7. Übung - Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

Felix Knorr (1325541) - e1325541@student.tuwien.ac.at

14. Dezember 2014

1. Die Übergangsmatrix einer Markovkette mit 3 Zuständen ist

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die t-stufige Übergangsmatrix $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \to \infty$

(a) Charakteristisches Polynom:

$$\det(P - \lambda E) = \det \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2-\lambda & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2-\lambda \end{vmatrix} = (\frac{1}{2} - \lambda)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 3 \cdot \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \lambda\right) =$$

$$= -\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{9}{16}\lambda + \frac{1}{16}$$

(b) Eigenwerte berechnen:

$$-\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{9}{16}\lambda + \frac{1}{16} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{9}{16}\lambda - \frac{1}{16} = 0$$

$\Rightarrow$ Ein Eigenwert ist immer 1 $\Rightarrow \lambda_1 = 1$, da Polynom dritten Grades $\Rightarrow$ Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrr}
 & \lambda^3 & - & \frac{3}{2}\lambda^2 & + & \frac{9}{16}\lambda & - & \frac{1}{16} & \div & (\lambda-1) & = & \lambda^2 & - & \frac{1}{2}\lambda & + & \frac{1}{16} \\
- & \lambda^3 & + & \lambda^2 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & - & \frac{1}{2}\lambda^2 & + & \frac{9}{16}\lambda & - & \frac{1}{16} & & & & & & & & \\
 & & + & \frac{1}{2}\lambda^2 & - & \frac{1}{2}\lambda & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & \frac{1}{16}\lambda & - & \frac{1}{16} & & & & & & & & \\
 & & & & - & \frac{1}{16}\lambda & + & \frac{1}{16} & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & 0\ R & & & & & & & &
\end{array}$$

Daraus folgt:

$$\lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{9}{16}\lambda - \frac{1}{16} = (\lambda - 1)\underbrace{(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16})}_{=0}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{16}}}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{Doppellösung}$$

(c) Eigenvektoren bestimmen

$$\begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2-\lambda & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor für $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} II + \frac{1}{2}I, \\ III + \frac{1}{2}I \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -3/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 3/8 & -3/8 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow III + II \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -3/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{lll} -3/8x_2+3/8x_3=0 & \Rightarrow & x_2=x_3 \\ -1/2x_1+1/4x_3=0 & \Rightarrow & x_1=x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor für $\lambda = 1/4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} II-I, \\ III-I \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\tfrac{1}{4}x_1+\tfrac{1}{4}x_2+\tfrac{1}{4}x_3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-x_3-x_2 \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x_3-x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit sind die Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit lautet die Matrix der Eigenvektoren S:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix S^{-1} berechnet sich folgendermaßen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} III+I \\ +II \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow I+II \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} II-1/3I \\ I-2/3II \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} I\cdot(-1) \\ III\cdot 1/3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Somit ist S^{-1}:

$$S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Insgesamt:

$$A^n = S \cdot diag(\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n) \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1/4)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -(1/4)^n & -(1/4)^n & 1^n \\ 0 & (1/4)^n & 1^n \\ (1/4)^n & 0 & 1^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1/4)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1/4)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1/4)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1/4)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1/4)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1/4)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1/4)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1/4)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1/4)^n \end{pmatrix}$$

