Z}, \underbrace{+, \cdot}_{\text{binär}}, \underbrace{-}_{\text{einstellig}}, \underbrace{0, 1}_{\text{nullstellig}} \right)$

2.3.2 Gruppen

Definition: Ein Gruppoid $(A, \circ)$ heißt:

1. *Halbgruppe*, wenn $\circ$ assoziativ ist
2. *Monoid*, wenn $\circ$ assoziativ ist und ein neutrales Element besitzt
3. *Gruppe*, wenn $\circ$ assoziativ ist, ein neutrales Element und zu jedem Element ein inverses Element besitzt. Ist $\circ$ außerdem kommutativ, so spricht man von einer *kommutativen* oder *Abel'schen Gruppe*.

Beispiele:

- $(\mathbb{N}, \circ)$ mit $a \circ b = a^b$ ist ein Gruppoid, aber $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$.
- $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ ist eine Halbgruppe.
- $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot)$ sind Monoide (aber keine Gruppen).
- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind Gruppen.
- $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ ist eine Gruppe.

- $A = \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Gruppe der vierten Einheitswurzeln $(\sqrt[4]{1})$

- $(G, \circ)$ Gruppoid
- $+$ assoziativ: Halbgruppe
- $+$ neutrales Element e : Monoid
- $+$ inverse Elemente a' zu a : Gruppe
- $+$ kommutativ: kommutative Gruppe (Abel'sche Gruppe)

weitere **Beispiele:**

- sei Σ Menge (*Alphabet*). Σ^* = Menge aller endlichen Wörter über Σ , d.h. $x_1 x_2 \dots x_n$ mit $x_i \in \Sigma$, sowie das „leere Wort“ ϵ .

- z.B. $\Sigma = \{a, b\} \Rightarrow \Sigma^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \dots, b, bb, bbb, \dots, ab, aba, \dots\}$
- $(\Sigma^*, \circ)$ mit $w_1 = x_1, x_2, \dots, x_k; w_2 = y_1, y_2, \dots, y_l \Rightarrow w_1 \circ w_2 = x_1 x_2 \dots x_k y_1 y_2 \dots y_l$ ist ein Monoid (das sogenannte *freie Monoid*¹ über Σ).
- betrachte Funktionen $f : A \rightarrow A$ auf einer Menge A .
 - Funktionenkomposition $\circ : A \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} A \equiv A \xrightarrow{g \circ f} A$ mit $(f \circ g)(a) = f(g(a))$
 - $F_A = \{f : A \rightarrow A\}$ Menge aller Funktionen auf A .
 - * $\circ$ ist assoziativ, d. h. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, denn $(f \circ (g \circ h))(a) = f((g \circ h)(a)) = f(g(h(a)))$ und $((f \circ g) \circ h)(a) = (f \circ g)(h(a)) = f(g(h(a))) \quad \forall a$
 - * $\Rightarrow (F_A, \circ)$ ist Halbgruppe, genannt *symmetrische Halbgruppe* von A
 - $S_A = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ bijektiv}\}$: Menge der Permutationen² auf A
 - * $f, g \in S_A \Rightarrow f \circ g \in S_A, \text{id} \in S_A, f^{-1} \in S_A \quad (\forall a : \text{id}(a) = a)$
 - * $\Rightarrow (S_A, \circ)$ Gruppe, genannt *symmetrische Gruppe* von A

Betrachten speziell alle Permutationen auf $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

- $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bijektiv.
- $S_n =$ symmetrische Gruppe auf $\{1, 2, \dots, n\}$. $\underbrace{|S_n|}_{\text{Ordnung der symmetrischen Gruppe}} = n!$
- z.B.

$$\begin{aligned}
 \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in S_6 \\
 \rho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in S_6 \\
 \pi \circ \rho &: \{1, \dots, 6\} \xrightarrow{\rho} \{1, \dots, 6\} \xrightarrow{\pi} \{1, \dots, 6\} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_6 \\
 \rho \circ \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in S_6 \\
 \text{id} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\
 \pi^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow S_6$ ist eine nicht-kommutative Gruppe

- neue Schreibweise für Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

¹Monoid ohne zusätzliche Beschränkungen

²Permutation $\equiv$ bijektive Funktion

π enthält drei Zyklen: $(1 \ 4)(3 \ 5 \ 6)(2)$. Allgemeiner Zyklus: $(a_1 a_2 a_3 \dots a_n)$ heißt $a_1 \rightarrow a_2, a_2 \rightarrow a_3, \dots, a_n \rightarrow a_1$.
 (2) ist ein *Fixpunkt*, wird also nicht angeschrieben. $\pi = (1 \ 4)(3 \ 5 \ 6)$. Dies ist die *Zyklen-schreibweise*.

Satz: Jede Permutation $\pi \in S_n$ kann als Produkt von elementfremden Zyklen geschrieben werden. Ferner gilt für jeden Zyklus $(a_1 \dots a_m) = (a_1 \ a_2) \cdot (a_2 \ a_3) \dots (a_{m-1} \ a_m)$, d.h. jeder Zyklus und damit jede Permutation kann als Produkt von Zyklen der Länge 2 geschrieben werden.

Ein Zyklus der Länge 2 ist eine *Transposition*.

$$\begin{aligned}\pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 4)(3 \ 5 \ 6) = (1 \ 4)(3 \ 5)(5 \ 6) \\ \rho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 4 \ 6 \ 5) = (1 \ 2)(2 \ 4)(4 \ 6)(6 \ 5) \\ \Rightarrow \pi\rho &= (1 \ 4)(3 \ 5)(5 \ 6)(1 \ 2)(2 \ 4)(4 \ 6)(6 \ 5) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1 \ 2)(3 \ 5 \ 4) = (1 \ 2)(3 \ 5)(5 \ 4)\end{aligned}$$

Es gilt: Jede Permutation kann entweder nur in eine gerade Anzahl oder in eine ungerade Anzahl von Transpositionen zerlegt werden.

$S_n = \underbrace{A_n}_{\text{gerade Permutationen}} \cup \underbrace{(S_n \setminus A_n)}_{\text{ungerade Permutationen}}$. Es gibt $\frac{n!}{2}$ gerade und $\frac{n!}{2}$ ungerade Permutationen in S_n .

Beispiele für Permutationsgruppen:

- Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks
 - Drehungen: $\rho_0 = (1) = \text{id}, \rho_1 = (1 \ 2 \ 3), \rho_2 = (1 \ 3 \ 2)$
 - Spiegelungen: $\sigma_1 = (2 \ 3), \sigma_2 = (1 \ 3), \sigma_3 = (1 \ 2)$
 - $\rightarrow \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = S_3$
- Gruppe von zwei Drehungen und zwei Spiegelungen eines Quadrats
 - $\rho_0 = (1), \rho_1 = (1 \ 3)(2 \ 4)$
 - $\sigma_1 = (2 \ 4), \sigma_2 = (1 \ 3)$
 - $\rightarrow \{\rho_0, \rho_1, \sigma_1, \sigma_2\} = V_4$ (Klein'sche Vierergruppe)

Grundbegriffe der Gruppentheorie

Gruppe $(G, \cdot)$	Operation: Multiplikation
	neutrales Element: e
	a^{-1} inverses Element zu a

Definition: Eine Teilmenge $U \subseteq G$ einer Gruppe $(G, \cdot)$ heißt Untergruppe, falls $(U, \cdot)$ selbst Gruppe ist.

Schreibweise: $(U, \cdot) \leq (G, \cdot), U \leq G$

z.B. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ Gruppe, $\mathbb{Q}^+ \leq \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ Untergruppe, $\mathbb{Z} \setminus \{0\} \not\leq \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ keine Untergruppe.

U impliziert automatisch eine Klassenunterteilung von G .

$U \leq (G, \cdot), a \in G$

$aU = \{a \cdot u \mid u \in U\}$ Linksnebenklasse (LNK) von U in G

$Ua = \{u \cdot a \mid u \in U\}$ Rechtsnebenklasse (RNK) von U in G

Es gilt: die Menge aller LNK bildet eine Partition von G , genannt *LNK-Zerlegung* von G in U .
(analog für RNK)

$$G \text{ endlich, } \underbrace{|G : U|}_{\text{Index von } G \text{ nach } U} = \# \text{LNK} = \# \text{RNK}$$

Satz (von Lagrange): Ist G eine endliche Gruppe und $U \leq G$, so gilt $|G| = |G : U| \cdot |U|$, d. h. die Ordnung $|U|$ jeder Untergruppe einer endlichen Gruppe ist stets Teiler der Gruppenordnung G .

Beispiel für Boole'sche Algebra: $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, ', \emptyset, M)$. Jede endliche Boole'sche Algebra sieht so aus (und hat damit immer 2^n Elemente).

3 Lineare Algebra

$$\begin{array}{l} \text{Gleichungen: } \frac{3x + 1 = 5}{3x^2 \ln(x) - e^{-x} = 1} \quad \begin{array}{l} \text{einfach} \\ \rightarrow \text{numerische Mathematik} \end{array} \\ \frac{3x + 4y + 1 = 10}{4x - 5y + 10 = 12} \quad \rightarrow \text{lineare Algebra } (A \vec{x} = \vec{b}) \end{array}$$

3.1 Vektoren

skalare $\neq$ vektorielle Größen

3.1.1 Vektorräume

$$\begin{array}{lll} \text{Ebene:} & \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} & = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ \text{Raum:} & \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ \text{Allgemein:} & \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n & = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \end{array}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ Spaltenvektor, } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \text{ Zeilenvektor}$$

K^n , wo K beliebiger Körper ist (zumeist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

K : Skalare

K^n : Vektoren

Wie rechnet man mit Vektoren?

