7 Anwendungen von Impuls- und Energiesatz: Stöße

7.1 Vorbemerkungen

Stöße zwischen ausgedehnten Körpern sind im allgemeinen recht komplizierte physikalische Vorgänge. Die Körper erleiden Verformungen. Sind diese bleibender Natur, dann geht dabei mechanische Energie verloren; sie wird in Wärme umgesetzt. Die Körper können durch die Stöße in Rotation versetzt werden, auch wenn sie sich vor dem Stoß nur translatorisch bewegten. Reibungsvorgänge komplizieren das Bild noch mehr.

Dies mag – wie z.B. beim Billardspiel – durchaus reizvoll sein, doch sind zur einfachen Behandlung Idealisierungen notwendig. Reibung sei ausgeschlossen, ebenso die Eigenrotation der Körper (den Rotationsbewegungen ausgedehnter Körper ist ein eigenes Kapitel gewidmet). Die Körper sollen im wesentlichen als Massenpunkte, als Teilchen idealisiert oder ihre Eigenrotation durch geeignete Wahl der Versuchbedingungen verhindert werden.

Außerdem sollen nur zwei Grenzfälle betrachtet werden: Der *vollkommen inelastische* und der *vollkommen elastische* Stoß. Im ersten Fall bewegen sich die beiden Körper nach dem Stoß zusammen mit der gleichen Geschwindigkeit weiter; zur Beschreibung kann nur der Impulssatz verwendet werden, da ein Teil der Bewegungsenergie in Wärme umgesetzt wird. Beim vollkommen elastischen Stoß bleibt die gesamte kinetische Energie erhalten: Impuls- *und* Energieerhaltungssatz müssen zur Beschreibung des Stoßvorganges herangezogen werden.

Desweiteren können die Stöße *zentrisch* oder *dezentral* erfolgen. Im ersten Fall sollen die Impulse der stoßenden Körper vor und nach dem Stoß parallel (kollinear) sein. Im zweiten Fall kann man nur noch angeben, daß sie alle in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Zur Angabe der kinetischen Energien und der Impulse der Körper ist die Spezifizierung des Bezugssystems wichtig, bei der Aufstellung der Impuls- und Energiebilanzen jedoch gleichgültig. Gern verwendet man das Schwerpunktssystem; das ist ein Bezugssystem, in dem der gemeinsame Schwerpunkt der beteiligten Körper ruht. Bei den folgenden Betrachtungen wird das Ruhsystem des Beobachters verwendet.

7.2 Zentrischer inelastischer Stoß

Experiment auf der Luftkissenbahn

Stößt ein Körper mit der Masse m_1, der Geschwindigkeit v_1, dem Impuls p_1 und der kinetischen Energie $E_1 = (1/2)m_1v_1^2 = p_1^2/2m_1$ zentrisch und vollkommen inelastisch auf einen zweiten Körper mit der Masse m_2, dem Impuls p_2 und der Energie E_2, so bewegen sich beide mit der gleichen Geschwindigkeit v' nach dem Stoß zusammen weiter. Die Verhältnisse werden vollständig durch den Impulssatz erfaßt. Kennzeichnet man die Variablen nach dem Stoß mit einem Apostroph, kann man schreiben:

Impuls vor dem Stoß = Impuls nach dem Stoß,

$$p_{ges} = p'_{ges},$$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v'. \tag{7.1}$$

Die Geschwindigkeit der beiden Körper nach dem Stoß ergibt sich daraus zu

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2. \tag{7.2}$$

Von der kinetischen Energie vor dem Stoß verbleibt nach dem Stoß nur noch

$$E' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v'^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1v_1 + m_2v_2)^2}{m_1 + m_2}.$$

Dieser Ausdruck wird übersichtlicher, wenn man vereinfachend annimmt, daß der Körper (2) vor dem Stoß ruht, also $v_2 = 0$ ist.

$$E' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot E_1. \tag{7.3}$$

Der Energieübertrag E'/E_1 hängt dann nur noch von den Massen der beteiligten Körper ab. Der Bruchteil

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{E_1 - E'}{E_1} = 1 - \frac{E'}{E_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \tag{7.4}$$

ging beim Stoß in Form von Wärme verloren. Er ist um so größer, je größer die Masse des gestoßenen Körpers ist. Im Grenzfall $m_2 \gg m_1$ bewegt sich nichts mehr. Das ist der inelastische Stoß gegen eine feste Wand. Die gesamte kinetische Energie geht in Form von Wärme verloren.

