Analysis I Übung - Blatt 1, für den 11. 10. 2016

1. Sei $M := \{1, 2, 3\}$ und $\mathbb{B} := \{f, w\}$. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen

   (a) Elemente von M und $\mathbb{B}$
   Lsg.: Wir bezeichnen mit $|A|$ die Anzahl an Elementen der Menge A. Dann gilt $|M| = 3$, sowie $|\mathbb{B}| = 2$.

   (b) Elemente von $M \times M$
   Lsg.: Das kartesische Produkt $A \times B$ zweier Mengen $A = \{a_1, \dots a_n\}$ und $B = \{b_1, \dots b_m\}$ ist via $A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$, bzw.
   $A \times B = \{\underbrace{(a_1, b_1), \dots, (a_1, b_m)}_{m-\text{Elemente}}, \underbrace{(a_2, b_1), \dots, (a_2, b_m)}_{m-\text{Elemente}}, \dots, \underbrace{(a_n, b_1), \dots (a_n, b_m)}_{m-\text{Elemente}}\}$ definiert.
   Also gilt $|A \times B| = mn$, sowie $|M \times M| = 9$.

   (c) Teilmengen von M und $\mathbb{B}$
   Lsg.: Die Anzahl an Teilmengen einer Menge A ist durch $2^{|A|}$ gegeben. Das kann folgendermaßen überlegt werden: Angenommen eine Menge A mit k Elementen habe n Teilmengen. Die Menge $B := A \cup \{a_{k+1}\}$ wobei $a_{k+1} \notin A$ hat als Teilmengen genau die Teilmengen der Menge A selbst, als auch die Teilmengen von A vereinigt mit dem neuen Element a_{k+1}. Das Hinzufügen eines Elements verdoppelt also die Anzahl an Teilmengen. Betrachtet man nun die Menge $A_1 = \{a_1\}$ mit einem Element, so besitzt diese 2 Teilmengen: $\emptyset$, $\{a_1\}$. Nach obiger Überlegung besitzt demnach eine Menge mit zwei Elementen $2 \cdot 2 = 4 = 2^2$ Teilmengen. Für drei Element erhalten wir $4 \cdot 2 = 8 = 2^3$ Teilmengen...
   Angewandt auf die Mengen M und $\mathbb{B}$ liefert das $2^3 = 8$ Teilmengen für die Menge M, sowie $2^2 = 4$ Teilmengen für die Menge $\mathbb{B}$.

   (d) Abbildungen von M nach $\mathbb{B}$
   Lsg.: Für das erste Element von M kommen 2 Bilder in Frage, f oder w. Ebenso hat man zwei Möglichkeiten dem zweiten und dritten Element von M einen Wert zuzuweisen. Das liefert $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ verschiedene Abbildungen. Allgemein berechnet sich die Anzahl verschiedener Abbildungen $g : A \to B$ zu $|B|^{|A|}$.

   (e) Abbildungen von M nach M
   Lsg.: Nach (d) gilt $|\{f : M \to M\}| = 3^3 = 27$.

   (f) Abbildungen von $M \times M$ nach M
   Lsg.: Nach (d) gilt $|\{f : M \times M \to M\}| = 3^9 = 19683$.

   (g) surjektiven Abbildungen von M nach $\mathbb{B}$
   Lsg.: Wir wissen, dass die Anzahl an Abbildungen von M nach $\mathbb{B}$ durch $2^3 = 8$ gegeben ist. Eine nicht konstante Abbildung muss mindestens zwei unterschiedliche Werte in $\mathbb{B}$ treffen, da $\mathbb{B}$ nur aus zwei Elementen besteht, ist so eine Abbildung schon surjektiv. Andererseits sind die konstanten Abbildungen nicht surjektiv. Da $|\mathbb{B}| = 2$ gibt es genau 2 konstante Abbildungen. Somit bleiben $8 - 2 = 6$ surjektive Abbildungen übrig.