- Addition von Vektoren: $\vec{x}, \vec{y} \in K^n \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

- Nullvektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n : \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x}$ – neutrales Element der Vektoraddition

- inverser Vektor $-\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} : \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

$\Rightarrow (K^n, +)$ ist eine kommutative Gruppe

- Multiplikation mit einem Skalar:

$$\vec{x} \in K^n, \lambda \in K \rightarrow \lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

effektiv: Streckung oder Stauchung, gegebenenfalls mit Richtungsänderung

Beispiel: Geradengleichung in Parameterform $g : \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}$

Definition: Ein Vektorraum $(V, +, K)$ über einem Körper K besteht aus einer Menge V von Vektoren, einer Addition $+$ auf V , sowie einer Abbildung $\cdot : K \times V \rightarrow V$ (Multiplikation von Vektoren mit Skalaren), so dass gilt:

1. $(V, +)$ ist kommutative Gruppe
2. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V; \lambda, \mu \in K$
 - a) $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$
 - b) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{x}$
 - c) $(\lambda \mu) \vec{x} = \lambda (\mu \vec{x})$
 - d) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

V Vektoren, K Skalare (zumeist $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2$, endliche Körper)

Beispiele:

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ Ebene, Anschauungsraum
- $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R})$ analog $\mathbb{C}^4, \mathbb{Z}_2^4$
- $V = \mathbb{R}^2, W = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \right\}$

– dies ist auch ein Vektorraum, denn $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \in W$ und $\lambda \vec{x} =$

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda x \end{pmatrix} \in W$$

- $V = \mathbb{R}^3, U = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$ ist ebenfalls ein Vektorraum (U ist eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch den Ursprung)

- Sei $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ Menge aller vollwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$.
 $(F(\mathbb{R}), +, \mathbb{R})$ ist ein Vektorraum mit:

$$- (f \underbrace{+}_{\text{neu definiert in } F(\mathbb{R})} g)(x) = f(x) \underbrace{+}_{\text{in } \mathbb{R}} g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$- (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x$$

Definition: Sei $(V, +, K)$ ein Vektorraum und $U \subseteq V$. U heißt *Unterraum* von V , wenn $(U, +, K)$ ebenfalls Vektorraum ist. Für jedes $\vec{x}_0 \in V$ heißt $\vec{x}_0 + U = N$ ein *Nebenraum* von U .

Beispiel:

- $W \subseteq \mathbb{R}^2, U \subseteq \mathbb{R}^3$ siehe oben.
- Gerade: $g: \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}$
 $\{\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{v} | \lambda \in \mathbb{R}\} = \vec{x}_0 + \{\lambda \cdot \vec{v} | \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $P_n(\mathbb{R}) = \{p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 | a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}\}$ (Menge aller Polynome von Grad $\leq n$)
 $P_n(\mathbb{R}) \leq F(\mathbb{R}); (P_n(\mathbb{R}), +, \mathbb{R})$ ist selbst ein Vektorraum

Man betrachte die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ und die Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ in einem Vektorraum $(V, +, K)$. Nun bilde man $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \in V$. Dies ist eine *Linearkombination* (LK) der Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Sei $M \subseteq V$. $[M]$, die *lineare Hülle* von M , ist die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus M .

$$[M] = \{\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n | \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in M; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}$$

insbesondere $[\emptyset] = \{\vec{0}\}$

$M \subseteq [M] \leq V$. $[M]$ ist der kleinste Unterraum von V , der M enthält.

z.B. $M = \{\vec{v}, \vec{w} | \vec{v} \nparallel \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $[M] = \{\lambda \vec{v} + \mu \vec{w} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ – Menge aller Ebenen durch den Ursprung mit den Richtungsvektoren $\vec{v}, \vec{w}$

3.2 Matrizen

3.2.1 ?

$A \in K^{m \times n}$, $A + B$ Gruppe (jedenfalls für $m = n$), $(A + B, A \cdot B)$ Ring (nicht unbedingt kommutativ, nicht ??? frei!)

3.2.2 Invertierbare Matrizen

$$(K^{n \times n}, +, \cdot) \text{ Ring mit Einselement } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Frage: Gibt es (manchmal) auch inverse Matrizen?

Definition: Eine $n \times n$ -Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt *invertierbar* (auch: nicht singulär, regulär), falls es eine Matrix $A^{-1} \in K^{n \times n}$ gibt, sodass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. A^{-1} heißt dann inverse Matrix zu A .

Beispiele:

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ denn $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist singulär, denn $A \cdot B = I_2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist unlösbar!

- $I_n^{-1} = I_n$

Es gilt: A, B invertierbar $\Rightarrow A \cdot B$ ebenfalls invertierbar, und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. $A^\top$ ist ebenfalls invertierbar und $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

$\Rightarrow (\{A \in K^{n \times n} | A \text{ invertierbar}\}, \cdot)$ ist eine Gruppe (*allgemeine lineare Gruppe* $GL(n)$)

Wie erkennt man, ob A invertierbar ist? Wie berechnet man A^{-1} ?

- Bei einer 2×2 -Matrix: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3.2.3 Rang einer Matrix und elementare Umformungen

Sei $A \in K^{m \times n} : A = (\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n) = \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vdots \\ \vec{z}_m \end{pmatrix}$ wo $\vec{s}_i$ Spaltenvektoren und $\vec{z}_j$ Zeilenvektoren.

Definition: Der Spaltenrang von $\text{rg}(A)$ einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist die Anzahl der linear unabhängigen Spalten von A ; das ist zugleich die Dimension der linearen Hülle der Spalten von A . Analog ist der Zeilenrang von A definiert.

Es gilt stets: Zeilenrang = Spaltenrang.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{rg}(A) = 1. I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{rg}(I_n) = n.$

Lemma: $\text{rg}(A \in K^{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$

Betrachten folgende Spalten- beziehungsweise Zeilenumformungen von Matrizen:

- „elementare Spaltenumformungen“:
 1. Multiplikation einer Spalte $\vec{s}_i$ und einem Skalar $\lambda \neq 0 : \vec{s}_i \rightarrow \lambda \vec{s}_i$
 2. Addition eines Vielfachen einer Spalte $\vec{s}_i$ zu einer anderen Spalte $\vec{s}_j : \vec{s}_j \rightarrow \lambda \cdot \vec{s}_i + \vec{s}_j$
 3. Vertauschung zweier Spalten $\vec{s}_i$ und $\vec{s}_j : \vec{s}_i \leftrightarrow \vec{s}_j$
- analog auch für Zeilenumformungen

Satz: Sei A' eine Matrix, die aus einer $m \times n$ -Matrix A durch eine Folge von elementaren Spalten- und/oder Zeilenoperationen hervorgeht. Dann gilt: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}_2 + 3 \cdot \vec{s}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 7 \\ 3 & 14 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}_3 - \vec{s}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

2 linear unabhängige Spalten

$$\text{rg}(A) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 + \vec{z}_1 \\ \vec{z}_3 + 2\vec{z}_1 \\ \vec{z}_4 - 3\vec{z}_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 14 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vec{z}_3 - 7\vec{z}_2 \\ \vec{z}_4 - 14\vec{z}_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 linear unabhängige Zeilen

$$\text{rg}(A) = 2$$

weitere Vereinfachung:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}_2 + 3\vec{s}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}_3 - \vec{s}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Lineare Abbildungen

zum Beispiel $\mathbb{R}^2 \cong \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Sie sind *isomorph*, d. h. es gibt eine bijektive, strukturverträgliche Abbildung zwischen diesen beiden Räumen.

Definition: Seien $(V, +, K)$ und $(W, +, K)$ Vektorräume über dem Körper K . Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt *linear*, falls $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall \lambda \in K$ gilt:

1. $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$

Beispiele:

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\in \mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist linear, denn:

$$\begin{aligned} - f(\vec{x} + \vec{y}) &= f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ - \text{analog } f(\lambda \cdot \vec{x}) &= \lambda \cdot f(\vec{x}) \end{aligned}$$

- $f : K^n \rightarrow K^m, f(\vec{x} \in K^n) = A_{\in m \times n} \cdot \vec{x} \in K^m$ ist linear, denn:

$$\begin{aligned} - f(\vec{x} + \vec{y}) &= A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = A \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{y} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ - f(\lambda \cdot \vec{x}) &= A \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot (A \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \end{aligned}$$

Also: Jede Matrix definiert eine lineare Abbildung.

Satz (Fortsetzungssatz): Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von V . Weiters sei W ein Vektorraum und $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n \in W$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ mit $f(\vec{b}_i) = \vec{c}_i \quad \forall i$.

Beweis: Sei $\vec{x} \in V, \vec{x} = x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 + \dots + x_n \vec{b}_n$ (x_i sind die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich der Basis).

Definiere $f(\vec{x}) = x_1 \cdot f(\vec{b}_1) + x_2 \cdot f(\vec{b}_2) + \dots + x_n \cdot f(\vec{b}_n) = x_1 \cdot \vec{c}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{c}_n$

$\rightarrow f : V \rightarrow W$ ist eine lineare Abbildung

$$\text{zum Beispiel: } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Betrachten nochmals $f : K^n \rightarrow K^m, f(\vec{x}) = A_{\in K^m \times n} \cdot \vec{x}$

$$\text{Basis in } K^n : \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n$$

$$f(\vec{e}_1) = A \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ a_{21} & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \vec{s}_1 \text{ (erste Spalte von } A)$$

$$f(\vec{e}_i) = \vec{s}_i \text{ } i\text{-te Spalte von } A$$

$$\text{also } A = (\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n)$$

Beispiele aus der Geometrie der Ebene:

- $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ Streckung/Stauchung
- $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Spiegelung an der 1. Achse

$$f : K^m \rightarrow K^n \text{ linear: } f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \text{ und } f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$$

insbesondere ist $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ ($A : m \times n$ -Matrix) eine lineare Abbildung

und umgekehrt falls f linear $\rightarrow f(\vec{x}) = A \vec{x}$ für eine geeignete Matrix, nämlich $A = (f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$

Also: Matrizen und lineare Abbildungen (auf endlich dimensionalen Vektorräumen bezüglich fester Basis) entsprechen einander umkehrbar eindeutig:

$$A \in K^{m \times n} \longleftrightarrow f : K^m \rightarrow K^n \text{ mit } f(\vec{x}) = A \vec{x}$$

Weitere **Beispiele** aus der Geometrie der Ebene:

- $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}$
 $B \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix}$ Streckung mit zwei festen Faktoren
- $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = (\vec{s}_1, \vec{s}_2)$ Drehung um α
z. B. $D_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Drehung um $+90^\circ$ (gegen den Uhrzeigersinn)
- $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Projektion auf die erste Achse
 $P_1 \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$
- $P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Projektion auf die erste Mediane (45° -Gerade)
- eine Translation ist keine lineare Abbildung, denn $\vec{0}$ wird nicht immer auf $\vec{0}$ abgebildet

Kenngrößen einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$:

- Kern $\ker(f) = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = 0\} \leq V$
- Bild $\text{im}(f) = f(V) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in V\} \leq W$
- Defekt $\text{def}(f) = \dim(\ker(f))$

- $\text{Rang } \text{rg}(f) = \dim(\text{im}(f)) (= \text{rg}(A), \text{ falls } f(\vec{x}) = A\vec{x})$

Satz (Rangformel): Es gilt $\text{rg}(f) + \text{def}(f) = \dim(V)$.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \\
 \ker(f) &= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \leq \mathbb{R}^2 \\
 \text{def}(f) &= 1 \\
 \text{im}(f) &= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \leq \mathbb{R}^2 \\
 \text{ig}(f) &= 1 \\
 \text{def}(f) + \text{ig}(f) &= 2 = \dim(\mathbb{R}^2) \checkmark
 \end{aligned}$$

3.4 Lineare Gleichungssysteme

3.4.1 Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Beispiel: Handytarif: Gesamtkosten = Grundentgelt + Minutenentgelt · Zeit, also $K(t) = G + M \cdot t$.

angenommen: $\begin{array}{lll} 60 \text{ min} & \dots & 7.40 \text{ €} \\ 300 \text{ min} & \dots & 17.00 \text{ €} \end{array}$

$$\begin{array}{rcl}
 G + 60M & = & 7.40 \\
 G + 300M & = & 17.00 \\
 \hline
 G + 60M & = & 7.40 \\
 240M & = & 9.60 \\
 \hline
 M & = & 0.04 \\
 G & = & 5
 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 60 \\ 1 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.40 \\ 17.00 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}$$

Koeffizienten a_{ij} , b_j und Variablen x_i sind im Körper K .

Wir setzen:

$$\begin{aligned}
 A = (a_{ij}), \vec{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow A\vec{x} &= \vec{b}
 \end{aligned}$$

A heißt *Systemmatrix*, $(A, \vec{b})$ heißt *erweiterte Matrix*. Lineares Gleichungssystem heißt *homogen*, falls $\vec{b} = \vec{0}$, sonst *inhomogen*.

Lösbarkeit: $A\vec{x} = \vec{b}$, sei $A = (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n)$

$$\Leftrightarrow (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \vec{s}_1$$

3

Lösungen: $A\vec{x} = \vec{b}$, sei $\vec{x}_0$ eine feste Lösung ($A\vec{x}_0 = \vec{b}$)

$$\Leftrightarrow A(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} - \vec{x}_0 \in \ker(f) \quad \text{für } f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

$$\ker(f) = \ker(A)$$

$$\text{d. h. } \vec{x} \in \vec{x}_0 + \ker(A)$$

Satz: Sei $\vec{x}_0$ eine beliebige feste Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$. Dann bilden alle Lösungen dieses Gleichungssystems einen Nebenraum $\vec{x}_0 + \ker(A)$ der Dimension $n - \text{rg}(A)$.

Folgerung: Die Lösung ist eindeutig, wenn $\text{rg}(A) = n$.

3.4.2 Gauß'sches Eliminationsverfahren

Idee: Umformung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ in ein lösungsäquivalentes System, welches besonders einfach zu lösen ist.

- elementare Zeilenoperationen von $(A, \vec{b})$
- Vertauschen von Spalten von A (und Umbezeichnung der zugehörigen Variablen!)

Hierbei bleibt die Lösungseinheit unverändert.

Das Verfahren:

- Ausgangspunkt: $A\vec{x} = \vec{b}$ bzw. $(A, \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$
- Falls $a_{11} = 0$: Zeilen- und Spaltentausch
- Man bilde i -te Zeile $-\frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot 1.$ Zeile (für $i = 2, \dots, m$):

$$(A', \vec{b}') = \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{21} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array} \right)$$

- Fortsetzung mit Untermatrix $\left(\begin{array}{ccc|c} a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array} \right)$ usw.

³Ich bitte um Entschuldigung für die Unvollständigkeit; Prof. Karigl löscht ziemlich aggressiv.

- Nach endlich vielen Schritten erhält man ein System in Trapezform (Halbdiagonalform, Stufenform):

$$(C, \vec{d}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & \dots & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c_{rr} & \dots & c_{rn} & d_r \\ \vdots & & & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & d_m \end{array} \right)$$

wobei $c_{rr} \neq 0$, $r = \text{rg}(C) = \text{rg}(A) \leq \min(m, n)$.

Spalten entsprechen den Variablen $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$; das sind $x_1, \dots, x_n$ eventuell in geänderter Reihenfolge.

Zur Lösung des Systems $(C, \vec{d})$ in Trapezform unterscheiden wir drei Fälle:

1. untere Reihen: links stehen lauter Nullen, rechts steht Zahl $\neq 0$

$$r < m, d_i \neq 0 \text{ für } i > r$$

$$\Rightarrow \text{rg}(C) = r \neq \text{rg}(C, \vec{d})$$

Das System ist nicht lösbar!

In jedem anderen Fall ist das System lösbar; die „überflüssigen“ Zeilen von $r + 1$ bis m werden gestrichen (da sie die Tautologie $0 = 0$ darstellen).

2. unterste Zeile enthält links genau eine Zahl $\neq 0$

$$r = n$$

$$\dim(\ker(A)) = n - r = 0$$

Das System ist eindeutig lösbar.

Wir berechnen sukzessive $\hat{x}_n, \hat{x}_{n-1}, \dots, \hat{x}_1$ „von unten nach oben“

3. $r < n$

Dimension des Lösungsraums: $\dim(\ker(A)) = n - r > 0$

Das System hat unendlich viele Lösungen.

Wir ersetzen $\hat{x}_{r+1}, \dots, \hat{x}_n$ durch Parameter $t_1, \dots, t_{n-r} \in K$ und berechnen $\hat{x}_r, \hat{x}_{r-1}, \dots, \hat{x}_1$ wie oben.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & b & \dots & c & j \\ d & e & \dots & f & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g & h & \dots & i & l \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauß}} \left(\begin{array}{cccc|c} a & b & \dots & c & g \\ 0 & d & \dots & e & h \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & f & i \end{array} \right)$$

Beispiele:

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 27 & 31 & 51 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 5 & 55 & 58 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Fall 1, LGS nicht lösbar}$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Fall 2, LGS eindeutig lösbar}$

2, Lösung eindeutig bestimmt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

oder: $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right)$

• $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -14 & -6 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow$
 $\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$

$m = 3$ Gleichungen

$n = 4$ Variablen

$r = 3$ Rang $\Rightarrow$ Lösung ist $n - r = 4 - 3 = 1$ -dimensional

Man wähle $x_3 = t$ ($t \in \mathbb{R}$, Parameter) und berechne:

$$x_4 = -1$$

$$x_2 + x_4 + 2x_3 = 1$$

$$\Rightarrow x_2 = 2 - 2t$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 7x_3 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 - 3t$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 3t \\ 2 - 2t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

• $\left(\begin{array}{cccccc|c} x & 0 & \dots & 0 & a & \dots & b & g \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & c & \dots & d & h \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & y & e & \dots & f & i \end{array} \right)$ Gauß-Jordan-Form

• $\left(\begin{array}{cccccc|c} w & & & & & & a \\ 0 & x & 0 & 0 & & & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & d \end{array} \right)$ Zeilenstufenform (bei Vermeidung von Spaltentausch)

Berechnung der Inversen einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ sodass $A \cdot A^{-1} = I_n$

$$A^{-1} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

$$A \cdot A^{-1} = A(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$

$$A\vec{x}_i = \vec{e}_i$$

Das sind n lineare Gleichungssysteme. Diese sind lösbar, wenn $\text{rg}(A) = n$.

Lösung: $\left(A \mid \vec{e}_1 \right), \dots, \left(A \mid \vec{e}_n \right)$.

$$(A \mid I_n) \rightarrow \cdots \rightarrow (I_n \mid A^{-1})$$

Satz: Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Spalten beziehungsweise Zeilen linear unabhängig sind, also $\text{rg}(A) = n$ gilt.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\text{rg}(A) = 2$ ✓ also $\exists A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array} \right)$$

3.5 Determinanten

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Wir definieren $\det(A) = |A| \in K$ wie folgt:

- $n = 1$: $|A| = a_{11}$
- $n = 2$: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
- $n = 3$: $|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$
 $= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$ (Entwickeln nach der ersten Zeile)

Definition: Die Determinante $\det(A) = |A|$ einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist (für $n > 1$) wie folgt rekursiv definiert:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

wobei $A_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot \text{Determinante jener Matrix aus } K^{(n-1) \times (n-1)}, \text{ welche man aus } A \text{ durch Streichen der } i\text{-ten Zeile und } j\text{-ten Spalte erhält. Dieses } A_{ij} \text{ heißt Kofaktor (oder algebraisches Komplement).}$

$$(-1)^{(i+j)} \triangleq \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ „Schachbrettvorzeichen“}$$

Satz (Entwicklungssatz von Laplace): Eine Determinante kann nach jeder beliebigen Zeile oder Spalte entwickelt werden, d.h.