(e) Grenzwert berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

2. Zeigen Sie: wenn i rekurrent ist und j ein Nachfolger von i, dann ist auch i Nachfolger von j.

   Rekurrent bedeutet, dass

$$\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1$$

   j ist Nachfolger von i, wenn

$$\exists t > 0 \ : \ p_{i,j} > 0$$

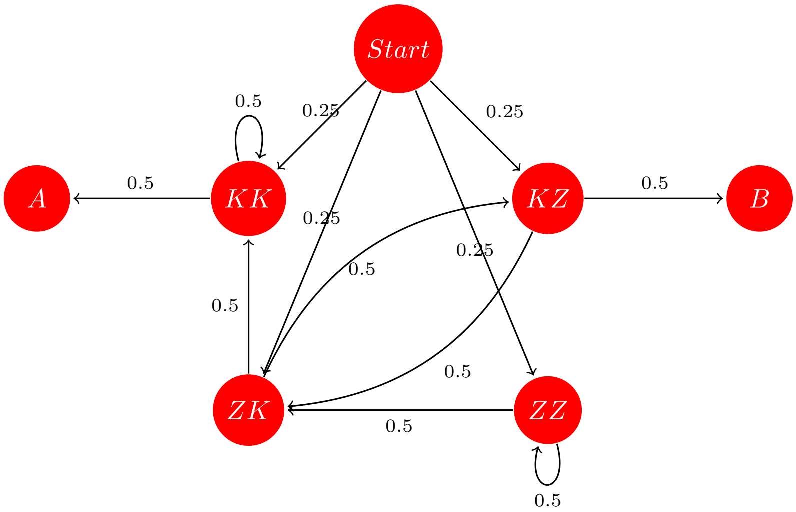
Angenommen i ist kein Nachfolger j, dann

$$\nexists t > 0 \ : \ p_{j,i} > 0$$

Dann kann aber i nicht rekurrent sein, da man über j nicht mehr nach i gelangt:

$$\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) \neq 1$$

3. Spieler A und B spielen folgendes Spiel: eine Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal "KKZ" oder 'KZZ" erscheint; im ersten Fall gewinnt A, im zweiten B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt.



Zustandsraum $M = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

Interessant ist die Wahrscheinlichkeit in einer bestimmten Teilmenge T des Randes R absorbiert zu werden ($T \subset R$). Um dieses Problem für jeden Startzustand zu lösen, wird M auf eine "Wahrscheinlichkeitsfunktion" $e_i \to p_i$ und eine "Mittelwertsfunktion" $e_i \to m_i$ definiert, wobei p_i, die Wahrscheinlichkeit ist, von e_i aus in $T \subset R$ absorbiert zu werden und m_i die mittlere Dauer der Irrfahrt von e_i aus bis zur Absorption in R ist.

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot p_k \qquad \forall e_i \in M \setminus R \qquad \big(p_i = 1 \ \forall e_i \in T; \quad p_i = 0 \ \forall e_i \in R \setminus T\big)$$

$$m_i = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot m_k \qquad \forall e_i \in M \setminus R \qquad \big(m_i = 0 \ \forall e_i \in R\big)$$

Gesucht, dass Zustand A absorbiert, daher ist $p_A = 1$ und $p_B = 0$

$$\begin{aligned}
p_A &= 1 \\
p_B &= 0 \\
p_{KK} &= 1/2 p_{KK} + 1/2 p_A \\
p_{KZ} &= 1/2 p_{ZK} + p_B \\
p_{ZK} &= 1/2 p_{KZ} + 1/2 p_{KK} \\
p_{ZZ} &= 1/2 p_{ZK} + 1/2 p_{ZZ} \\
p_{Start} &= 1/4 p_{KK} + 1/4 p_{KZ} + 1/4 p_{ZK} + 1/4 p_{ZZ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{KK} &= 1 \\
p_{KZ} &= 1/2 p_{ZK} = 1/3 \\
p_{ZK} &= 1/2 p_{KZ} + 1/2 p_{KK} \Rightarrow 3/4 p_{ZK} = 1/2 \Rightarrow p_{ZK} = 4/6 = 2/3 \\
p_{ZZ} &= 1/2 p_{ZK} + 1/2 p_{ZZ} \Rightarrow p_{ZZ} = p_{ZK} = 2/3 \\
p_{Start} &= 1/4 + 1/12 + 2/12 + 2/12 = 8/12 = 2/3
\end{aligned}$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A gewinnt 2/3 (und demensprechend die, dass Spieler B gewinnt 1/3)

