Theorieblatt zu Erzeugenden Funktionen

Mathematik 2 für Informatik

Version vom 20.01.2007, Marian Kogler

1 Frage

Was ist ein left-shift und was ist ein right-shift? Und wie setzt man die erzeugenden Funktionen ein? (Karigl Skriptum S. 32 unten)

2 Antwort

Die normale Folge einer erzeugenden Funktion sieht so aus: $x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + x_3 z^3 + ...$
Wenn wir jetzt die Funktion nach links verschieben wollen, also vorne ein weiteres Glied hinzufügen wollen, können wir jederzeit 0 addieren: $0 + x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + x_3 z^3 + ...$
Allerdings stimmen jetzt die z-Potenzen nicht mehr: wir haben zwei Glieder mit z^0, also müssen wir jetzt mit z multiplizieren: $0 + x_0 z^1 + x_1 z^2 + x_2 z^3 + x_3 z^4 + ...$ und wir haben wieder eine korrekte erzeugende Funktion. Dies nennt man einen **left shift**.
Gehen wir jetzt zur normalen Folge zurück: $x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + x_3 z^3 + ...$
Wenn wir jetzt die Funktion nach rechts verschieben wollen, also hinten ein weiteres Glied hinzufügen wollen, ziehen wir einfach x_0 ab: $x_1 z + x_2 z^2 + x_3 z^3 + ...$
Allerdings stimmen jetzt die z-Potenzen nicht mehr: wir haben kein Glied mit z^0 (wobei $z^0 = 1$, wie jeder Ausdruck hoch 0), also müssen wir jetzt durch z dividieren: $x_1 + x_2 z + x_3 z^2 + ...$ und wir haben wieder eine korrekte erzeugende Funktion. Dies nennt man einen **right shift**.
Nennen wir jetzt die obige Funktion $x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + x_3 z^3 + ...$, also $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ X(z), können wir die Shifts so definieren:
$X(z)$ ist die normale erzeugende Funktion. Für den left shift addieren wir 0 (dies müssen wir natürlich nicht anschreiben), und wir multiplizieren mit z, also $z \cdot X(z)$. Für den right shift subtrahieren wir x_0 und wir dividieren durch z, siehe oben, also $\frac{X(z)-x_0}{z}$.
Jetzt zu dem Beispiel: Wir gehen von $x_{n+1} = 3x_n - \frac{1}{2}$ aus.
$x_{n+1} z^{n+1} = 3x_n z^{n+1} - \frac{1}{2} z^{n+1}$ (Multiplikation mit z^{n+1})
$z \cdot x_{n+1} z^n = 3z \cdot x_n z^n - \frac{1}{2} z \cdot z^n$ (Herausheben von z, damit wir als Index bzw. Potenz n statt $n+1$ erhalten; dies ist für die erzeugende Funktion wichtig)
$z \sum x_{n+1} z^n = 3z \sum x_n z^n - \frac{1}{2} z \sum z^n$ (Hier machen wir aus allen Ausdrücken mit x und/oder z eine Summe, um nachher die erzeugenden Funktionen einzusetzen)
$z \sum x_{n+1} z^n = 3z \sum x_n z^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{1-z}$ (Geometrische Reihe: $\sum z^n$ ist nichts anderes als $\frac{1}{1-z}$, wir müssen hier keine erzeugende Funktion einsetzen, da x fehlt.)
$z \frac{X(z)-x_0}{z} = 3z \cdot X(z) - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{1-z}$ (Einsetzen der erzeugenden Funktionen. Da die Summe bei der Funktion auf der linken Seite bis $n+1$ geht, müssen wir einen right shift der Funktion durchführen, siehe oben)
$X(z) - x_0 = 3z \cdot X(z) - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{1-z}$ (Kürzen auf der linken Seite)