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} && \text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} && \text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} &= -3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0 - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 11 - 1 \cdot (-2) = -31 \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 - 33 = -31 \end{aligned}$$

Interpretation in $\mathbb{R}^n$: Wenn $A = (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n)$, dann $|\det(A)| = \text{Volumen des von } \vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n \text{ aufgespannten Parallelepipeds.}$

Für praktische Berechnung werden folgende Eigenschaften von Determinanten verwendet:

1. Multipliziert man eine Zeile (bzw. Spalte) einer Matrix mit einem Faktor $\lambda \in K$, so multipliziert sich die Determinante mit diesem Faktor.
2. Addiert man ein Vielfaches einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen Zeile (bzw. Spalte), so ändert sich die Determinante nicht.
3. Vertauscht man zwei Zeilen (bzw. Spalten), so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 6 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \begin{vmatrix} 6 & 12 & -5 \\ 5 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 6 & 12 & 5 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -19 & 27 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ -7 & 11 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \begin{vmatrix} -19 & 27 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

Ferner gilt:

- $|A^T| = |A|$
- $|AB| = |A| \cdot |B|$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$ (falls $|A| \neq 0$)

Satz: Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $|A| \neq 0$. In diesem Fall gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij})^T$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
 |A| &= \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \\
 A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für eine quadratische $n \times n$ -Matrix A :

$\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow A$ hat n linear unabhängige Zeilen $\Leftrightarrow A$ hat n linear unabhängige Spalten $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow A \vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $n \times n$ -Matrix A und $|A| \neq 0$, d. h. das LGS ist eindeutig lösbar.

Satz (Cramer'sche Regel): Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ ein LGS mit quadratischer Systemmatrix $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ und $|A| \neq 0$. Dann gilt für die Koordinate x_i des Lösungsvektors $\vec{x}$:

$$x_i = \frac{|\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n|}{|A|} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) = (A|\vec{b})$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -5$$

$$x_1 = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \dots = \frac{2}{5}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

3.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition: Sei $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Gilt $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ für einen Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ und einen Skalar λ , dann heißt λ Eigenwert (EW) von A und $\vec{x}$ Eigenvektor (EV) zum EW λ .

Bemerkungen:

- $\vec{x} \neq \vec{0}$ ist ???, λ kann auch 0 sein
- $\vec{x}, \vec{y}$ EV zum EW λ , dann auch $\vec{x} + \vec{y}, c\vec{x}$ (c Skalar)

dann $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y} = \lambda(\vec{x} + \vec{y})$ und $A(c\vec{x}) = c \cdot A\vec{x} = c \cdot \lambda\vec{x} = \lambda(c\vec{x})$

- EW, EV auch für lineare Abbildungen $f: V \rightarrow V: f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}, \vec{x} \neq \vec{0}$

Beispiele:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}: A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ Spiegelung auf der 1. Achse
 $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1$, d. h. $\vec{e}_1$ ist EV zum EW $\lambda = 1$
 $A\vec{e}_2 = -\vec{e}_2$, d. h. $\vec{e}_2$ ist EV zum EW $\lambda = -1$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}: B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $B\vec{e}_1 = \vec{e}_1$
 $B\vec{e}_2 = \vec{e}_2$
 $B\vec{e}_3 = \vec{0}$

Wie findet man EW und EV einer Matrix? $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{x}_{\neq 0} = \vec{0} \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$

1. Bestimmung von λ aus $|A - \lambda I| = 0$
2. Bestimmung von $\vec{x}$ zu jedem λ aus $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

Beispiele:

- $A = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -12 \\ 12 & 1 & -12 \\ 16 & 0 & -15 \end{pmatrix}$, gesucht: alle EW und EV
 charakteristische Gleichung $|A - \lambda I| = 0$ lösen:

$$\begin{vmatrix} 13 - \lambda & 0 & -12 \\ 12 & 1 - \lambda & -12 \\ 16 & 0 & -15 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 13 - \lambda & -12 \\ 16 & -15 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = -3$$

EV zu $\lambda = 1$:

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$(A - I|\vec{0})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & -12 & 0 \\ 12 & 0 & -12 & 0 \\ 16 & 0 & -16 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$$

EV zu $\lambda = -3$:

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & -12 & | & 0 \\ 12 & 4 & -12 & | & 0 \\ 16 & 0 & -12 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & | & 0 \\ 3 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 4 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 3c \\ 3c \\ 4c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Bemerkung: Man setze $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, dann gilt:

$T^{-1}AT = D$ (A kann diagonalisiert werden)

- PC-Händler verkauft im Laden oder im Internet.

heuer		nächstes Jahr
Ladenkunden	$\xrightarrow{80\%}$	Ladenkunden
Ladenkunden	$\xrightarrow{20\%}$	Internetkunden
Internetkunden	$\xrightarrow{90\%}$	Internetkunden
Internetkunden	$\xrightarrow{10\%}$	Ladenkunden

Gibt es einen Zustand, für den sich die Kundenzahlen nicht mehr ändern?

$x_t = \# \text{Ladenkunden im Jahr } t$

$y_t = \# \text{Internetkunden im Jahr } t \ (t = 0, 1, 2, \dots)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{x}_{t+1} = A \vec{x}_t$$

Wir suchen $\vec{x}$ mit $A \vec{x} = \vec{x}$, d. h. $\vec{x}$ ist EV zum EW $\lambda = 1$.

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.7$$

EV (λ_1) = $c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, also: $\frac{1}{3}$ Ladenkunden, $\frac{2}{3}$ Internetkunden

3.7 Skalarprodukte

gewöhnliches Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$$

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

- Länge von $\vec{x}$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

- Orthogonalität: wann gilt $\vec{x} \perp \vec{y}$?

$$\begin{aligned}\vec{x} \perp \vec{y} &\Leftrightarrow \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \\ \vec{x}^2 + \vec{y}^2 &= (\vec{x} - \vec{y})^2 \\ \vec{x}^2 + \vec{y}^2 &= \vec{x}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y}^2 \\ &\Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0\end{aligned}$$

- Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\begin{aligned}\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\phi \\ &\vdots \\ \Rightarrow \cos\phi &= \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}\end{aligned}$$

Beispiel: Welchen Winkel schließen Flächen- und Raumdiagonale eines Würfels miteinander ein?

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{e} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \cos\phi &= \frac{\vec{d} \cdot \vec{e}}{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{e}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \phi &\approx 0.62 \text{ rad} \approx 35.3^\circ\end{aligned}$$

Allgemeines Skalarprodukt Definition: Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ein *Skalarprodukt* ist eine Abbildung von $V \times V$ in $\mathbb{R}$, welche zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V$ einen Skalar $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in \mathbb{R}$ zuordnet, sodass gilt:

1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$
2. $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$
3. $\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
4. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0, \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt *Euklidischer Raum*.

Betrag, Winkel, Orthogonalität genauso definiert wie für gewöhnliches Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\| &= \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \\ \vec{x} \perp \vec{y} &\Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \\ \cos\phi &= \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}\end{aligned}$$

Beispiele:

- $V = \mathbb{R}^n, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y}$ (gewöhnliches Skalarprodukt) erfüllt Regeln 1. bis 4.
kanonische Basis: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ wobei $\forall i: \|\vec{e}_i\| = 1$ und $\forall i \neq j: \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$. Dies ist eine Orthonormalbasis.
- $V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$
„Kreis“?

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|^2 &= r^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

→ Ellipse

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{y}\end{aligned}$$

- $V = \mathbb{R}^n, A$ symmetrisch positiv definite⁴ Matrix
 $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T A \vec{y}$
(z.B. $A = I: \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T I \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$)
- $V = C[0, 1] = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$
 $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx \in \mathbb{R}$
z.B. $\sin(\pi x) \perp \cos(\pi x)$, denn $\int_0^1 \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x) dx = \dots = 0$

Satz (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung): Für $\vec{x}, \vec{y} \in V$ gilt

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $\vec{x}, \vec{y}$ linear abhängig sind.

Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned}\|\vec{x} - \lambda \vec{y}\| &\geq 0 \\ \langle \vec{x} - \lambda \vec{y}, \vec{x} - \lambda \vec{y} \rangle &\geq 0 \\ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 2\lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \lambda^2 \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle &\geq 0 \\ \text{man setze } \lambda &= \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}: \\ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 2 \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle^2} \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle &\geq 0 \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 &\leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| &\leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- $\cos \phi$ ist stets wohldefiniert
- Dreiecksungleichung $\|\vec{x} \pm \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ gilt stets

⁴ A ist positiv definit $\Leftrightarrow \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$

4 Folgen, Reihen und Funktionen

4.1 Folgen reeller Zahlen

4.1.1 Definition des Grenzwerts

Beispiel: Dezimalentwicklung von π

$$\begin{aligned}a_0 &= 3 \\a_1 &= 3.1 \\a_2 &= 3.14 \\a_3 &= 3.141 \\a_4 &= 3.1415\end{aligned}$$

$$a_n \rightarrow \pi$$

Definition: Eine Folge reeller Zahlen ist eine Anordnung $(a_n)_{n \geq 0} = a_1, a_2, \dots$

Beispiele:

- $a_n = \frac{1}{n^2}$ ($n \geq 1$) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$
- $a_n = 2$ $2, 2, 2, \dots$ konstante Folge
- $a_n = a_0 + n \cdot d$ z. B. $2, 5, 8, 11, \dots$ arithmetische Folge
- $a_n = a_0 + q^n$ z. B. $2, 6, 18, \dots$ geometrische Folge
- $a_0 = 5, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{5}{a_n} \right)$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ $5, 3, \frac{7}{3}, \dots \rightarrow \sqrt{5}$ rekursiv definierte Folge
(Babylonisches Wurzelziehen)

Wir betrachten eine rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ mit $a_0 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n + 4}{2}$ für $n = 0, 1, 2, \dots$
also: $0, 2, 3, 3.5, 3.75, 3.875, \dots$

Hier gilt: fast alle Folgenglieder a_n liegen in der Umgebung $(4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$ von 4.

$$a_n \in (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon) = U_\varepsilon(4) \text{ für fast alle } n$$

Definition: Eine Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert a , falls in jeder ε -Umgebung von a fast alle Glieder der Folge liegen, d. h. falls $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$. Besitzt die Folge keinen Grenzwert, heißt sie *divergent*.

Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

oder

$$a_n \rightarrow a$$

z. B.