(h) injektiven Abbildungen von $\mathbb{B}$ nach M
Lsg.: Die gesamte Anzahl an Abbildungen ist durch $3^2 = 9$ gegeben. Eine nicht konstante Abbildung g muss mindestens zwei unterschiedliche Werte in M annehmen, da nur zwei Elemente abgebildet werden bedeutet das $g(w) \neq g(f)$. D.h. $w \neq f \Rightarrow g(w) \neq g(f)$ ist eine wahre Aussage, so eine Abbildung is also injektiv. Konstante Abbildungen sind nicht injektiv, da stets $g(w) = g(f) \wedge f \neq w$ gilt. Nun gibt es 3 konstante Abbildungen, somit bleiben $9 - 3 = 6$ injektive Abbildungen übrig.

2. Verifizieren Sie die beiden Distributivgesetze der Aussagenlogik:

$$\begin{aligned} A \wedge (B \vee C) &\equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) &\equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned}$$

Lsg.: Wie in der Vorlesung gezeigt arbeiten wir hier mit Wahrheitstafeln:

A	B	C	$(B \vee C)$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B)$	$(A \wedge C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
f	f	f	f	f	f	f	f
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	w	w	f	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w

A	B	C	$(B \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B)$	$(A \vee C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
f	f	f	f	f	f	f	f
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	w	w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w

Ein Vergleich der fünften und letzten Spalte zeigt die Gültigkeit des Distributivgesetzes.

3. Seien X und Y Mengen, und $A(.,.)$ eine Aussageform auf $X \times Y$. Man zeige

$$\exists\, y \in Y : \forall\, x \in X : A(x,y) \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in X : \exists\, y \in Y : A(x,y)$$

Gilt auch die Umkehrung ?

Lsg.: Die einzige Möglichkeit eine falsche Aussage bei einer Implikation $A \Rightarrow B$ zu erhalten ist, dass die Aussage A wahr und die Aussage B falsch ist. Diesen Fall müssen wir also ausschließen. (Indem wir zeigen, dass wenn die Aussage A wahr ist, dass dann auch die Aussage B wahr ist.) Sei also die Aussage $\exists\, y \in Y : \forall\, x \in X : A(x,y)$ wahr. Wir bezeichnen eines der obigen $y's$ mit y_0. Mit diesem y_0 ist also $\forall\, x \in X : A(x, y_0)$ eine wahre Aussage, und demnach ist auch $\forall\, x \in X : \exists\, y \in Y : A(x,y)$ wahr. Der einzige Fall eine falsche Implikation zu erhalten ist somit ausgeschlossen und die Behauptung gezeigt.

Die Umkehrung gilt nicht. Dazu basteln wir ein Gegenbeispiel. Wir setzen $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$. Der Aussageform ordnen wir die Werte w und f via $A(x_1, y_1) \equiv A(x_2, y_2) \equiv$ w und $A(x_1, y_2) \equiv A(x_2, y_1) \equiv$ f zu. Somit existiert für x_1 ein $y \in Y$ (nämlich y_1), sodass $A(x_1, y)$, analog finden wir zu x_2 so ein y (nämlich y_2), Die Aussage $\forall\, x \in X : \exists\, y \in Y : A(x,y)$ ist also wahr. Allerdings gilt weder $A(x_1, y_1) \equiv$ w und $A(x_2, y_1) \equiv$ w, noch $A(x_1, y_2) \equiv$ w und $A(x_2, y_2) \equiv$ w, $\exists\, y \in Y : \forall\, x \in X : A(x,y)$ ist falsch, die Implikation in die andere Richtung gilt nicht.

4. Sei $\mathcal{S}$ die Menge der Studenten, und $\mathcal{A}$ die Menge der Aufgaben. Sei L eine Aussageform auf $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$, wobei

$$L(S, A) \equiv \text{ Student S hat Aufgabe A gelöst .}$$

Formulieren Sie mittels Quantoren:

(a) Es gibt einen Studenten, der/die alle Aufgaben gelöst hat.

(b) Es gibt eine Aufgabe, die kein Student gelöst hat.