Experiment: Direkte Messung eines Kraftstoßes (Fig. 7.1)

Wir sind im Abschnitt 6.1 noch die Angabe einer Methode zur direkten Messung eines Kraftstoßes schuldig geblieben. Hierzu eignet sich ein *ballistisches Pendel*. Das ist ein Pendel, dessen Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$ groß ist gegenüber der Stoßdauer Δt. Das Meßverfahren soll hier an Hand eines inelastischen Stoßvorgangs erläutert werden, es funktioniert jedoch analog auch für einen elastischen Stoß (Abschnitt 7.3). Schwerependel und Federpendel sind gleichermaßen verwendbar.

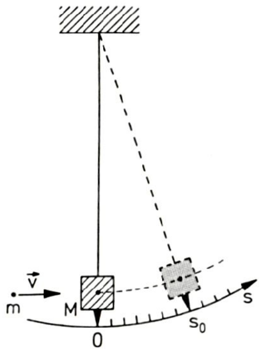

Fig. 7.1: Messung von Kraftstößen mit ballistischen Pendeln. Eine Pistolenkugel wird in einen Holzklotz geschossen, der als Pendelkörper für ein großes Schwerependel dient: Sein Ausschlag ist ein Maß für den Kraftstoß, den er erhält.

Eine Pistolenkugel mit der Masse m und der Geschwindigkeit v wird in einen großen Holzklotz mit der Masse M geschossen, der als Pendelkörper an einem langen Stahldraht aufgehängt ist. Die Kugel bleibt in dem Holzklotz stecken und erteilt ihm einen Stoß S_F. Das Pendel wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus der Ruhelage ausgelenkt und erreicht wenig später seinen Maximalausschlag s_0. Dieser ist durch $v_0 = \omega s_0$ mit v_0 verknüpft, denn aus dem Weg-Zeit-Gesetz $s = s_0 \cdot \sin \omega t$ der Schwingungsbewegung des Pendels erhält man durch Diffenrentiation $v = \dot{s} = \omega s_0 \cdot \cos \omega t$.

Der Impulssatz sagt dann:

$$mv = (m + M)\, v_0$$

oder

$$m\,(v - v_0) = M v_0 = M \omega s_0. \tag{7.5}$$

Auf der linken Seite steht jetzt die Impulsänderung der Kugel. Sie ist betragsmäßig gleich dem Stoß S_F, den die Kugel auf den Klotz ausübt. Auf der rechten Seite kann man die Substitution $v_0 = \omega s_0$ nur dann machen, wenn die Wirkungszeit Δt des Stoßes klein ist gegen die Schwingungsdauer T des Pendels; sonst gilt das angegebene Weg-Zeit-Gesetz nicht. $M\omega$ stellt die *ballistische Konstante* D' des Pendels dar. Man hat demnach:

$$S_F = \int F\,\mathrm{d}t = m\,(v - v_0) = (M\omega) \cdot s_0 = D' \cdot s_0 \tag{7.6}$$

Der Ausschlag s_0 des Pendels ist direkt ein Maß für die Größe des Kraftstoßes, nicht für die auslenkende Kraft.

Als Nebenprodukt läßt sich aus dieser Auslenkung s_0 mit den obigen Beziehungen die Geschwindigkeit v der Pistolenkugel vor dem Stoß berechnen:

$$v = \left(1 + \frac{M}{m}\right) \cdot \omega s_0 \approx \frac{M}{m} \cdot \omega s_0 = \frac{1}{m} \cdot S_F = \frac{D'}{m} \cdot s_0, \tag{7.7}$$

wenn $m \ll M$ ist.

7.3 Zentrischer elastischer Stoß

Beim zentrischen elastischen Stoß müssen Impuls- *und* Energieerhaltungssatz zur vollständigen Beschreibung des Vorgangs herangezogen werden. Wieder sollen die kinetischen Größen nach dem Stoß mit einem Apostroph gekennzeichnet werden.

$$\text{Impulssatz:} \qquad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{7.8}$$

$$\text{Energiesatz:} \qquad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \tag{7.9}$$

Man hat hiermit zwei Gleichungen zur Bestimmung der zwei Unbekannten v_1' und v_2', die zweite ist allerdings nicht linear.

Bemerkung: Die erste Gleichung ist strenggenommen vektoriell aufzuschreiben. Da der Stoß exakt zentrisch sein soll, bedarf es zur Beschreibung aber nur einer einzigen Koordinaten, z. B. x. Dann heißt „$+v$" Geschwindigkeit in $+x$-Richtung und „$-v$" Geschwindigkeit in $-x$-Richtung.