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n^2} \quad (n \geq 1) & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 0, \quad \text{denn } \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil = N(\varepsilon) \\a_n &= n^2 \quad (n \geq 0) & 0, 1, 4, 9, \dots & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad (a_n) \text{ ist uneigentlich konvergent,} \\& & & \text{d. h. } \forall K > 0 \exists N(K) : a_n > K \text{ (für alle } n > N(K))\end{aligned}$$

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rightarrow a$, wobei $a_n \in U_\varepsilon(a)$ für fast alle n und $\forall a$.

z. B. $a_n = \frac{n+1}{n} : \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots \rightarrow 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \text{ denn } |a_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Beispiel: $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}, n \geq 1$ hat keine Grenzwerte, sondern Häufungswerte (-1 für ungerade und 1 für gerade n).

Definition: Eine Folge (a_n) besitzt einen Häufungswert a , falls in jeder ε -Umgebung von a unendlich viele Glieder der Folge liegen.

Bemerkungen:

- Grenzwert = einziger Häufungswert
- eine Folge kann mehrere Häufungswerte besitzen
- der größte Häufungswert: $\limsup a_n$ oder $\overline{\lim} a_n$ („limes superior“)
- der kleinste Häufungswert: $\liminf a_n$ oder $\underline{\lim} a_n$ („limes inferior“)
- $\exists \lim a_n : \lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$

z. B.

$$\begin{aligned}
 a_n &= (-1)^n \frac{n-1}{n} && \pm 1 \text{ Häufungswerte} \\
 & && \overline{\lim} a_n = 1 \\
 & && \underline{\lim} a_n = -1 \\
 a_n &= (-1)^n \frac{1}{n} && \lim a_n = \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = 0 \\
 (a_n) &= \left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \dots\right) && \nexists \lim a_n \\
 & && \underline{\lim} a_n = 0, \overline{\lim} a_n = \infty \text{ (uneigentlicher Häufungswert)}
 \end{aligned}$$

4.1.2 Monotonie und Beschränktheit

Definition: Eine Folge (a_n) heißt:

- *monoton fallend*, wenn $a_{n+1} \leq a_n$
- *streng monoton fallend*, wenn $a_{n+1} < a_n$
- *monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geq a_n$
- *streng monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} > a_n$

jeweils $\forall n$.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn es Zahlen a, b gibt, so dass $a \leq a_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
(a : untere Schranke, b : obere Schranke)

Bemerkungen:

- Folgen sind eventuell nur nach oben/unten beschränkt, z. B. $0, 1, 2, 3, \dots$ (untere Schranke: z. B. 0, keine obere Schranke).
- obere/untere Schranken sind nicht eindeutig bestimmt
- jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt stets eine kleinste obere Schranke (das *Supremum*) und eine größte untere Schranke (das *Infimum*) gemäß Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

$$\alpha = \inf a_n, \text{ falls } \begin{cases} \alpha \leq a_n & \forall n \\ \alpha' \leq a_n & \forall n \Rightarrow \alpha' \leq \alpha \end{cases}$$

analog $\beta = \sup a_n$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{n^2} && \text{streng monoton fallend} \\
 &&& \text{denn } a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow (n+1)^2 > n^2 \checkmark \\
 &&& \text{beschränkt } 0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 \\
 &&& \sup a_n = 1, \inf a_n = 0 \text{ (0 ist kein Folgenglied!)} \\
 &&& \Rightarrow \text{konvergent}
 \end{aligned}$$

Satz:

1. Jede konvergente Folge ist beschränkt.
2. Jede beschränkte Folge besitzt (mindestens) einen Häufungswert.
(Satz von Bolzano-Weierstraß)
3. Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.
(Hauptsatz für monotone Folgen)

4.1.3 Rechnen mit Grenzwerten

Satz:

1. Für Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten konvergenter Folgen gilt:

$$\begin{aligned}\lim a_n = a, \lim b_n = b &\Rightarrow \lim (a_n \pm b_n) = a \pm b \\ &\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \\ &\lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b} \text{ falls } b_n \neq 0, b \neq 0\end{aligned}$$

2. (Sandwich-Theorem)

Für Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ gilt:

$$\left. \begin{array}{l} a_n \leq c_n \leq b_n \text{ für (fast) alle } n \\ \lim a_n = \lim b_n = a \end{array} \right\} \Rightarrow \lim c_n = a$$

Beispiele:

•

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{n^2 + n - 1}{3n^2 + 11} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{11}{n^2}} \\ &= \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{\lim \left(3 + \frac{11}{n^2} \right)} \\ &= \frac{1 + 0 - 0}{3 + 0} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}a_n &= q^n : 1, q, q^2, q^3, \dots \quad \text{geometrische Folge} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q^n &= \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \infty & \text{für } q > 1 \text{ (uneigentlich konvergent)} \end{cases}\end{aligned}$$

Beweis für $q > 1$:

$$\begin{aligned}q &= 1 + p \text{ mit } p > 0 \\ q^n &= (1 + p)^n \\ &= 1 + \binom{n}{1} p + \binom{n}{2} p^2 + \dots + \binom{n}{n} p^n \\ &\geq 1 + np \rightarrow \infty \\ \Rightarrow q^n &\rightarrow \infty\end{aligned}$$

•

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1 \quad 2, 2.25, 2.37, 2.44, \dots \rightarrow e = 2.71828 \dots$$

•

$$a_n = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \text{ (siehe Übung)}$$

•

$$(a_n) \text{ Folge mit } \frac{1}{n^\alpha} \leq a_n \leq n^\alpha \\ \rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = 1$$

denn $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} = 1$ und $\lim \sqrt[n]{n^\alpha} = \lim (\sqrt[n]{n})^\alpha = 1^\alpha = 1$, dann gemäß Sandwich-Theorem

Satz (Konvergenzkriterium von Cauchy): Eine Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n > N(\varepsilon)$$

4.2 Unendliche Reihen

$$\begin{aligned} \text{z. B. } & \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + 0.\dot{1} = \frac{1}{9} \\ & 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots = \frac{\pi}{4} \text{ Leibniz-Reihe} \\ & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots = \ln 2 \\ & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty \end{aligned}$$

4.2.1 Der Begriff der unendlichen Reihe

Sei $a_1, a_2, \dots$ Folge...

Wir betrachten die Partialsummen:

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$\vdots$

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

$\downarrow$

s

Definition: Eine unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt konvergent und besitzt den Grenzwert s (die

Summe s), wenn die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ konvergiert und $\lim s_n = s$ gilt; andernfalls ist die Reihe divergent.

Beispiel: unendliche geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$

$$s_n = 1 + q + \dots + q^n$$

$$q \cdot s_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$$

$$(1 - q)s_n = 1 - q^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q} \text{ falls } |q| < 1$$

$$\text{also } \sum q^n = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q} \text{ für } -1 < q < 1$$

$$\text{z. B. } \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9}$$

Satz: Ist $\sum_{n \geq 0} a_n$ konvergent, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, aber nicht umgekehrt.

1. angenommen, $\sum a_n = \lim s_n = s$ konvergiert $\Rightarrow a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow 0 - 0 = 0$

2. harmonische Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$

$$\text{denn } 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots \rightarrow \infty$$

$$\text{explizit: } s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \rightarrow \infty$$

Definition: Eine Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ konvergent ist. Eine Reihe, die nicht absolut konvergent ist, nennt man *bedingt konvergent*.

Satz: Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent, aber nicht umgekehrt.

Also:

$$\sum |a_n| \begin{matrix} \Rightarrow \\ \nLeftarrow \end{matrix} \sum a_n \text{ konvergent} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \nLeftarrow \end{matrix} \lim a_n = 0$$

hinreichende Bedingung
für Konvergenz von $\sum a_n$

notwendige Bedingung
für Konvergenz von $\sum a_n$

Beispiele:

$$\bullet \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = \frac{1}{9}$$

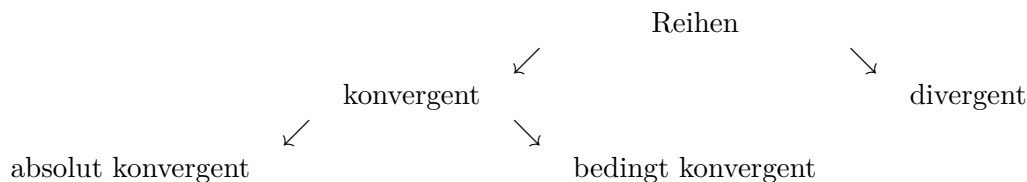
$$\frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \dots = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{10}\right)} = \frac{1}{11}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{10^n} \text{ ist absolut konvergent und daher auch konvergent}$$

$$\bullet 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty \text{ (harmonische Reihe)}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2 \text{ (alternierende harmonische Reihe)}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ ist zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent}$$



4.2.2 Konvergenzkriterien

(Vorsicht: alle diese „Kriterien“ sind hinreichend, aber nicht notwendig!)

1. Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ zwei Reihen, so dass $|a_n| \leq b_n$ für fast alle n und $\sum b_n$ konvergent ist, dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent. (Majorantenkriterium)
2. Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ zwei Reihen, so dass $0 \leq a_n \leq b_n$ für fast alle n und $\sum a_n$ divergent ist, dann ist $\sum b_n$ divergent. (Minorantenkriterium)
3. Gilt für $\sum a_n$, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für fast alle n , dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent. Falls hingegen $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n , so ist $\sum a_n$ divergent. (Wurzelkriterium)
4. Gilt für $\sum a_n$ (mit $a_n \neq 0$), dass $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$ für fast alle n , dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent. Falls hingegen $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ für fast alle n , so ist $\sum a_n$ divergent. (Quotientenkriterium)
5. Ist $\sum (-1)^n a_n$ eine alternierende Reihe, sodass a_n monoton gegen 0 konvergiert, dann ist $\sum (-1)^n a_n$ konvergent. (Leibniz-Kriterium)

Beispiele:

- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, denn (nach Majorantenkriterium) $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ ($n \geq 2$) und $\sum \frac{1}{n(n-1)} = 1$ (siehe Übung)
 $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist divergent, denn $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ und $\sum \frac{1}{n}$ divergiert (nach Minorantenkriterium)
- $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n}$ ist konvergent, denn $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ und $\frac{\sqrt[n]{n}}{2} \leq \underbrace{\frac{3}{4}}_q < 1$ für fast alle n (nach Wurzelkriterium)
 oder $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$ (nach Quotientenkriterium)
- $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ ist konvergent (nach Leibniz-Kriterium: $\frac{1}{2n+1} \downarrow 0$) gegen $\frac{\pi}{4}$
 $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ ist konvergent (nach Leibniz-Kriterium: $\frac{1}{n} \downarrow 0$) gegen $\ln 2$

Rechnen mit unendlichen Reihen

$$\sum a_n = a, \sum b_n = b \Rightarrow \sum (a_n + b_n) = a + b$$

$$\sum (\lambda a_n) = \lambda \cdot a$$

Cauchy-Produkt

$$\sum a_n \cdot \sum b_n = ?$$

neue Reihe $\sum c_n$, wo

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$\vdots$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$\sum c_n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

$\sum c_n$ ist das *Cauchy-Produkt* der Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$.