4. Bestimmen Sie im vorigen Beispiel die mittlere Spieldauer.

$$\begin{aligned}
m_A &= 0\\
m_B &= 0\\
m_{KK} &= 1 + 1/2m_{KK} + 1/2m_A\\
m_{KZ} &= 1 + 1/2m_{ZK} + p_B\\
m_{ZK} &= 1 + 1/2m_{KZ} + 1/2m_{KK}\\
m_{ZZ} &= 1 + 1/2m_{ZK} + 1/2m_{ZZ}\\
m_{Start} &= 2 + 1/4m_{KK} + 1/4m_{KZ} + 1/4m_{ZK} + 1/4m_{ZZ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{KK} &= 1 + 1/2m_{KK} = 2\\
m_{KZ} &= 1 + 1/2m_{ZK} = 8/3\\
m_{ZK} &= 1 + 1/2m_{KZ} + 1 = 2 + 1/2 + 1/4m_{ZK} \Rightarrow m_{ZK} = 10/3\\
m_{ZZ} &= 1 + 10/6 + 1/2m_{ZZ} \Rightarrow m_{ZZ} = 16/3\\
m_{Start} &= 2 + 2/4 + 8/12 + 10/12 + 16/12 = 64/12 = 16/3
\end{aligned}$$

5. Eine Markovkette mit drei Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.7 & 0.2\\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die t-stufige Übergangsmatrix $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \to \infty$

(a) Eigenwerte bestimmen:

$$\lambda_1 = 0.4 \qquad \lambda_2 = 0.6 \qquad \lambda = 1$$

(b) Eigenvektoren bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1\\ -5\\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Matrix der Eigenvektoren S:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1\\ -5 & 1 & 1\\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Inverse S^{-1} bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/12 & 1/12\\ -1/4 & 1/8 & 1/8\\ 1/4 & 11/24 & 7/24 \end{pmatrix}$$

(e) A^n berechnen ($A^n = S \cdot diag(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_n^n)$)

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1\\ -5 & 1 & 1\\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0.4)^n & 0 & 0\\ 0 & (0.6)^n & 0\\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/12 & 1/12\\ -1/4 & 1/8 & 1/8\\ 1/4 & 11/24 & 7/24 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/4 + 3/4(0.6)^n & 11/24 - 1/12(0.4)^n - 3/8(0.6)^n & 7/24 + 1/12(0.4)^n - 3/8(0.6)^n\\ 1/4 - 1/4(0.6)^n & 11/24 + 5/12(0.4)^n + 1/8(0.6)^n & 7/24 - 5/12(0.4)^n + 1/8(0.6)^n\\ 1/4 - 1/4(0.6)^n & 11/24 - 7/12(0.4)^n + 1/8(0.6)^n & 7/24 + 7/12(0.4)^n + 1/8(0.6)^n \end{pmatrix}$$

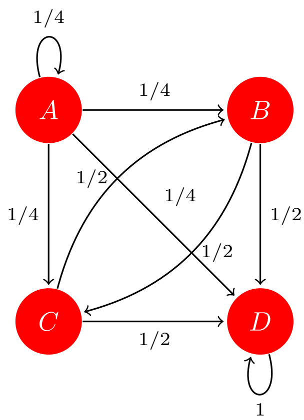
(f) Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1/4+3/4(0.6)^n & 11/24-1/12(0.4)^n-3/8(0.6)^n & 7/24+1/12(0.4)^n-3/8(0.6)^n\\ 1/4-1/4(0.6)^n & 11/24+5/12(0.4)^n+1/8(0.6)^n & 7/24-5/12(0.4)^n+1/8(0.6)^n\\ 1/4-1/4(0.6)^n & 11/24-7/12(0.4)^n+1/8(0.6)^n & 7/24+7/12(0.4)^n+1/8(0.6)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 11/24 & 7/24\\ 1/4 & 11/24 & 7/24\\ 1/4 & 11/24 & 7/24 \end{pmatrix}$$

6. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Klassen von kommunizierenden Zuständen, die Absorptionswahrscheinlichekieten und die mittleren Absorptionszeiten für die einzelnen Zustände.



