Lösung ADM 1. Übungstest WS 2016 Gruppe A

Beispiel 1)

Induktionsbeweis

$$\sum_{i=1}^{n}(i-2)^2 = \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6} + 1$$

<u>Induktionsanfang P(1)</u>

Linke Seite:

$$\sum_{i=1}^{1}(i-2)^2 = (1-2)^2 = (-1)^2 = 1$$

Rechte Seite:

$$\frac{(1-1)(1-2)(2*1-3)}{6} + 1 = \frac{(0)(-1)(-1)}{6} + 1 = 0 + 1 = 1$$

<u>Induktionsschluss P(n) → P(n+1)</u>

Linke Seite:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(i-2)^2 = \sum_{i=1}^{n}(i-2)^2 + \left((n+1)-2\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(i-2)^2 + (n-1)^2 =$$

$$\frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6} + 1 + (n-1)^2 = \frac{(n^2-n-2n+2)(2n-3)}{6} + \frac{6}{6} + n^2 - 2n + 1$$

$$= \frac{2n^3-6n^2+4n-3n^2+9n-6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6n^2-12n+6}{6}$$

$$= \frac{2n^3-9n^2+13n-6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6n^2-12n+6}{6}$$

$$= \frac{2n^3-3n^2+n+6}{6}$$

Rechte Seite:

$$= \frac{((n+1)-1)((n+1)-2)(2(n+1)-3)}{6} + 1$$

$$= \frac{(n)(n-1)(2(n+1)-3)}{6} + 1$$

$$= \frac{(n)(n-1)(2n+2-3)}{6} + 1$$

$$= \frac{(n)(n-1)(2n-1)}{6} + 1$$

$$= \frac{(n^2-n)(2n-1)}{6} + 1$$

$$= \frac{2n^3-2n^2-n^2+n}{6} + \frac{6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 6}{6}$$

Rechte und linke Seite sind gleich!

Q.e.d.

Beispiel 2)

Kongruenzen

$$\boldsymbol{a)\ 6x \equiv 3\ mod\ 9}$$

ggT(9,6) = 3

3|3 stimmt! →Lösung!

Euklidscher Algorithmus von 9 u. 6!

$$9 = 6 * 1 + 3$$

$$6 = 3 * 2 + 0$$

Retour:

$$3 = 9 - \mathbf{1} * 6$$

$$-6 \equiv 3\ mod\ 9\ passt!$$

$$x = -1 + 9k, k \in Z$$

$$\boldsymbol{b)\ 6x\ \equiv 4\ mod\ 9\ (unlösbar)}$$

ggT(9,6) = 3

3|4 falsch! →Keine Lösung!

Beispiel 3)

Prädikatenlogik

a) Verbale Begründung: $\forall x\ \in \mathbb{N}\ \exists\ y\ \in\ \mathbb{N}: x\ < y$
Siehe Peanoaxiome: Jede Zahl n hat einen Nachfolger n'!
b) Tautologie? $(n + 2\ \geq 6) \supset (n = 4)$ in $\mathbb{N}$
Hinweis: $A \supset B = \neg A \vee B$ also $\neg(n + 2 \geq 6) \vee (n = 4)$
$\boldsymbol{\neg(n + 2 \geq 6)}$ **bedeutet, dass (n+2) kleiner 6 sein muss, also kommen** $\boldsymbol{n = \{0, 1, 2, 3\}}$ **infrage. Das ∨ ist ein logisches „oder“. Oder liefert 1 oder true, wenn mindestens eine der Aussagen zutrifft, oder beide. Deswegen kann n auch 4 sein. Also P(n) gilt für** $\boldsymbol{n = \{0, 1, 2, 3, 4\}}$**.**