Bsp.: $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$

Extremwerte, Sattelpunkte

$$f_x = 2x + y + 1 \quad = 0$$

$$f_y = x + 2y + 1 \quad = 0$$

$\mathrm{I} - \mathrm{II}$: $\quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$

I: $\quad 3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$$y = -\frac{1}{3}$$

$(x,y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$: stat. Punkt.

$f_{xx} = 2$

$f_{xy} = f_{yx} = 1$

$f_{yy} = 2$

Hesse-Matrix:

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det H_1 = \det 2 = 2$

$\det H_2 = \det H_f = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$

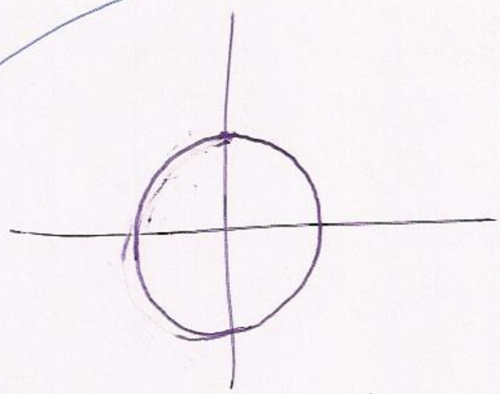
$\Rightarrow H_f$ pos. def. $\Rightarrow$

lokales $\underline{\underline{\text{min.}}}$

Extrema unter Nebenbedg.

Bsp.: $f(x,y) = x+y+1$

Nebenbedg.: $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2-1=0$



einfache Methode: „Reduktionsmethode“

$y^2 = 1-x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow f_1(x) = x+\sqrt{1-x^2}+1$ eine $y=+\sqrt{1-x^2}$

$f_2(x) = x-\sqrt{1-x^2}+1$ $y=-\sqrt{1-x^2}$

f_1 untersuchen

$$f_1' = 1 - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$1 - x^2 = x^2$$

$$1 = 2x^2 \quad \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow$$

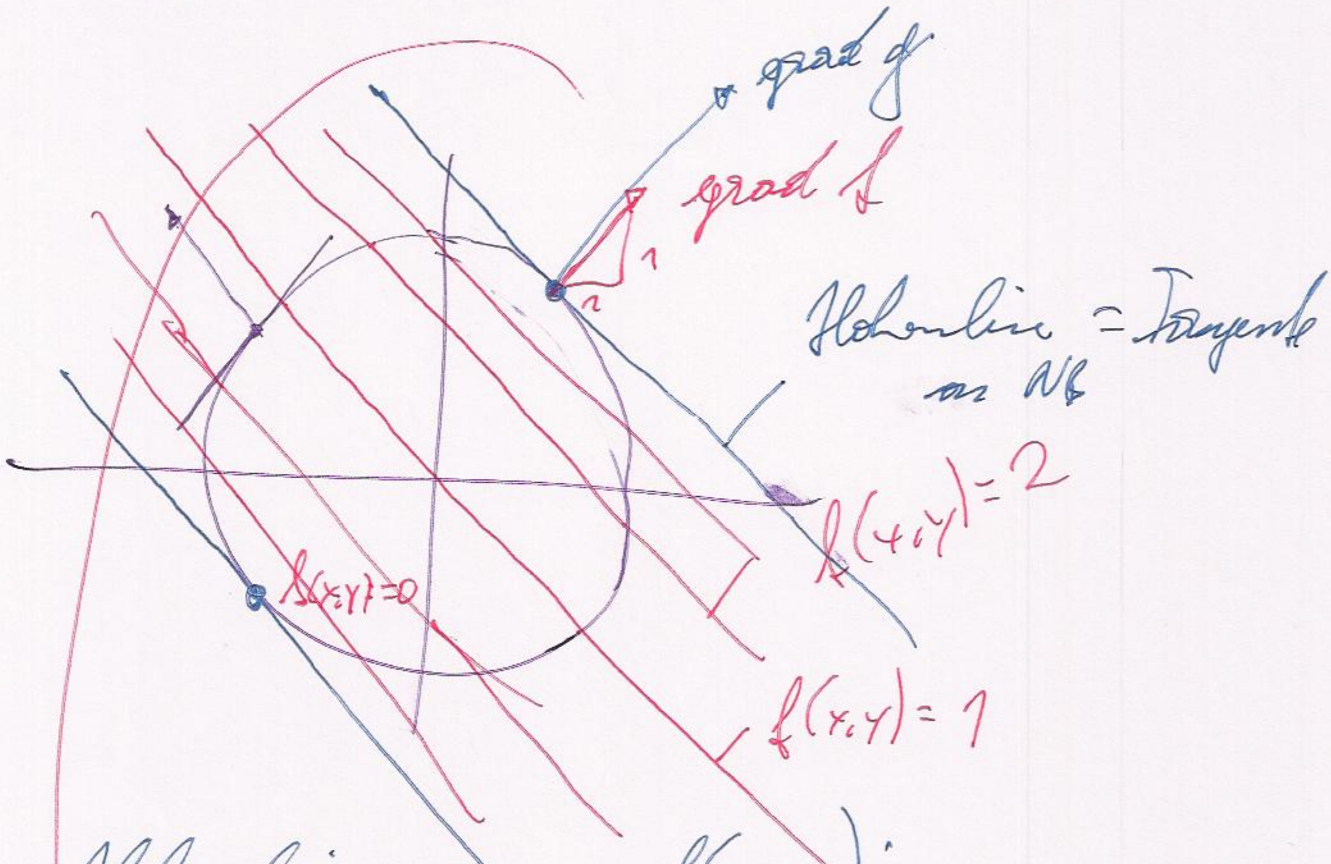
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