Durch Umordnung kommt man zu:

$$m_1 \cdot (v_1 - v_1') = m_2 \cdot (v_2' - v_2) \tag{7.10}$$

$$m_1 \cdot (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 \cdot (v_2'^2 - v_2^2) \tag{7.11}$$

Dividiert man diese Gleichungen durcheinander, erhält man

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \quad \text{oder} \quad v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2')$$

oder

$$v_{rel} = -v_{rel}'. \tag{7.12}$$

Die Differenzen geben die Geschwindigkeiten des Körpers (1) relativ zu denen des Körpers (2) an. Man erkennt: *Beim elastischen zentrischen Stoß bleibt die Relativgeschwindigkeit der beiden Körper zueinander erhalten; sie kehrt nur ihr Vorzeichen um.* Damit lassen sich nun ohne Schwierigkeiten auch die Geschwindigkeiten der beiden Körper nach dem Stoß angeben:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \tag{7.13}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2. \tag{7.14}$$

Die Diskussion einiger Spezialfälle, die durch Experimente auf der Luftkissenbahn eindrucksvoll demonstriert werden können, verhilft zu größerem Verständnis:

1) Es sei $m_1 = m_2$ und $v_2 = 0$:
Ein Körper stößt auf einen gleich schweren, der vor dem Stoß ruht. Es folgt:

$$v_1' = 0; \qquad v_2' = v_1.$$

Der stoßende Körper (1) kommt nach dem Stoß zur Ruhe, der gestoßene Körper (2) übernimmt die Geschwindigkeit des Körpers (1).

2) $m_1 = 2m_2$; $v_2 = 0$:
Der stoßende Körper besitzt die doppelte Masse des gestoßenen. Es ergibt sich:

$$v_1' = v_1/3; \qquad v_2' = 4v_1/3.$$

Der stoßende Körper (1) läuft dem gestoßenen Körper (2) langsam hinterher.

3) $2m_1 = m_2$; $v_2 = 0$:
Der stoßende Körper ist leichter als der gestoßene. Nun hat man:

$$v_1' = -v_1/3; \qquad v_2' = 2v_1/3.$$

Der stoßende Körper erhält eine Geschwindigkeit in Rückwärtsrichtung, während der gestoßene Körper in Vorwärtsrichtung enteilt.

4) $m_1 \ll m_2$; $v_2 = 0$:

Dies beschreibt den Stoß des Körpers (1) gegen eine massive Wand. Es bleibt:

$$v_1' = -v_1; \qquad v_2' = 0.$$

Dabei wird der stoßende Körper einfach reflektiert; die Wand bleibt in Ruhe.

Diese Beispiele machen deutlich, daß die Übertragbarkeit der kinetischen Energie vom Körper (1) auf den Körper (2) stark vom Verhältnis der beiden Massen m_1/m_2 abhängt. Eine vollständige Energieübertragung erfolgt nur bei $m_1 = m_2$. Für $m_1 < m_2$ *und* für $m_1 > m_2$ ist sie geringer. Für $v_2 = 0$ wird der mathematische Ausdruck dieses Sachverhalts besonders einfach:

$$E_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot E_1 \qquad E_2' = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot E_1.$$

Als Energieübertragungsfaktor definiert man

$$y = \frac{E_2'}{E_1} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4x}{(1+x)^2} \tag{7.15}$$

mit $x = m_1/m_2$. Im halblogarithmischen Diagramm ist dies eine zu $x = 1$ symmetrische Glockenkurve (Fig. 7.2) mit dem Maximum bei 1; nur bei $x = 1$, also $m_1 = m_2$ ist der Energieübertrag perfekt.

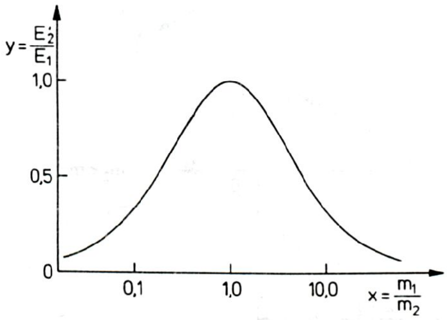

Fig. 7.2: Energieübertragung als Funktion des Massenverhältnisses.

7.4 Dezentraler elastischer Stoß

Dieser Abschnitt ist nur für jemanden gedacht, der sich ein bißchen eingehender mit Stoßproblemen beschäftigen will. Er bringt physikalisch nichts Neues, enthält aber interessante stoßgeometrische Aussagen.

