

Analysis (Panholzer)

1. Haupttermin: Abschlussprüfung (Rekonstruktion)

30. Juni 2026

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Wir betrachten im Folgenden die Funktionenreihe

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3} \right)^n.$$

- (a) Man formuliere allgemein für eine Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n$ wahlweise das **Quotientenkriterium** oder das **Wurzelkriterium** für die Konvergenz/Divergenz von Reihen.
- (b) Man setze $x = 2$ und prüfe die entstehende Reihe $R(2)$ mit Hilfe des in (a) formulierten Konvergenzkriteriums auf **Konvergenz/Divergenz**.
- (c) Unter Zuhilfenahme des in (a) formulierten Konvergenzkriteriums und unter separater Prüfung allenfalls auftretender "Randfälle" (also Werte $x \in \mathbb{R}$, für welche das gewählte Konvergenzkriterium keine Aussage treffen kann), ermittle man den **Konvergenzbereich der Funktionenreihe** $R(x)$, also die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} : R(x) \text{ konvergiert}\}$.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:

$$f(x) = e^{-x} \cdot \sin(x).$$

- (a) Bestimmen Sie alle **stationären Punkte** von $f(x)$, also die Menge $K = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$.
- (b) Sie sollen weiters zeigen, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x) dx$ konvergiert, indem Sie das **Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale** anwenden, d.h., indem Sie eine geeignete stetige reelle Funktion $g(x)$ mit $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$, finden, sodass $\int_0^\infty g(x) dx$ konvergiert. Führen Sie dies aus, d.h., geben Sie $g(x)$ an und berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^\infty g(x) dx$. Welche Abschätzung nach oben erhalten Sie dadurch für den Betrag des Integrals $\int_0^\infty f(x) dx$?
- (c) Ermitteln Sie nun eine **Stammfunktion** $F(x)$ für $f(x)$. Dies kann beispielsweise durch zweimalige partielle Integration oder alternativ durch Verwendung der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ geschehen. Unter Verwendung der Stammfunktion $F(x)$ berechne man weiters das **uneigentliche Integral**

$$\int_0^\infty f(x) dx.$$

Aufgabe 3 [10 Punkte]

- (a) Man gebe eine exakte Definition dafür, dass $a \in \mathbb{R}$ **Grenzwert** einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist. Man definiere weiters, wann $a \in \mathbb{R}$ **Häufungspunkt** einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.
- (b) Man formuliere den **Satz von Bolzano-Weierstraß**, der eine Aussage darüber macht, wann eine Folge einen Häufungspunkt besitzen muss.
- (c) Man gebe eine exakte Definition dafür, dass eine reelle Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig** ist an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$.
- (d) Man formuliere den **Nullstellensatz von Bolzano** für stetige Funktionen (Voraussetzungen, Aussage!) und veranschauliche den Sachverhalt in einer Skizze.

Aufgabe 4 [10 Punkte – 2 · Anzahl korrekter Antworten in Tabelle]

Man finde Antworten auf die folgenden kürzeren Aufgaben und trage diese anschließend in die Tabelle ein. Es werden für die Bewertung ausschließlich die in die Tabelle eingetragenen Werte herangezogen, Nebenüberlegungen und Rechnungen können selbstverständlich separat auf den Angabeblättern durchgeführt werden, gehen aber nicht in die Beurteilung ein! Für jede korrekte Antwort in der Tabelle gibt es zwei Punkte; es werden für inkorrekte Antworten KEINE Punkte abgezogen.

Aufgabe	Antwort
Man ermittle den Limes inferior (kleinsten Häufungspunkt) für die angegebene Folge: $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1+(-1)^n n}{n-(-1)^n}$	$\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
Man bestimme den Grenzwert für die angegebene Folge: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n^2 - n} \right)$	$\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
Man bestimme die Menge E der Extremstellen der bivariaten reellen Funktion $g(x, y) = 1 + x^2 + 2y^2 - y^4$: $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g \text{ besitzt an Stelle } (x, y) \text{ relatives Extremum}\}.$	$\subset \mathbb{R}^2$
Man bestimme die Menge S der Sattelpunkte (= stationäre Punkte, wo kein Extremum vorliegt) der Funktion $g(x, y) = 1 + x^2 + 2y^2 - y^4 :$ $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g \text{ besitzt an Stelle } (x, y) \text{ Sattelpunkt}\}.$	$\subset \mathbb{R}^2$
Man bestimme die Richtungsableitung der bivariaten reellen Funktion $f(x, y) = x^3 y^4$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ in Richtung des größten Anstiegs, also das Maximum: $\max_{\ \vec{w}\ =1} \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(-1, -1).$	$\in \mathbb{R}$