Es gilt: $\sum a_n, \sum b_n$ absolut konvergent $\Rightarrow$ Cauchy-Produkt absolut konvergent und $\sum \sum a_k b_{n-k} = a \cdot b$

4.2.3 Potenzreihen

Beispiel: Exponentialreihe (für festes $x \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = |x| \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

$$\text{also } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{1}{2} < 1 \text{ falls } n \text{ gen\u00fcgend gro\u00df}$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert f\u00fcr alle $x \in \mathbb{R}$

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots = e^x, \text{ insbesondere } x = 1 : 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = e = 2.7 \dots$$

Allgemein: $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ oder $\sum a_n (x - x_0)^n$

$$\text{z. B. } \sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{f\u00fcr } |x| < 1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz (Konvergenz von Potenzreihen): Zu jeder Potenzreihe $\sum a_n x^n$ gibt es eine Zahl R mit $0 \leq R \leq \infty$, so dass die Reihe f\u00fcr alle $|x| < R$ absolut konvergent und f\u00fcr alle $|x| > R$ divergent ist.

Dabei gilt: $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

Bemerkungen:

- Satz gilt auch f\u00fcr $x_0 \neq 0$ (beliebiger Entwicklungspunkt)
- Satz gilt auch in $\mathbb{C}$

- $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \Rightarrow R = 0$ ($\sum a_n x^n$ konvergent nur für $x = 0$)
- $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$ ($\sum a_n x^n$ konvergent für alle x)

Beweis:

Sei $|x| < R$.

$$\begin{aligned} \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} &= \underbrace{|x|}_{< R} \cdot \underbrace{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}_{= \frac{1}{R}} < 1 \\ \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n x^n|} &\leq q < 1 \text{ für fast alle } n \\ &\Rightarrow \text{Konvergenz nach Wurzelkriterium} \end{aligned}$$

Sei $|x| > R$: analog.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \\ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = |x| \frac{n}{n+1} < |x| < 1 \text{ für } |x| < 1 \\ \sum &\text{ konvergent für } |x| < 1 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} &= \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \\ \Rightarrow R &= \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

4.3 Asymptotischer Vergleich von Folgen

Analyse von Algorithmen: Komplexität und Speicherbedarf

z. B. Sortierung von n Zahlen der Größe nach:

primitiver Algorithmus: #Vergleiche = $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$ („groß-O“)

Average-Case-Analyse oder Worst-Case-Analyse

Definition (Landau-Symbole): Seien a_n, b_n Folgen. Dann schreibt man:

1. $a_n = O(b_n)$ („ a_n ist ein Groß-O von b_n “, für $n \rightarrow \infty$), wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq C$ für fast alle n .
2. $a_n = o(b_n)$ („ a_n ist ein Klein-O von b_n “, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$).
3. $a_n \sim b_n$ („ a_n und b_n sind asymptotisch gleich“, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$).

Beispiele:

- $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = n^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right)}_{\leq C} \leq C \cdot n^2$, d. h. $\frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$
- $\frac{n(n-1)}{2} = o(n^2) = o(2^n)$ denn $\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^3} \rightarrow 0$

- $\frac{n(n-1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$, denn $\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n^2}{2}} = \frac{n^2-n}{n^2} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$
- $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (Stirling'sche Formel)

$O(n)$ linear, $O(n \log n)$ (z. B. Quicksort), $O(n^2)$ quadratisch, $O(2^n)$ exponentiell

4.4 Elementare Funktionen

Wir betrachten Funktionen $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$.

4.4.1 Beispiele und einfache Eigenschaften

Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ wo $n \in \mathbb{N}$ (Grad des Polynoms), $a_i \in \mathbb{R}$ (Koeffizienten), $a_n \neq 0$

z. B.	konstante Funktionen	$f(x) = a_n$
	lineare Funktionen	$f(x) = a_1 x + a_0$
	Potenzfunktionen	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$
	Polynomfunktion 3. Grades	$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

Rationale Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ wo $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$ (Nullstellen von q)

z. B. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ wo $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\} \rightarrow \mathbb{R}$ – -2 und $+2$ sind *Polstellen*

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $I \subseteq D$ ein Intervall, dann heißt f auf I streng monoton wachsend, wenn $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad \forall x, y \in I$. (Analog streng monoton fallend: $x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \quad \forall x, y \in I$)

Polynomfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, stückweise monoton, im Allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

Satz: Jede auf einem Intervall I streng monotone Funktion $f : I \rightarrow f(I)$ ist bijektiv und lässt sich daher auf I umkehren.

Beweis: o. B. d. A. sei f streng monoton wachsend.

$x \neq y$, etwa $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, d. h. $f(x) \neq f(y)$, also ist f injektiv.

$f : I \rightarrow f(I) = \{y \mid \exists x \in I : f(x) = y\}$, also ist f surjektiv.

Demnach ist f bijektiv.

Es gilt: f^{-1} ist auch streng monoton, und zwar gleichsinnig zu f .

4.4.2 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Definition: Die natürliche Exponentialfunktion ist definiert durch $\exp(x) = e^x$, wo

$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828\dots$ ist. Die allgemeine Exponentialfunktion lautet $f(x) = a^x$ für $a > 0$.

Frage: Wie ist e^x bzw. a^x überhaupt definiert?

- ganzzahlige n :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_n \text{ für } n > 0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- rationale n : $a^{\frac{p}{q}}$ $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+$

$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ a \mapsto a^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$): ist stets streng monoton und bijektiv

$\Rightarrow f^{-1}(a) = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ (n -te Wurzel existiert)
 definiere $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

- reelle Exponenten a^b mit $b \in \mathbb{R}$
 man wähle eine Folge in $\mathbb{Q}$: $\underbrace{b_n}_{\in \mathbb{Q}} \rightarrow \underbrace{b}_{\in \mathbb{R}}$ und setze $a^b = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{b_n}$. Dieser Grenzwert existiert
 stets und ist unabhängig von der Folge b_n .

besondere Stellen von e^x :

- $e^0 = 1$
- $e^1 = e \approx 2.7 \dots$ Euler'sche Zahl
- Gauß'sche Glockenkurve: $e^{-\frac{x^2}{2}}$

$e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ bijektiv $\Rightarrow$ es existiert eine Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ (natürlicher Logarithmus) wo
 $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$, insbesondere:

- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$

Analog: allgemeiner Logarithmus zu Basis a als Umkehrfunktion von a^x : $y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$ (nur für $a > 0, a \neq 1$)

- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $a^{\log_a(x)} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

- $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ ($\rightarrow$ Rechenschieber)
- $\log(a^b) = b \cdot \log a$
- $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ und $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Satz: Die natürliche Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

1. $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (Darstellung von e^x als Grenzwert)
2. $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ (Darstellung von e^x als unendliche Reihe)
3. $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ (Funktionalgleichung für e^x)

4.4.3 Winkelfunktionen und Arcusfunktionen

Sinus: $\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
 Cosinus: $\cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$
 Tangens: $\tan x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

Siehe Einheitskreis im 1. Quadranten für $0 \leq x < 2\pi$. Die Funktionen werden dann periodisch erweitert, d. h. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad k \in \mathbb{Z}$. $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Reihendarstellung

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}; \pm \frac{3\pi}{2}; \pm \frac{5\pi}{2}; \dots \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Die Reihen (sowie Ableitungs- und Integralformeln) gelten ausschließlich im Bogenmaß!

Zusammenhang zwischen Sinus, Cosinus und Exponentialfunktion Sei hierfür e^z auch für $z \in \mathbb{C}$ definiert.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ &\quad + ix - i \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Also: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Anwendungen:

- Polardarstellung komplexer Zahlen: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$
z. B. $3 + 3i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
 $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$
 $\Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
 $\Rightarrow \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$
 $e^{i\pi} + 1 = 0\pi$

Umkehrfunktionen In $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind $\sin$ und $\cos$ weder injektiv noch surjektiv. Wir müssen also den Definitionsbereich und den Bildbereich einschränken.

Sei also $\sin : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1; 1]$. Hier ist $\sin$ bijektiv.

$\Rightarrow \exists$ Umkehrfunktion $\arcsin : [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (genannt *Arcussinus*; $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$)

analog $\arccos, \arctan : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Elementarfunktionen sind zusammengesetzt aus Grundfunktionen,

$$\text{z. B. } f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 x}} - \sin x \cdot \ln \frac{x}{1 + e^{-x}}$$

4.5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

4.5.1 Definition und Beispiele

Wir betrachten eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x), x_0$ fester Punkt.

„Gegen welchen Wert strebt $f(x)$, wenn x gegen x_0 geht?“

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ?$$

Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, denn

$$\begin{array}{ccc} \sin x \leq x & \leq \tan x \\ 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & \Rightarrow 1 & 1 \end{array}$$

$$\text{denn } \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \rightarrow 0 \text{ f\"ur } x \rightarrow \infty$$

Beispiel: $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{f\"ur } x > 0 \\ -1 & \text{f\"ur } x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = ? \dots$ dieser Grenzwert existiert nicht!