Negieren Sie die Aussagen, und formen diese um sodass die Quantoren vorab stehen. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lsg.: Die Aussagen in Quantorenform ergeben sich zu

$$\exists\, S \in \mathcal{S} : \forall A \in \mathcal{A} : L(S, A),$$

bzw.

$$\exists\, A \in \mathcal{A} : \neg(\exists S \in \mathcal{S} : L(S, A)) \equiv \exists\, A \in \mathcal{A} : \forall S \in \mathcal{S} : \neg L(S, A)$$

Für die Negation der ersten Aussage erhält man

$$\begin{aligned} \neg(\exists\, S \in \mathcal{S} : \forall A \in \mathcal{A} : L(S, A)) &\equiv \forall\, S \in \mathcal{S} : \neg(\forall A \in \mathcal{A} : L(S, A)) \\ &\equiv \forall\, S \in \mathcal{S} : \exists A \in \mathcal{A} : \neg L(S, A), \end{aligned}$$

und lässt sich als "Jeder Student hat mindestens eine Aufgabe nicht gelöst" interpretieren. Die Negation der zweiten Aussage führt zu

$$\begin{aligned}\neg(\exists\, A \in \mathcal{A} : \forall S \in \mathcal{S} : \neg L(S,A)) &\equiv \forall\, A \in \mathcal{A} : \neg(\forall S \in \mathcal{S} : \neg L(S,A)) \\ &\equiv \forall\, A \in \mathcal{A} : \exists S \in \mathcal{S} : L(S,A),\end{aligned}$$

und lässt sich als "Jede Aufgabe ist von mindestens einem Studenten gelöst worden" interpretieren.

5. Geben Sie Wertetabellen für die Rechenoperationen $+, \times, -, (\ )^{-1}$ für einen Körper mit Elementen $\{0, 1, 2, 3\}$ an. Es seien $n = 0$ und $e = 1$ die neutralen Elemente bzgl $+$ und $\times$. Zeigen Sie, dass die Körperaxiome für Ihre Rechenregeln erfüllt sind.
Hinweis: Nicht immer klappt die erste Idee.
Lsg.: Aufgrund der Eigenschaften der 0 und der 1 lassen sich vorab folgende Einträge fixieren:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1			
2	2			
3	3			

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

Da jedes Element des Körpers ein eindeutiges Inverses Element besitzt, findet sich in beiden Tabellen in jeder Zeile und Spalte genau einmal das neutrale Element. Weiters halten wir fest, dass sowohl in der Multiplikations- als auch in der Additionstabelle in jeder Zeile und Spalte jedes Element des Körpers genau einmal vorkommen muss. (Wäre z.B. $1 + 2 = 3 \wedge 1 + 3 = 3 \Rightarrow 2 = 3$). Also fehlen in der Multiplikationstabelle in Zeile 3 noch 1 und 3. Wir sehen, dass $2 \cdot 3 = 3$ allerdings zu zwei 3ern in der vierten Spalte führen würde und können die Multiplikationstabelle unter Berücksichtigung der Symmetrie zu

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

vervollständigen.
Für die Additionstabelle gehen wir schrittweise vor. Angenommen es wäre $1 + 3 = 0$, dann gilt:

$$0 = 2 \cdot 0 = 2(1 + 3) \overset{K3}{=} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 2 + 1.$$

Damit wäre also gleichzeitig auch $1 + 2 = 0$, 1 hätte damit 2 Inverse: 2 und 3. Analog dazu sieht man auch, dass die Annahme $1 + 2 = 0$ implizieren würde, dass auch $1 + 3 = 0$ ist. Der 0-er in der zweiten Zeile muss also das Ergebnis von 1+1 sein. Aus $1 + 1 = 0$ ergibt sich mittels Distributivgesetz

$$3+3 = 3\cdot 1+3\cdot 1 \overset{\text{K3}}{=} 3\cdot(1+1) = 3\cdot 0 = 0 \qquad 2+2 = 2\cdot 1+2\cdot 1 \overset{\text{K3}}{=} 2\cdot(1+1) = 2\cdot 0 = 0$$

und die Additionstabelle sieht nun folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{c||cccc}
+ & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline\hline
0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 1 & 0 & & \\
2 & 2 & & 0 & \\
3 & 3 & & & 0
\end{array}$$

In Zeile 2 fehlen noch 2 und 3. Berücksichtigt man wieder, dass kein Element 2 mal pro Spalte stehen darf, erhält man

$$\begin{array}{c||cccc}
+ & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline\hline
0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\
2 & 2 & 3 & 0 & \\
3 & 3 & 2 & & 0
\end{array}\ .$$

