Aufgabe 2

Gegeben sei die quadratische Form

$$\boldsymbol{q(\vec{x}) = q(x,y,z) = 75x^2 + 7y^2 + 2bxz + 12z^2 \quad mit\ b \in \mathbb{R}.}$$

Wie lautet die zugehörige symmetrische Matrix A, so dass $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$? Für welche Werte von b ist die Form positiv definit?

Die Parameterform lässt sich anschreiben mit:

$$q(\vec{x}) = (x,y,z)\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Es ist darauf zu achten, dass $A^T = A$ gilt, wir also eine symmetrische Matrix verwenden.

$$(x,y,z)\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 75x^2 + 7y^2 + 2bxz + 12z^2$$

Per Matritzenmultiplikation erhalten wir aus $A * \vec{x}$

	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$(a \quad b \quad c)$	$ax + by + cz$
$(b \quad d \quad e)$	$bx + dy + ez$
$(c \quad e \quad f)$	$cx + ey + fz$

Multipliziert mit $\overrightarrow{x^T}$ ergibt:

	$\begin{pmatrix} ax + by + cz \\ bx + dy + ez \\ cx + ey + fz \end{pmatrix}$
$(x \quad y \quad z)$	$ax^2 + bxy + cxz + bxy + dy^2 + eyz + cxz + eyz + fz^2$

Somit ergibt sich die Gleichung:

$$ax^2 + 2bxy + 2cxz + 2eyz + dy^2 + fz^2 = 75x^2 + 7y^2 + 2bxz + 12z^2$$

Durch dem Koeffizientenvergleich erfahren wir:

$$a = 75; d = 7; f = 12$$

Durch Einsetzten und wegkürzen bleibt übrig:

$$2bxy + 2cxz + 2eyz = 2bxz \Rightarrow b = 0; c = b; e = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 75 & 0 & b \\ 0 & 7 & 0 \\ b & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Positiv definit

Eine quadratische Form heißt positiv definit, falls $q(\vec{x}) > 0 \forall \vec{x} \neq \vec{0}$

Nach dem Hauptminorenkriterum ist eine quadratische Matrix genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind:

$$|a_{11}| = 75 > 0$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 75 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 75 * 7 > 0$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 75 & 0 & b \\ 0 & 7 & 0 \\ b & 0 & 12 \end{vmatrix} = 75 * 7 * 12 - 7b^2 > 0 \Leftrightarrow 75 * 12 > b^2 \Leftrightarrow -30 < b < 30$$