---

f_2 analog . . .

$$f(x,y) = x + y + 1$$

$$NB: g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$



Höhenlinie von $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \text{const.}$$

z.B.: $f(x,y) = 1 \Leftrightarrow x + y + 1 = 1$

$$x + y = 0$$

$$\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g$$

$$\operatorname{grad}(f - \lambda \cdot g) = \vec{0}$$

$$f_x - \lambda \cdot g_x = 0$$

$$f_y - \lambda \cdot g_y = 0$$

$$x \cdot e^{x} = y \cdot \cos y$$

Satz: Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Menge

$\underbrace{f : D \to \mathbb{R}}_{\text{"Zielfunktion"}}, \quad \underbrace{g_i : D \to \mathbb{R}}_{m \text{ Nebenbdg.}} \; (1 \leq i \leq m)$ stetig differenzierbar

Falls f in $\vec{x}_0$ ein relatives Extremum unter den NB $g_1(\vec{x}) = 0, g_2(\vec{x}) = 0, \ldots, g_m(\vec{x}) = 0$ besitzt und falls

$$\text{grad}\, g_1(\vec{x}_0), \ldots, \text{grad}\, g_m(\vec{x}_0)$$

linear unabhängig

$\Rightarrow \exists$ Vektor $(\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0m}) \in \mathbb{R}^m$:

Fkt.: $$\boxed{F(\vec{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\vec{x})}$$

erfüllt Glg.:

$$\text{grad}\, F(\vec{x}_0, \lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0m}) = \vec{0}$$

$f(x,y) = x + y + 1$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = \underline{\underline{0}}$

$$F(x,y,\lambda) = x+y+1 - \lambda \cdot (x^2+y^2-1)$$

Extrempunkte:

$$\operatorname{grad} F = \vec{0}$$

$F_x = 0$

$F_y = 0$

$F_\lambda = 0$

I: $1 - 2\lambda x = 0$

II: $1 - 2\lambda y = 0$

III: $-(x^2+y^2-1) = 0$; NB

I + II: $-\cancel{2}\lambda x + \cancel{2}\lambda y = 0 \quad | \frac{1}{\lambda}$