In der dritten Zeile steht noch keine 1, die Tabelle lässt sich nun vervollständigen zu

$$\begin{array}{c||cccc}
+ & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline\hline
0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\
2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
3 & 3 & 2 & 1 & 0
\end{array}\ .$$

Damit ergeben sich die Tabellen für $-$ und $(\ )^{-1}$:

$$\begin{array}{c||c}
x & -x \\
\hline\hline
0 & 0 \\
1 & 1 \\
2 & 2 \\
3 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c||c}
x & x^{-1} \\
\hline\hline
0 & - \\
1 & 1 \\
2 & 3 \\
3 & 2
\end{array}$$

Es ist zu diesem Zeitpunkt natürlich noch nicht klar, ob $(\{0, 1, 2, 3\}, +, \cdot)$ tatsächlich die Körperaxiome K1-K5 erfüllen. Diese sind nachzurechnen! Alternativ dazu können Sie k3.cpp zu k4.cpp erweitern und dem Computer die Rechenarbeit überlassen.

6. Seien X, Y, Z Mengen, und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ surjektive Funktionen.

   Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt surjektiv genau dann wenn

$$\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X : f(x) = y$$

   Beweisen Sie, dass damit auch die zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ surjektiv (nach dieser Definition) ist.
   Lsg.: Es gilt

$$g \circ f : \begin{cases} X \to Z \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases} .$$

   Um zu zeigen dass diese Funktion surjektiv ist, wählen wir ein beliebiges $z \in Z$ und zeigen, dass es ein Element $x_z \in X$ gibt mit: $(g \circ f)(x_z) = z$. Da wir z dabei beliebig halten ergibt sich diese Tatsache dann für alle $z \in Z$ und die Surjektivität folgt.
   Sei also $z \in Z$ beliebig. Da $g : Y \to Z$ surjektiv ist, findet sich ein $y_z \in Y$ mit $g(y_z) = z$. Ebenso findet sich zu $y_z \in Y$ ein $x_{y_z} \in X$ mit $f(x_{y_z}) = y_z$, aufgrund der Surjektivität von f. Wendet man auf dieses x_{y_z} die Funktion $g \circ f$ an, erhält man

$$(g \circ f)(x_{y_z}) = g(\underbrace{f(x_{y_z})}_{=y_z}) = g(y_z) = z,$$

   also gilt $\exists\, x \in X : (g \circ f)(x) = z$. Da $z \in Z$ beliebig war folgt $\forall\, z \in Z : \exists\, x \in X : (g \circ f)(x) = z$ und damit die Surjektivität von $g \circ f$ nach obiger Definition.

7. Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei das offene Intervall $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, und das abgeschlossene Intervall $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$I_n := (-1, 1 + \tfrac{1}{n}) \qquad \text{und} \qquad J_n := [0, 1 - \tfrac{1}{n}]$$

   Bestimmen Sie

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$$

   Hinweis: Bestimmen Sie dazu welche Punkte in der Lösungsmenge sind, und welche nicht.
   Lsg.: Wir behaupten, dass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = (-1, 1] \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = [0, 1)$$

   gilt. Wir zeigen zuerst die linke Aussage. Zuerst wählen wir ein beliebiges $x \in (-1, 1]$, d.g.:

$$-1 < x \leq 1 \Rightarrow -1 < x \leq 1 < 1 + \tfrac{1}{n}\, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in I_n\, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n,$$

d.h. $(-1,1] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Wir wählen $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ beliebig, d.g.:

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow x \in I_n \,\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow -1 < x < 1 + \tfrac{1}{n} \,\forall n \in \mathbb{N} \overset{(1)}{\Rightarrow} -1 < x \leq 1.$$