Bei der Behandlung des dezentralen elastischen Stoßes soll von vorn herein die Annahme gemacht werden, daß *der gestoßene Körper ruht.* Jetzt muß aber die Vektorschreibweise für den Impulssatz verwendet werden. Es müssen gelten:

der Impulserhaltungssatz

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2', \tag{7.16}$$

der Energieerhaltungssatz

$$\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} = \frac{\vec{p}_1'^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2'^{\,2}}{2m_2}. \tag{7.17}$$

Dies sind insgesamt vier Gleichungen (3 Komponentengleichungen des Impulssatzes und die skalare Energiegleichung) für insgesamt 6 Unbekannte, nämlich die jeweils drei Komponenten von p_1' und p_2'. Berücksichtigt man aber, daß alle Impulsvektoren in einer Ebene liegen, dann hat man es nur noch mit 3 Gleichungen für 4 Unbekannte zu tun. Hinzu kommt aber noch eine geometrische Bedingung, so daß das System lösbar ist. Ohne diese geometrische Bedingung lassen sich aber auch schon einige allgemeine Aussagen gewinnen. Macht man zuerst einmal die Massen der beiden Körper gleich groß, dann sagt der Energiesatz

$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2.$$

Das aus den drei p's gebildete Vektordreieck ist rechtwinklig mit p_1 als Hypothenuse. Alle vorkommenden Kombinationen von p_1' und p_2' müssen die Bedingung erfüllen, daß der Endpunkt von $\vec{p}_2'$ (oder $\vec{p}_1'$) auf dem Thaleskreis mit dem Durchmesser p_1 liegt.

Eine solche Kreiskonstruktion kann man auch angeben, wenn die Massen der Körper ungleich sind. Eliminiert man nämlich mit Gl. (7.16) $\vec{p}_1'$ aus Gl. (7.17), dann ergibt sich nach Multiplikation mit $2m_1$:

$$\vec{p}_1^{\,2} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2')^2 + \frac{m_1}{m_2} \cdot \vec{p}_2'^2$$

$$\cancel{\vec{p}_1^{\,2}} = \cancel{\vec{p}_1^{\,2}} - 2\vec{p}_1\vec{p}_2' + \vec{p}_2'^2 + \frac{m_1}{m_2} \cdot \vec{p}_2'^2.$$

Und daraus

$$\vec{p}_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot (\vec{p}_1\vec{p}_2')$$

oder

$$p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot p_1 \cdot \cos\alpha = D \cdot \cos\alpha, \qquad \alpha = \sphericalangle(\vec{p}_2, \vec{p}_3). \tag{7.18}$$

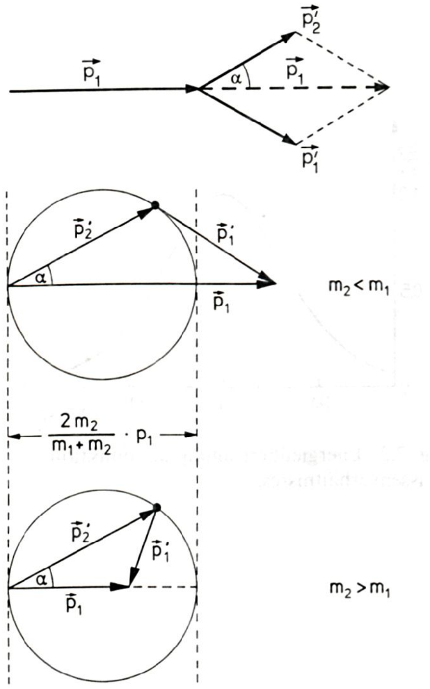

Fig. 7.3: Oben: Vektordiagramm der Impulse beim dezentralen elastischen Stoß.
Unten: Geometrische Veranschaulichung der Gl. (7.18).

Diesmal kann man einen Kreis mit dem Durchmesser D zeichnen, aus dem sich mit Gl. (7.18) $\vec{p}_2'$ geometrisch einfach ermitteln läßt. Dieser Kreis, der jetzt alle denkbaren Endpunkte von $\vec{p}_2'$ erfaßt, hat nun den Durchmesser $[2m_2/(m_1 + m_2)] \cdot p_1$. Der Skalierungsfaktor

$$\frac{2m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{1 + (m_1/m_2)} \quad \text{ist} \begin{cases} < 1 & \text{wenn} \quad m_2 < m_1, \\ > 1 & \text{wenn} \quad m_2 > m_1. \end{cases} \tag{7.19}$$

Diese beiden Fälle sind in Fig. 7.3 skizziert. Im ersten Fall ist der Durchmesser des Kreises kleiner als p_1; der Impuls des stoßenden Körpers behält nach dem Stoß stets eine Komponente in Vorwärtsrichtung. Im zweiten Fall erhält der stoßende, jetzt leichtere Körper stets eine Impulskomponente in Rückwärtsrichtung. Diese qualitativen Feststellungen konnten auch schon beim zentrischen Stoß gemacht werden.