Die Klassen kommunizierender Zustände sind:

$$\{A\}, \{B, C\}, \{D\}$$

Absorptionswahrscheinlichkeit:

$$a_i = \sum_j P_{ij} \cdot a_i$$

$$\begin{aligned}
a_A &= 1/4a_A + 1/4a_B + 1/4a_C + 1/4a_D \\
a_B &= 1/2a_C + 1/2a_D \\
a_C &= 1/2a_B + 1/2a_D \\
\mathbf{a_D} &= \mathbf{1} \quad \text{Definition}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_C = 1/2a_B + 1/2 \Rightarrow a_B = 1 \Rightarrow \mathbf{a_C = 1} \\
&a_B = 1/2(1/2a_B + 1/2) + 1/2 \Rightarrow 3/4a_B = 3/4 \Rightarrow \mathbf{a_B = 1} \\
&a_A = 1/4a_A + 1/4 + 1/4 + 1/4 \Rightarrow 3/4a_A = 3/4 \Rightarrow \mathbf{a_A = 1}
\end{aligned}$$

Absorptionszeiten:

$$m_i = 1 + \sum_j p_{ij} \cdot m_j$$

$$\begin{aligned}
m_A &= 1 + 1/4m_A + 1/4m_B + 1/4m_C + 1/4m_D \\
m_B &= 1 + 1/2m_C + 1/2m_D \\
m_C &= 1 + 1/2m_B + 1/2m_D \\
\mathbf{m_D} &= \mathbf{0} \quad \text{Definition}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&m_C = 1 + 1/2m_B \Rightarrow m_B = 2 \Rightarrow \mathbf{m_C = 2} \\
&m_B = 1 + 1/2(1 + 1/2m_B) \Rightarrow 3/4m_B = 3/2 \Rightarrow \mathbf{m_B = 2} \\
&m_A = 1 + 1/4m_A + 1/2 + 1/2 \Rightarrow 3/4m_A = 2 \Rightarrow \mathbf{m_A = 8/3}
\end{aligned}$$

7. Eine Markovkette hat die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i,i+2} = p, \; p_{i,i-1} = q = 1 - p, \; i \in \mathbb{Z}$$

Wann ist diese Kette rekurrent? (überlegen Sie, dass die Differenzen $X(t+1) - X(t)$ unabhängig sind. Damit $X(t) = X(0)$ ist, müssen doppelt so viele Schritte nach unten gemacht worden sein, wie nach oben. Damit kann man $p_{ii}(t)$ bestimmen)

$$p_{ii} = \begin{cases} 0 & t \mod 3 \neq 0 \\ \binom{t}{t/3} p^{\frac{t}{3}} (1-p)^{\frac{2t}{3}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$p_{ii} = \frac{t!}{\left(\frac{t}{3}\right)! \left(\frac{2t}{3}\right)!} p^{\frac{t}{3}} (1-p)^{\frac{2t}{3}} \approx \frac{\sqrt{2\pi t}\left(\frac{t}{e}\right)^t}{\sqrt{2\pi\frac{t}{3}}\left(\frac{t}{3e}\right)^{\frac{t}{3}} \sqrt{4\pi\frac{t}{3}}\left(\frac{4t}{3e}\right)^{\frac{2t}{3}}} p^{\frac{t}{3}} (1-p)^{\frac{2t}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{\pi t}} \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{t}{3}} p^{\frac{t}{3}} (1-p)^{\frac{2t}{3}} =$$

$$\frac{3}{2\sqrt{\pi t}} \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{t}{3}} \left(\underbrace{p(1-p)^2}_{=\frac{4}{27}}\right)^{\frac{t}{3}}$$

Gleichung Lösen:

$$p(1-p)^2 = \frac{4}{27} \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{1}{3} \qquad \left(p_2 = \frac{4}{3}\right)$$

Somit:

$$p_{ii} = \frac{3}{2\sqrt{\pi t}}$$

und damit:

$$p_{il}(t) = \sum_{t>0} \frac{3}{2\sqrt{\pi t}} = \infty \quad \text{Harmonische Reihe}$$