Definition: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert c , wenn f\"ur jede Folge (x_n) mit $x_n \in D, x_n \neq x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$

Gleichwertige Definition: f besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert c , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass gilt $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$

analog ist definiert: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

Praktische Berechnung eines Funktionsgrenzwerts

1. gem\"a\ss Definition des Grenzwerts
2. Anwendung der Rechenregeln f\"ur Grenzwerte von Summen und Produkten von Funktionen
3. Umformung des Ausdrucks f\"ur $f(x)$
4. Entwicklung von $f(x)$ in eine Reihe (siehe sp\"ater)
5. Regeln von de l'H\^opital (siehe sp\"ater)

Beispiele:

•

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 1}{x + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)} \\ &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{3+0}{1+0}$$

•

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100}{1 + \varphi e^{-x}} = \frac{100}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \varphi e^{-x})} = 100$$

Stetigkeit von Funktionen **Definition:** Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig an der Stelle* $x_0 \in D$, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Die Funktion heißt *stetig in* D , wenn f an jeder Stelle $x_0 \in D$ stetig ist.

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right), \text{ also } \lim \text{ und } f \text{ vertauschbar}$$

Beispiele für stetige Funktionen:

- alle elementaren Funktionen sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig
- Summen, Produkte, usw., Zusammensetzungen und Umkehrfunktionen stetiger Funktionen sind wieder stetig
- Potenzreihen sind im Inversen ihres Konvergenzintervalls stetig

Beispiele für nicht stetige Funktionen:

- Funktionen mit Sprungstellen (u. a. Treppenfunktionen)

$$y = f(x)$$

f ist stetig in x , wenn $f(\lim_{x \rightarrow x_0}) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Funktion, die nirgends stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

4.5.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

1. Vorzeichenbeständigkeit

f stetig, $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \text{Umgebung } U_f(x_0) : f(x) > 0 \quad \forall x \in U_f(x_0)$

2. Nullstellensatz von Bolzano

$f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f$ stetig, $f(a) < 0, f(b) > 0 \Rightarrow f$ besitzt mindestens eine Nullstelle $c \in I$ mit $f(c) = 0$.

3. Zwischenwertsatz

$f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f$ stetig $\Rightarrow f$ nimmt auf I einen kleinsten Wert $m = \min \{f(x) \mid x \in I\}$, einen größten Wert $M = \max \{f(x) \mid x \in I\}$ und alle Werte in $[m, M]$ mindestens einmal an.

5 Differentialrechnung in einer Variablen

5.1 Die Ableitung

5.1.1 Definition und Ableitung einfacher Funktionen

Wir betrachten eine Funktion $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$

Durchschnittliche Steigung im Intervall (x_0, x_1) : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ „Differenzenquotient“

Steigung in Punkt x_0 : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ „Differentialquotient“

Definition: Unter der Ableitung (dem Differentialquotienten) einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ versteht man den Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Existiert dieser Grenzwert, so heißt f in x_0 differenzierbar; existiert er für alle $x_0 \in D$, heißt f in D differenzierbar und die Funktion $f'(x)$ die Ableitung von f .

Schreibweisen: $f'(x), y'(x_0), \frac{df}{dx}(x_0)$ („Dee-Eff nach Dee-Iks in Iks-Null“), $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$

Interpretation in der Geometrie: Tangentenanstieg

den Naturwissenschaften: momentane Änderung einer Größe (z. B. Geschwindigkeit, Wachstum)

der Wirtschaft: z. B. Grenzkosten (zusätzliche Kosten für ein weiteres Stück)

Beispiele:

- $f(x) = c$ konstant $\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$
- $f(x) = ax + b$ linear $\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a$
- $f(x) = 3x^2 + 1$ quadratisch $\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 1 - (3x_0^2 + 1)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 6x_0$
also $(3x^2 + 1)' = 6x_0$
allgemein $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$
- $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x_n = \frac{1}{n} \downarrow 0 \\ -1 & x_n = -\frac{1}{n} \uparrow 0 \end{cases}$$

5.1.2 Eigenschaften und Ableitungsregeln

f stetig $\nRightarrow f$ differenzierbar

$\Leftarrow$

Satz: Ist f differenzierbar in x_0 , dann ist f dort auch stetig.

Beweis:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$\downarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\
\downarrow &\quad \downarrow \\
\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0) + f(x_0) \cdot 0 \\
\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0), \text{ d.h. } f \text{ ist stetig in } x_0 \square
\end{aligned}$$

reellwertige Funktionen $\supset$ stetige Funktionen $\supset$ differenzierbare Funktionen

	reellwertig	stetig	differenzierbar
$\frac{1}{x}$	ja	nein	nein
$ x $	ja	ja	nein
x^2	ja	ja	ja

Ableitungen elementarer Funktionen (Schule)

- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \text{ oder } x > 0, n \in \mathbb{R})$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
denn $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x_0 + (x - x_0)) - \sin x_0}{x - x_0}$
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x_0 \cos(x - x_0) + \cos x_0 \sin(x - x_0) - \sin x_0}{x - x_0} = \sin x_0 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos(x - x_0) - 1}{x - x_0}}_{0 \text{ (siehe Übung)}} + \cos x_0 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}}_1$
 $= \cos x_0$
- $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Satz (Ableitungsregeln):

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ Summenregel
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Produktregel
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)$ Quotientenregel
- $D_1 \xrightarrow{g} D_2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f \circ g = F$
 $F(x) = f(g(x))$
 $\Rightarrow F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Kettenregel
kurz: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Beispiele:

- $f(x) = (1 + x^2)e^x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^x + (1 + x^2)e^x = (1 + x)^2 e^x$
- $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $f(x) = \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f(x) = \underbrace{\sin}_{f_1} \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{f_3} = f_1(f_2(f_3(x))) \Rightarrow f'(x) = f_1'(f_2(f_3(x))) \cdot f_2'(f_3(x)) \cdot f_3'(x)$
 $= \cos \sqrt{1+x^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}}_{f_2} \cdot 2x$

- $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$, also $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$, also $(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

Höhere Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= f'(x) & 1. \text{ Ableitung von } f \\ \frac{d}{dx} f'(x) &= f''(x) & 2. \text{ Ableitung von } f \text{ (falls sie existiert!)} \end{aligned}$$

allgemein $f'''(x), f^{(4)}(x), \dots, f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f$ n -te Ableitung

Definition: die n -te Ableitung einer Funktion f ist rekursiv definiert gemäß $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$ und $f^{(1)}(x) = f'(x)$. Falls $f^{(n)}(x)$ existiert, heißt f n -mal *differenzierbar*; falls $f^{(n)}(x)$ auch stetig ist, heißt f n -mal *stetig differenzierbar*.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) = \ln x &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ f'''(x) &= +\frac{2}{x^3} \\ f^{(4)} &= -\frac{6}{x^4} = -\frac{3!}{x^4} \end{aligned}$$

allgemein: $f^{(n)}(x) = (-1)^{(n+1)} \frac{(n-1)!}{x^n}$ für $n \geq 1$

Beispiel: $f(x) = x \cdot |x| \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx} \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases} = 2|x|$

$f''(x)$ existiert nicht für $x_0 = 0$, also ist f einmal aber nicht mehr zweimal differenzierbar

5.2 Die Taylor'sche Formel und der Mittelwertsatz

5.2.1 Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} f'(x_0) & \text{ momentane Änderung von } f \text{ im Punkt } x_0 \\ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} & \text{ mittlere Änderung von } f \text{ im Intervall } [x_0, x_1] \end{aligned}$$

Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung): Ist f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar, dann gibt es mindestens eine Stelle ξ mit $a < \xi < b$, so dass $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(Sei g die Gerade durch a und b , dann ist h die dazu parallele Tangente von f . ξ ist dann der Berührungspunkt von h und f .)

Sonderfall für $f(a) = f(b)$: $\exists \xi : f'(\xi) = 0$ (Satz von Rolle)

Beweis: ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f nicht linear (sonst trivial).

Man bilde $F(x) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

$\Rightarrow F(x)$ stetig in $[a, b]$; $F(a) = F(b) = 0$, aber $F(x) \neq 0$

$\Rightarrow F$ besitzt Minimum oder Maximum in einem ξ mit $a < \xi < b$

$$\Rightarrow F'(\xi) = f(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1 = 0 \quad (\text{Schule, siehe Abschnitt 4})$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{für ein } \xi \text{ mit } a < \xi < b \quad \square$$

Beispiel für Anwendung des Mittelwertsatzes:

Satz: Seien Funktionen f, g differenzierbar auf $[a, b]$ und gelte $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in [a, b]$, dann folgt $f(x) = g(x) + C$ mit C konstant, d. h. f und g unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.

Beweis: man setze $F(x) = f(x) - g(x)$, $x_0 \in [a, b]$ beliebig.

$$\Rightarrow F(x) - F(x_0) = \underbrace{F'(\xi)}_{f'(\xi) - g'(\xi) = 0} \cdot (x - x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall x : F(x) = F(x_0), \text{ also konstant } (C = F(x_0))$$

5.2.2 Der verallgemeinerte Mittelwertsatz und die Regel von de l'Hôpital

Satz (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung): Sind f, g auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x$, dann gibt es mindestens eine Stelle ξ mit $a < \xi < b$, so dass

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweis: Wir bilden

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

$$g(b) - g(a) = g'(\xi) \cdot (b - a) \neq 0$$

F stetig und differenzierbar; $F(a) = F(b) = 0$

$$\Rightarrow \exists \xi : F'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad \square$$

Unbestimmte Formen z. B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ unbestimmte Form. Wie groß ist $\frac{0}{0}$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

andere unbestimmte Formen:

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \cdot \infty$$

$$\infty - \infty$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$

$$1^\infty$$

Satz (Regel von de l'Hôpital): Sind die Funktionen f, g in einer Umgebung von x_0 differenzierbar, gilt $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, so folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Eine analoge Aussage gilt für $x \rightarrow \infty$ oder auch, falls $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ für ein } \xi \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x \\ x \rightarrow x_0 &\Rightarrow \xi \rightarrow x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \square \end{aligned}$$

Beispiele:

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!x^0}{e^x} = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

d. h. e^x wächst schneller an als jede Potenz x^n

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

•

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} e^{(x-1) \cdot \ln(\ln x)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \ln(\ln x) &\stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{x-1}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{(-1) \frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)^2}{x \cdot \ln x} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{\frac{1}{x} \cdot x + \ln x \cdot 1} = \frac{-2 \cdot 0}{1 + 0} = 0 \\ \text{und damit } \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{x-1} &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \ln(\ln x)} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &\stackrel{1^\infty}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 1 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e^1 = e \end{aligned}$$

5.2.3 Taylorreihen

Sei $f(x)$ differenzierbar in x_0 .