Der Rest des Problems ist nur noch reine Rechnerei. Wir wollen noch die eingangs erwähnte Geometriebedingung erläutern und das Ergebnis angeben. Angenommen, die stoßenden Körper seien Kugeln oder runde Scheiben mit den Radien r_1 und r_2. Führt man als Maß für die Dezentralität des Stoßes den *Stoßparameter* d ein, dann liest man aus Fig. 7.4 ab

$$\sin\alpha = \frac{d}{r_1 + r_2}. \tag{7.20}$$

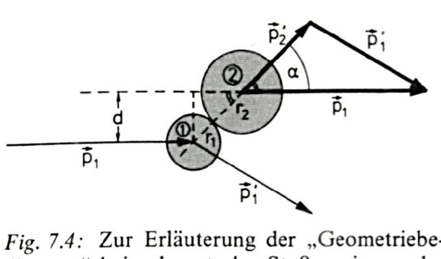

Fig. 7.4: Zur Erläuterung der „Geometriebedingung" beim dezentralen Stoß zweier runder Körper mit den Radien r_1 und r_2. d ist der Stoßparameter.

Mit Hilfe des Kosinussatzes ermittelt man dann aus dem Vektordreieck der Impulse nach kurzer Zwischenrechnung:

$$p_1' = \left\{ \sqrt{1 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{r_1 + r_2} \right)^2 \right]} \right\} \cdot p_1, \tag{7.21}$$

$$p_2' = \left\{ \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{d}{r_1 + r_2} \right)^2} \right\} \cdot p_1. \tag{7.22}$$

Für $d = 0$ erhält man hieraus die Beziehungen (7.13) und (7.14) für den zentralen Stoß zurück. Für $d > r_1 + r_2$ findet kein Stoß mehr statt; die Körper fliegen aneinander vorbei; p_2' bleibt nicht reell. Dann ist $p_1 = p_1'$, denn Gl. (7.21) gilt nur bei $d \leq (r_1 + r_2)$. Bei $d > (r_1 + r_2)$ existiert das Dreieck der p-Vektoren, aus denen es gewonnen wurde, nicht mehr.

7.5 Systeme mit veränderlicher Masse

Das Grundgesetz der Mechanik liegt in zwei Formulierungen vor:

$$\vec{F}_a = m \cdot \vec{a} \qquad \text{und} \qquad \vec{F}_a = \dot{\vec{p}}, \tag{7.23}$$

die einander äquivalent sind, wenn die Masse des betrachteten Systems konstant bleibt. In beiden Fällen wurde der Kraft $\vec{F}$ ein Index „a" angehängt, um hervorzuheben, daß es sich um eine *äußere* Kraft handeln muß, denn innere Kräfte können den Impuls eines Systems nun mal nicht ändern. Bleibt die Masse des Systems nicht konstant, ist man versucht, die erste Formulierung des Grundgesetzes ganz zu verwerfen und bei der zweiten Form einfach nach der Produktregel auszudifferenzieren. Nur dann tritt ja ein Glied $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ auf, das eine Massenänderung (> 0 Massenzunahme, < 0 Massenabnahme) berücksichtigt:

$$\vec{F}_a = \dot{\vec{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m \cdot \vec{v}) = \dot{m} \cdot \vec{v} + m \cdot \dot{\vec{v}}. \tag{7.24}$$

Damit hätte man die zeitlich veränderliche Masse zwar formal erfaßt, sich aber keine Gedanken über die Systemgrenzen gemacht, nach denen die wirkenden Kräfte als *innere* und *äußere* klassifiziert werden könnten. Gehören die Massenanteile, die das System aufnimmt oder verliert, zum Inneren oder zum Äußeren? – Um ein konkretes Beispiel vor Augen zu haben, denken Sie an eine Rakete, die durch den Ausstoß der Treibgase ständig an Masse verliert, selbst aber dadurch beschleunigt wird. Dieses Beispiel wird im Anschluß an die nun folgende grundsätzliche Betrachtung noch genauer diskutiert.

Ein Körper, der sich im Schwerefeld der Erde bewegen möge, nehme aus der Umgebung Masse auf; dann ist $\Delta m > 0$. Um das Grundgesetz z. B. in der Form $\vec{F}_a = \dot{\vec{p}}$ ganz sicher anwenden zu dürfen, werden die Systemgrenzen

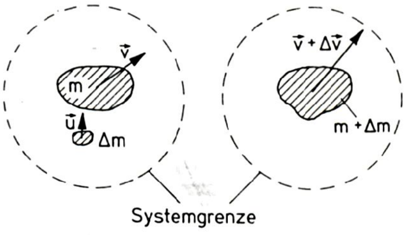

Fig. 7.5: Ein kleiner Körper (Δm) stößt vollkommen inelastisch auf einen großen Körper (m). Beide bewegen sich nach dem Stoß zusammen weiter.

zunächst so gezogen, daß die Gesamtmasse konstant bleibt (Fig. 7.5). $\dot{\vec{p}}$ ist die Impulsänderung des Gesamtsystems.