$-x + y = 0$

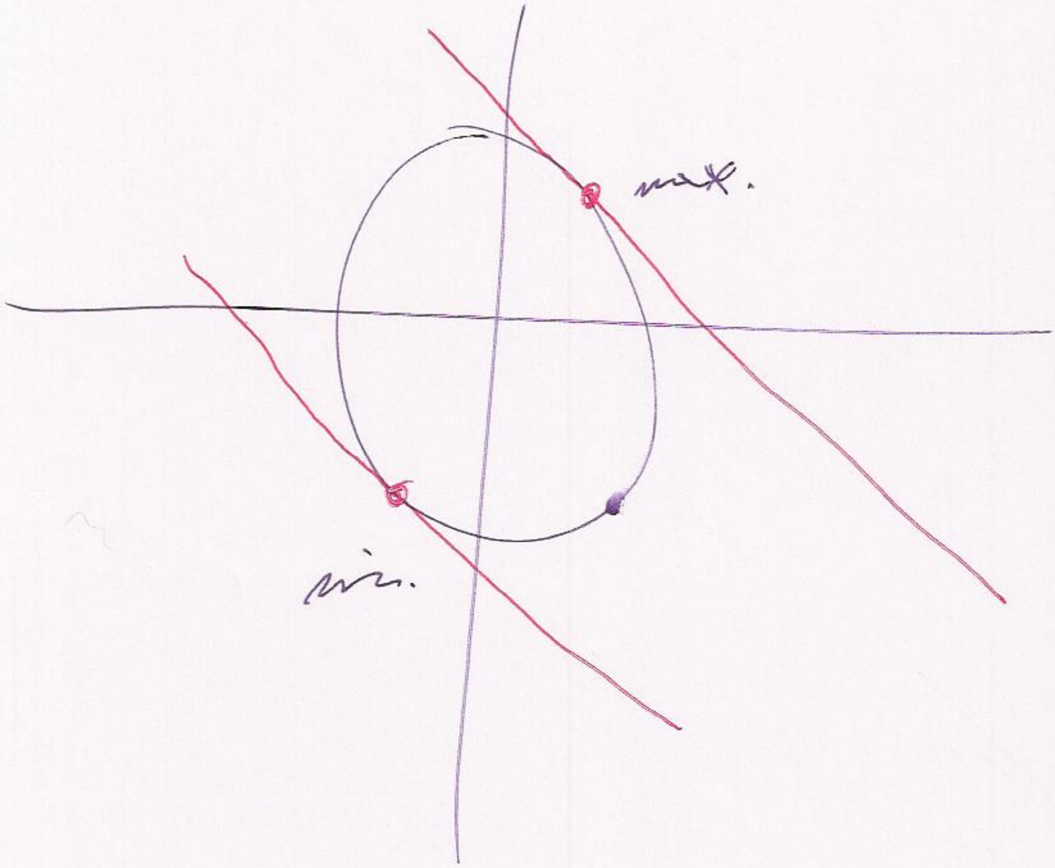
$\underline{\underline{y = x}}$

$\Rightarrow \quad x^2 + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

mögl. Extremwerte



Lineare DGL erster Ordnung:

Differentialglg.: Gleichungen wo Ableitungen einer gesuchten Fkt. f vorkommen.

Def.: Lineare Differentialglg. erster Ordnung:

$$\boxed{y'(x) + a(x) \cdot y(x) = s(x)}$$

$y(x)$ ... gesuchte Fkt.

$a(x), s(x)$ ... stetige Fkt.

$s(x)$ ... Störfkt.

$s(x) \equiv 0$: homogene DGL

$s(x) \neq 0$: inhomogene DGL

Wie sehen alle Lsg. $y(x)$ aus?

Satz.: <u>Lösungsgesamtheit</u> der lin. DGL

$$y' + a(x) \cdot y = s(x)$$

ist gegeben durch:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

mit: $y_h(x)$: allgemeine Lsg. der zugehörigen homogenen DGL $\quad y' + a(x) \cdot y = 0$

$y_p(x)$: beliebige Partikulärlsg. der geg. inhomogenen DGL

Bsp.: exponentielles Wachstum

$f(t)$... Anzahl der Individuen einer Population zum Zeitpunkt t

DGL: $f'(t) = \alpha \cdot f(t) \quad , \alpha > 0$

"Änderung ist proportional zur Anzahl der Individuen"

$$f'(t) - \alpha \cdot f(t) = 0$$

homogene li. DGL 1. Ordng.

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \alpha \quad \Big| \int$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot dt = \int \alpha \cdot dt$$

$$\ln|f(t)| = \alpha \cdot t + C \quad \Big| \, e^{\cdot}$$

$$|f(t)| = e^{\alpha \cdot t + C} = e^{C} \cdot e^{\alpha t}$$

$$f(t) = \underbrace{(\pm e^{c})}_{:=\tilde{C}} \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

$$f(t) = \tilde{C} \cdot e^{\alpha t} \quad , \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

allg. Lsg. der DGL:

$$f(t) = \tilde{C} \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

hom. DGL:

$$\boxed{f'(x) + a(x) \cdot f(x) = 0}$$

$$f'(x) = -a(x) \cdot f(x) \quad \Big| \frac{1}{f(x)}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -a(x) \quad \Big| \int$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int a(x) \cdot dx$$

$$\ln|f(x)| = \Big(-\underbrace{\int a(x) \cdot dx}\Big) + C$$

$$A(x) := \int a(x) \cdot dx$$

$$\ln|f(x)| = -A(x) + C \quad \Big| e$$

$$|f(x)| = e^{C} \cdot e^{-A(x)}$$

$$\boxed{f(x) = \tilde{c} \cdot e^{-A(x)}} \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$