Tangente t : Anstieg $f'(x_0)$, durch den Punkt $(x_0, f(x_0)) \Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.
also

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ für } x \in U(x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x) \end{aligned}$$

Fehler $R(x) = o(x - x_0)$ für $x \rightarrow x_0$

$$\begin{aligned} \text{denn } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} - f'(x_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

also: f differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f$ linear approximierbar in x_0 (siehe oben)

Genauso gilt: f linear approximierbar, d. h. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x)$ mit $R(x) = o(x - x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f'(x_0) + \frac{R(x)}{x - x_0} \right) = f'(x_0) \Rightarrow f \text{ in } x_0 \text{ differenzierbar}$$

Satz: Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann differenzierbar in x_0 , wenn f wie folgt linear approximierbar ist:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x) \text{ mit } R(x) = o(x - x_0)$$

Bisher: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

besser: $f(x) \approx a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$ usw.

Angenommen, $f(x)$ ist durch eine endliche oder unendliche Summe approximierbar,

$$\text{d. h. } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ (Potenzreihe im Punkt } x_0)$$

Potenzreihe kann für $|x - x_0| < R$ gliedweise differenziert werden (ohne Beweis)

$$\Rightarrow f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3!a_3(x - x_0) + \dots$$

$$f''(x_0) = 2a_2 = 2!a_2$$

$$f'''(x_0) = 3!a_3$$

$$\text{allgemein } f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \end{aligned}$$

Dies ist die *Taylorreihe* von f im Entwicklungspunkt x_0 .

Sonderfall: $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Dies ist die *McLaurinreihe* von f .

Beispiele:

•

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x \\
 x_0 &= 0 \\
 \Rightarrow f^{(n)}(x) &= e^x \\
 f^{(n)}(x) &= e^0 = 1 \\
 \Rightarrow e^x &= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots \\
 &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
 \end{aligned}$$

analog für $\sin x$ und $\cos x$

•

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln x \\
 x_0 &= 1 \\
 f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \\
 \Rightarrow f^{(n)}(1) &= (-1)^{n-1} (n-1)! \\
 \Rightarrow \ln x &= \ln 1 + 1 \cdot (x-1) - \frac{1!}{2!} (x-1)^2 + \frac{2!}{3!} (x-1)^3 - + \dots \\
 &= (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3 - + \dots \\
 \Rightarrow \ln(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \text{ für } -1 < x \leq 1 \\
 \text{insbesondere } x=1 : \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots
 \end{aligned}$$

Bricht man die Taylorreihe nach dem n -ten Glied ab, erhält man

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n$$

Dies ist die *Taylor'sche Formel* mit *Restglied* R_n . R_n ist abhängig von n, x_0, x .

Satz (von Taylor): Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal differenzierbar, und sind $x, x_0 \in I$, dann gilt obige Formel mit dem Restglied (nach Lagrange) $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ wo ξ zwischen x_0 und x liegt. Ist f beliebig oft differenzierbar, so stimmt die Taylorreihe genau dann mit f überein, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Beispiele:

•

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$x_0 = 0$$

$$f(0) = 1$$

$t_0(x) = 1$ konstantes Taylorpolynom

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$t_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ lineares Taylorpolynom = Tangente

$t_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ quadratische Approximation

•

$$f(x) = e^x$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

$$\text{mit } R_n = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

ξ zwischen 0 und x

$$\begin{aligned} \Rightarrow |R_n| &\leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} = \\ &= e^{|x|} \cdot \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \dots \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Bestimme e auf 4 Nachkommastellen, d. h. wähle n so, dass $|R_n| < 10^{-4}$ für $x = 1$.

$$|R_n|_{x=1} \leq \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$$

$$(n+1)! > 3 \cdot 10^4$$

$$n+1 \geq 8$$

$$n \geq 7$$

$$\Rightarrow e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{7!} = 2.7182\dots$$

•

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \arctan x \\
 x_0 &= 0 \\
 y &= \arctan x \\
 y' &= \frac{1}{1+x^2} \\
 &= \frac{1}{1-(-x^2)} \\
 &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - + \dots \\
 y &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - + \dots + C \\
 y(0) &= \arctan 0 = 0 = C \\
 \Rightarrow \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots
 \end{aligned}$$

insbesondere $x = 1 : \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

5.2.4 Monotonie, Extrema und Konvexität

Gegeben sei eine Funktion $f : I_{\subseteq \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, die nach Bedarf differenzierbar ist.

Monotonie Satz: f ist genau dann monoton wachsend (bzw. fallend) auf I , wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) $\forall x \in I$ gilt.

Beweis:

$\Rightarrow$: Sei f monoton wachsend, das heißt $f(x_1) \leq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$.

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \\
 \Rightarrow f'(x_1) &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0
 \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: Es gelte $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$. Seien $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) &= \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \text{ mit } \xi \text{ zwischen } x_1 \text{ und } x_2 \text{ (Mittelwertsatz)} \\
 &\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\geq 0} \\
 \Rightarrow f(x_1) &\leq f(x_2) \quad \square
 \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 e^x \\
 f'(x) &= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x (x^2 + 2x) = e^x x (2 + x) \\
 f'(x) &= 0 \text{ für } x \in \{0; -2\}
 \end{aligned}$$

$f'(x)$ ist in $(-\infty; -2)$ monoton wachsend, in $(-2; 0)$ monoton fallend, und in $(0; \infty)$ wieder monoton wachsend.

Extremwerte Definition: f besitzt an der Stelle x_0 ein *relatives Maximum*, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ in einer Umgebung von x_0 gilt, d. h. $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap I$ mit $\delta > 0$. f besitzt an der Stelle x_0 ein *absolutes Maximum* im Intervall I , wenn $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I$ gilt. Analog sind *relatives* und *absolutes Minimum* definiert.

Satz: Für relative Extrema von f gilt:

- notwendige Bedingung: f hat ein relatives Extremum in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$
- hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \begin{cases} < 0 & \Rightarrow f \text{ hat ein relatives Maximum in } x_0 \\ > 0 & \Rightarrow f \text{ hat ein relatives Minimum in } x_0 \end{cases}$

Also $f'(x_0) \wedge f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ hat ein relatives Extremum in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Beweis:

- f besitze ein relatives Maximum in x_0 , d. h. $f(x) \leq f(x_0)$ für $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ($\delta > 0$).

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\geq 0 \text{ für } x < x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \\ &\leq 0 \text{ für } x > x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 \\ &\Rightarrow f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

- Gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ($\Rightarrow f''(x) < 0$ in einer Umgebung von x_0).

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 \\ &\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \text{ für } x \text{ nahe genug bei } x_0 \\ &\Rightarrow f \text{ hat ein relatives Maximum in } x_0 \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist notwendig, aber **nicht** hinreichend für ein relatives Extremum. Beispiel: $f(x) = x^3, x_0 = 0$ (Wendepunkt, kein Extremum!)
- Die Bedingung $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ ist hinreichend, aber **nicht** notwendig für ein relatives Maximum. Beispiel: $f(x) = 1 - x^4, x_0 = 0$ ($f'(0) = 0, f''(0) = 0$; trotzdem relatives Maximum!)
- Generell: Sei $f^{(n \in \mathbb{N})}(x) = 0$ und $\forall k \in \mathbb{N} < n : f^{(k)}(x) \neq 0$ (die n -te Ableitung von f ist in x die erste ungleich 0). Nur wenn n gerade ist, liegt in x ein relatives Extremum vor.
- Obige Bedingungen sind nur für relative Extrema von differenzierbaren Funktionen geeignet. Beispiel: $f(x) = |x|, x_0 = 0$ ist ein relatives Minimum, aber $f'(x) \neq 0$.

Zum Auffinden von absoluten Extremwerten in einem Intervall $I = [a; b]$ untersucht man alle relativen Extrema und die möglichen Randextrema an den Stellen $x_0 = a$ oder $x_0 = b$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 e^x \\ f'(x) &= e^x x(2 + x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0 \\ f''(x) &= [e^x(2x + x^2)]' = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 2) \\ &\Rightarrow f''(-2) = e^{-2}(-2) \leq 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum an der Stelle } x_1 = -2 \\ &\quad f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{relatives Minimum an der Stelle } x_2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \infty \Rightarrow \nexists \text{ absolutes Maximum auf } \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 0, f(0) = 0, f(x) > 0 \text{ für } x \neq 0 \Rightarrow \text{absolutes Minimum bei } x = 0 \end{aligned}$$

Wendepunkte und Konvexität **Definition:** f heißt *konvex* (*konkav*), wenn f' monoton wachsend (fallend) ist. f hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn f' in x_0 ein relatives Extremum besitzt.

Satz: f ist genau dann konvex (konkav) auf I , wenn $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) $\forall x \in I$. Gilt $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, dann besitzt f einen *Wendepunkt* an der Stelle x . (Für Wendepunkte gelten ähnliche Kriterien wie bei relativen Extrema, nur umgekehrt: ist n ungerade, gibt es einen Wendepunkt.)

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 e^x \\ f'(x) &= (2x + x^2)e^x \\ f''(x) &= (2 + 4x + x^2)e^x \\ f'''(x) &= (6 + 6x + x^2)e^x \\ f''(x) &= 0 \text{ in } x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2} \quad (f'''(x_{3,4}) \neq 0) \end{aligned}$$