Zum Zeitpunkt t hat man dann einen „großen" Körper mit der Masse m und der Geschwindigkeit v und einen zweiten kleinen Körper mit der Masse Δm und der Geschwindigkeit $\vec{u}$. Auf beide greift von außen die Schwerkraft $\vec{F}_a$ zu. Der Impuls des Systems vor dem Stoß ist $\vec{p}_1 = m \cdot \vec{v} + \Delta m \cdot \vec{u}$.

Zum späteren Zeitpunkt $t + \Delta t$ hat der große Körper den kleinen aufgenommen und dadurch seine Masse auf $m + \Delta m$ vergrößert. Seine Geschwindigkeit ist jetzt $\vec{v} + \Delta\vec{v}$. Der Impuls des Systems beträgt nun $\vec{p}_2 = (m + \Delta m) \cdot (\vec{v} + \Delta\vec{v})$. Alle Geschwindigkeiten seien im Ruhsystem des Beobachters angegeben. Den Impulssatz kann man jetzt bedenkenlos aufschreiben, denn die Masse des Gesamtsystems ändert sich ja nicht. Am besten tut man dies in Form einer Differenzengleichung:

$$\vec{F}_a = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \left\{(m + \Delta m) \cdot (\vec{v} + \Delta\vec{v}) - \Delta m \cdot \vec{u} - m \cdot \vec{v}\right\} \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

$$= \{\cancel{m\vec{v}} + \Delta m\vec{v} + m\Delta\vec{v} + \Delta m\Delta\vec{v} - \Delta m\vec{u} - \cancel{m\vec{v}}\} \cdot \frac{1}{\Delta t}. \tag{7.25}$$

Nun geht man am besten wieder durch $\Delta t \to 0$ zu Differentialen über; dann wird:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \to \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}; \qquad \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \to \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}; \qquad \frac{\Delta m\Delta\vec{v}}{\Delta t} \to 0.$$

Es ergibt sich:

$$\boxed{\vec{F}_a = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}.} \tag{7.26}$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß das blinde Ausdifferenzieren in Gl. (7.24) zum falschen Resultat geführt hätte. Gl. (7.26) läßt sich nun auf zweierlei Weise umschreiben:

(1) Faßt man die Terme rechts, die $\vec{v}$ enthalten, gemäß $m\dot{\vec{v}} + \dot{m}\vec{v} = (\dot{\vec{p}})$ zusammen, so erhält man

$$\vec{F}_a = (\dot{\vec{p}}) - \vec{u} \cdot \dot{m}$$

oder

$$\vec{F}_a + \vec{u} \cdot \dot{m} = (\dot{\vec{p}}) \tag{7.27}$$

oder

$$\vec{F}_a \cdot \Delta t + \vec{u} \cdot \Delta m = (\Delta\vec{p}). \tag{7.28}$$

Das Umschreiben des Terms $\vec{u} \cdot \dot{m}$ auf die linke Seite bedeutet eine Änderung der Systemgrenzen: Man interessiert sich nur noch für den großen Körper und seine Impulsänderung. $(\dot{\vec{p}})$ ist im Gegensatz zu $\dot{\vec{p}}$, das oben klar definiert wurde, die Impulsänderung des großen Körpers. Die Gleichungen (7.27, 7.28) sagen in Worten:

Der Impuls eines Körpers ändert sich durch die Einwirkung („Stoß") einer äußeren Kraft $\vec{F}_a$ und durch den Impuls, den die stoßenden Körper (Massenelemente) mitbringen, die sich mit ihm vereinigen.

Im Fall einer senkrecht startenden Rakete, die Antriebsgase ausstößt, ist $\dot{m}$ negativ. Wenn die Geschwindigkeit $\vec{u}$ der Treibgase (z. B. beim Start) nach hinten gerichtet ist, ergibt $\vec{u} \cdot \dot{m}$ daher eine Kraft, die nach vorn gerichtet ist und also den Impuls der Rakete vergrößert. Die Schwerkraft $\vec{F}_a$, die nach hinten gerichtet ist, wirkt dieser Kraft entgegen.

(2) Man kann aber auch den gesamten zweiten Term auf der rechten Seite der Gl. (7.26) auf die linke Seite herübernehmen, wodurch man eine Aussage über die *Beschleunigung des großen Körpers* erhält. Berücksichtigt man nämlich, daß $\vec{u} - \vec{v} = \vec{v}_{rel}$ die *Relativgeschwindigkeit* des kleinen (Δm) relativ zu der des großen Körpers (m) darstellt, dann bedeutet

$$\vec{F}_s = \vec{v}_{rel} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

eine Kraft, die man als *Rückstoß* oder *Schub* bezeichnet. Es ergibt sich dann

$$\vec{F}_{ges} = \vec{F}_a + \vec{F}_s = m(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m(t) \cdot \vec{a}. \qquad (7.29)$$

In Worten

Die Beschleunigung $\vec{a}$ des großen Körpers wird durch die äußere Kraft $\vec{F}_a$ und den Schub $\vec{F}_s$ erzeugt.