Die obige Kette zeigt, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset (-1,1]$, beide Teilmengenrelationen gemeinsam zeigen, dass $(-1,1] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Der letzte mit (1) gekennzeichnete Schritt kann wie folgt bewiesen werden (Widerspruchsbeweis, reductio ad absurdum): Wir zeigen, dass die negierte Aussage stets in einer Kontradiktion endet. Die negierte Aussage erhalten wir als

$$\begin{aligned} \neg(-1 < x \wedge \forall n \in \mathbb{N} : x < 1 + \tfrac{1}{n} \ \Rightarrow -1 < x \wedge x \leq 1) &\equiv \\ -1 < x \wedge \forall n \in \mathbb{N} : x < 1 + \tfrac{1}{n} \ \wedge (x \leq -1 \vee x > 1) &\overset{\text{Bsp. 2}}{\equiv} \\ \underbrace{(-1 < x \wedge \forall n \in \mathbb{N} : x < 1 + \tfrac{1}{n} \ \wedge x \leq -1)}_{\equiv \mathrm{f}} &\vee \\ (-1 < x \wedge \forall n \in \mathbb{N} : x < 1 + \tfrac{1}{n} \ \wedge x > 1). \end{aligned}$$

Um den Wahrheitswert der letzten Klammer zu bestimmen formen wir um: Wegen $x > 1$ gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : x < 1 + \tfrac{1}{n} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x - 1 < \tfrac{1}{n} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : n < \tfrac{1}{x-1}.$$

Damit wäre aber $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, eine falsche Aussage.
Nun betrachten wir die Vereinigung. Für ein beliebiges $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ gilt:

$$\exists n \in \mathbb{N} : x \in J_n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 1 - \tfrac{1}{n} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 - \tfrac{1}{n} < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1,$$

also ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \subset [0,1)$. Sei nun $x \in [0,1)$ beliebig, d.g.:

$$0 \leq x < 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \exists\, n \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 1 - \tfrac{1}{n} \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : x \in J_n \Rightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n,$$

also gilt auch $[0,1) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Den Teilschritt (2) zeigt man ähnlich wie (1): Angenommen die Implikation sei falsch, dann ist ihre Negation wahr, diese ist

$$\begin{aligned} 0 \leq x \wedge x < 1 \wedge (x < 0 \vee \forall n \in \mathbb{N} : x > 1 - \tfrac{1}{n}) &\overset{\text{Bsp. 2}}{\equiv} \\ \underbrace{(0 \leq x \wedge x < 1 \wedge x < 0)}_{\equiv \mathrm{f}} \vee (0 \leq x \wedge x < 1 \wedge \forall n \in \mathbb{N} : x > 1 - \tfrac{1}{n}).& \end{aligned}$$

Den Wahrheitswert der letzten Klammer ermitteln wir wieder durch Umformen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : x > 1 - \tfrac{1}{n} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \tfrac{1}{n} > 1 - x \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \tfrac{1}{x-1} > n.$$

Wir erhalten wieder den Widerspruch "$\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt". Wie zuvor liefern die beiden gefundenen Teilmengenrelationen die Gleichheit der beiden Mengen.

8. Auf $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren wir die Rechenoperationen

$$\begin{aligned}(a,b) \oplus (c,d) &:= (a+c, b+d)\\ (a,b) \otimes (c,d) &:= (ac-bd, ad+bc)\end{aligned}$$

Bestimmen Sie neutrale Elemente n und e bezüglich $\oplus$ und $\otimes$. Definieren Sie eine $\ominus$ und eine $(\cdot)^{-1}$ Funktion um M zu einem Körper zu ergänzen. Definieren Sie $i := (0,1)$. Was ergibt $i \otimes i$? Hinweis: Ein Vergleich mit komplexen Zahlen kann die Idee für $(\cdot)^{-1}$ liefern.
Lsg.: Wir definieren zuerst neutrale Elemente bez. $\oplus$ und $\otimes$:

$$n := (0,0) \qquad e := (1,0).$$

Mit dieser Wahl gilt

$$\begin{aligned}(a,b) \oplus n = (a,b) \oplus (0,0) := (a+0, b+0) = (a,b), \quad \forall\,(a,b) \in M \quad \text{bzw.}\\ (a,b) \otimes e = (a,b) \oplus (1,0) := (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a,b), \quad \forall\,(a,b) \in M\end{aligned}$$

Damit ist K4 aus Definition 2.1 (Skript, S. 12) erfüllt. Nun bestimmen wir die inversen Funktionen. Wir definieren die Funktion

$$\ominus := \begin{cases} M \to M \\ (a,b) \mapsto \ominus(a,b) := (-a,-b) \end{cases}$$

und berechnen nun für beliebiges $(a,b) \in M$:

$$(a,b) \oplus (\ominus(a,b)) = (a,b) \oplus (-a,-b) := (a+(-a), b+(-b)) = (0,0) = n$$