Zusammenfassend kann man sagen: Die Gleichungen (7.26, 7.27, 7.28 und 7.29) sind einander äquivalent. In der Beziehung (7.26) geht es darum, die gesamte Impulsänderung des Systems (großer + kleiner Körper) zu erfassen. In den Gl. (7.27, 7.28) beschränkt man sich auf der rechten Seite auf die Impulsänderung des großen Körpers; dann muß man auf der linken Seite aber nicht nur die Wirkung der äußeren Kraft $\vec{F}_a$, sondern auch die Impulsänderung berücksichtigen, die die zufließende (oder je nach Problem: abfließende) Masse Δm beiträgt. In der Gl. (7.29) schließlich fragt man nach der Gesamtkraft, die für die Beschleunigung $\vec{a}$ des großen Körpers verantwortlich ist; diese setzt sich vektoriell aus der äußeren Kraft $\vec{F}_a$ und dem Schub $\vec{F}_s$ zusammen.

Beispiele:

(a) Rakete

Eine Rakete besitze zu Anfang die Masse m_0, zu einem späteren Zeitpunkt die Masse $m(t)$. Die Treibstoffgase werden mit konstanter Geschwindigkeit v_{rel} relativ zum Raketenkörper ausgestoßen. In der Nähe der Erdoberfläche wirkt auf die Rakete – abgesehen von Luftreibungskräften – die Schwerkraft $\vec{F}_a = m\vec{g}$. Im freien Raum, weitab von jedem Himmelskörper, ist $\vec{F}_a = 0$. Man erhält also mit Gl. (7.26)

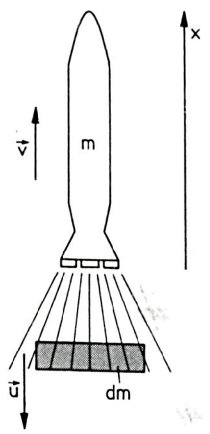

Fig. 7.6: Eine Rakete wird durch den Ausstoß heißer Treibstoffgase per Rückstoß angetrieben. Dabei verliert sie an Masse.

1) in Erdnähe

$$m\vec{g} + \vec{v}_{rel} \cdot \frac{dm}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}, \tag{7.30}$$

2) im Raum

$$\vec{v}_{rel} \cdot \frac{dm}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{7.31}$$

Startet die Rakete genau senkrecht – die Triebwerke sind auf Antrieb gestellt – hat man es nur noch mit zwei skalaren Gleichungen zu tun.

$$-m(t) \cdot g - v_{rel} \cdot \frac{dm}{dt} = m(t) \cdot \frac{dv}{dt} \tag{7.32}$$

$$\text{bzw.} \quad - v_{rel} \cdot \frac{dm}{dt} = m(t) \cdot \frac{dv}{dt}. \tag{7.33}$$

Beide Differentialgleichungen sind lösbar; hier soll nur der zweite einfachere Fall betrachtet werden: die Zeitvariable läßt sich sofort eliminieren und die Variablen m und v können getrennt werden; einer Integration steht nichts im Wege.

$$-v_{rel} \cdot \int_{m_0}^{m(t)} \frac{dm}{m} = \int_{v_0}^{v} dv$$

$$v(t) = v_0 - v_{rel} \cdot \ln\left\{\frac{m(t)}{m_0}\right\} = v_0 + v_{rel} \cdot \ln\left\{\frac{m_0}{m(t)}\right\}. \tag{7.34}$$

Das ist die sogenannte Raketengleichung. Bei der Integration wurde angenommen, daß bei $t = 0$, wenn das Triebwerk gezündet wird, die Rakete die Masse m_0 und die Geschwindigkeit v_0 besitzt. Da stets $m(t) < m_0$, wächst die Geschwindigkeit der Rakete – wie erwartet. Die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit läßt sich natürlich weiter spezifizieren, wenn man Annahmen über die Treibgas-Ausstoßrate macht.

Zum Erreichen einer möglichst hohen Endgeschwindigkeit wird man die Ausstoßgeschwindigkeit v_{rel} der Treibgase möglichst groß machen. Die erreichbare Endgeschwindigkeit

$$v_{end} = v_0 + v_{rel} \cdot \ln\left\{\frac{m_T + m_K}{m_K}\right\} \approx v_0 + v_{rel} \cdot \ln\left\{\frac{m_T}{m_K}\right\} \tag{7.35}$$

hängt dann nur noch von der Menge m_T des mitgenommenen Treibstoffs und der Masse m_K des Raketenkopfs ab.