Ebenso definieren wir die Funktion

$$(\cdot)^{-1} := \begin{cases} M \setminus \{n\} \to M \\ (a,b) \mapsto (a,b)^{-1} := \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) \end{cases} .$$

Wir bemerken, dass für $(a,b) \in M \setminus \{n\}$ gilt: $a \neq 0 \vee b \neq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{a^2+b^2} \in \mathbb{R} \wedge -\frac{b}{a^2+b^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow (a,b)^{-1} \in M$ und damit ist die Abbildung $(\cdot)^{-1}$ wohldefiniert. Wir berechenen wie zuvor für beliebiges $(a,b) \in M$:

$$\begin{aligned}(a,b) \otimes (a,b)^{-1} &= (a,b) \otimes \left(\tfrac{a}{a^2+b^2}, -\tfrac{b}{a^2+b^2}\right)\\ &:= \left(a\tfrac{a}{a^2+b^2} - b(-\tfrac{b}{a^2+b^2}), a(-\tfrac{b}{a^2+b^2}) + b\tfrac{a}{a^2+b^2}\right) = (1,0) = e\end{aligned}$$

Die letzten beiden Rechnungen zeigen, dass auch K5 aus Definition 2.1 erfüllt ist. Weiters setzen wir $i := (0,1)$ und berechnen $i \otimes i$:

$$i \otimes i = (0,1) \otimes (0,1) := (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0).$$

Abschließend sei erwähnt, dass – um einzusehen, dass $(M, \oplus, \otimes)$ einen Körper bildet – noch die Axiome K1, K2, K3 aus Definition 2.1 nachgewiesen werden müssen!
K1: Wir berechnen für beliebige $(a, b), (c, d) \in M$:

$$\begin{aligned}
(a, b) \oplus (c, d) &:= (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) \oplus (a, b) \\
(a, b) \otimes (c, d) &:= (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = (c, d) \otimes (a, b).
\end{aligned}$$

Sowohl $\oplus$ als auch $\otimes$ sind kommutativ, damit ist K1 erfüllt. (Eventuell ist es hilfreich die letzte Gleichung auch von links nach rechts zu lesen.) K2: Wir berechnen für beliebige $(a, b), (c, d), (e, f) \in M$:

$$\begin{aligned}
((a, b) \oplus (c, d)) \oplus (e, f) &= (a + c, b + d) \oplus (e, f) := (a + c + e, b + d + f) \\
(a, b) \oplus ((c, d) \oplus (e, f)) &= (a, b) \oplus (c + e, d + f) := (a + c + e, b + d + f),
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
((a, b) \otimes (c, d)) \otimes (e, f) &= (ac - bd, ad + bc) \otimes (e, f) \\
&= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\
(a, b) \otimes ((c, d) \otimes (e, f)) &= (a, b) \otimes (ce - df, cf + de) \\
&= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)).
\end{aligned}$$

Mulipliziert mann alle Klammern aus, so erhält man

$$\begin{aligned}
((a, b) \otimes (c, d)) \otimes (e, f) &= (ac - bd, ad + bc) \otimes (e, f) \\
&= (ace - bde - adf + bcf, acf - bdf + ade + bce) \\
(a, b) \otimes ((c, d) \otimes (e, f)) &= (a, b) \otimes (ce - df, cf + de) \\
&= (ace - adf - bcf + bde, acf + ade + bce - bdf),
\end{aligned}$$

und sieht, dass K2 erfüllt ist.
K3: Für beliebige $(a, b), (c, d), (e, f) \in M$ gilt:

$$\begin{aligned}
(a, b) \otimes ((c, d) \oplus (e, f)) &= (a, b) \otimes (c + e, d + f) \\
&= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\
((a, b) \otimes (c, d)) \oplus ((a, b) \otimes (e, f)) &= (ac - bd, ad + bc) \oplus (ae - bf, af + be) \\
&= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be).
\end{aligned}$$

Multipliziert man alle Klammern aus, so erkennt man, dass auch K3 erfüllt ist.