(b) Regentropfen.

Ein Regentropfen fällt in einer mit Wasserdampf gesättigten Atmosphäre und gewinnt durch Kondensation ständig an Masse. Man kann in guter Näherung annehmen, daß die auf dem Tropfen kondensierenden Wasserteilchen die Geschwindigkeit $\vec{u} = 0$ besitzen. Die von außen angreifende Kraft ist die Schwerkraft $\vec{F}_a = \vec{G} = m \cdot \vec{g}$. Luftreibung soll vernachlässigt werden.

Mit Gl. (7.26) hat man dann

$$\vec{F}_a = \dot{\vec{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m(t) \cdot \vec{v}(t)\right] = m(t) \cdot \vec{g}. \tag{7.36}$$

Die ausdifferenzierte Gleichung

$$\dot{m}(t) \cdot \vec{v}(t) + m(t) \cdot \dot{\vec{v}}(t) = m(t) \cdot \vec{g} \tag{7.37}$$

läßt sich mit plausiblen Annahmen für den zeitlichen Massenzuwachs (etwa proportional der Tropfenoberfläche und proportional der in der Atmosphäre zurückgelegten Strecke) integrieren. Man erhält eine hier nicht weiter interessierende, etwas längliche Formel für die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion und kann diese schließlich zu einer noch länglicheren Weg-Zeit-Funktion weiterintegrieren. Hier soll nur das einfachere Problem diskutiert werden: Die Schwerkraft sei in Gedanken abgeschaltet und der Tropfen bewege sich mit eine gewissen Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}$ waagerecht durch die Atmosphäre. Dann verbleibt nur noch:

$$\dot{\vec{p}} = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{m} \cdot v + m \cdot \dot{v} = 0$$

$$-\frac{1}{v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}, \tag{7.38}$$

d. h. die relative Geschwindigkeitsabnahme ist gleich der relativen Massenzunahme. Die weitere Integration macht keine Schwierigkeiten. –

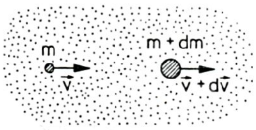

Fig. 7.7: Ein Wassertropfen fliegt durch eine wasserdampfgesättigte Atmosphäre. Durch die vollkommen inelastischen Stöße mit den Mikrotröpfchen ändert sich seine Masse.

Wir wollen dieses Beispiel noch für einen Hinweis nutzen. Oft ist man versucht, derartige Probleme mit Hilfe des Energiesatzes zu lösen, ohne die dazu notwendigen Bedingungen eingehender zu überprüfen. Schreiben wir einfach einmal probeweise den Energiesatz für die beiden in Fig. 7.7 skizzierten Zustände auf. Da potentielle Energie nicht vorhanden ist, würde einfach für die kinetischen Energien gelten

$$\begin{aligned}
E_{k1} &= E_{k2} \\
\frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}(m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v)^2 \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\mathrm{d}m \cdot v^2 + mv \cdot \mathrm{d}v + \text{kleine Glieder 2. Ordnung} \\
\rightsquigarrow \quad 0 &= v \cdot \underbrace{(m \cdot \mathrm{d}v + v \cdot \mathrm{d}m)}_{=0} - \frac{1}{2}\mathrm{d}m \cdot v^2.
\end{aligned}$$

Die Klammer verschwindet wegen Gl. (7.38). Dann aber müßte man nach Division durch $\mathrm{d}t$ schließen, daß $(1/2) \cdot v^2 \cdot \mathrm{d}m/\mathrm{d}t = 0$ wäre, was aber ganz offensichtlich nicht der Fall ist. Wo liegt der Fehler? – Der Energieerhaltungssatz kann nicht gelten, handelt es sich doch bei der Kondensation um perfekt inelastische Stöße zwischen dem beweglichen Tropfen und den „ruhenden“ Wassermolekülen (oder Mikrotröpfchen).

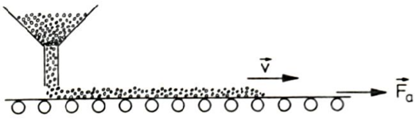

Fig. 7.8: Zur Berechnung der Antriebskraft bei einem Förderband, dessen Masse sich durch die Beladung ändert.

(c) Förderband.

Ein weiteres instruktives Beispiel für die Anwendung des Impulssatzes bei variabler Masse bietet ein Förderband, auf das mit konstanter Rate $\alpha = dm/dt$ Sand rieselt. Gefragt wird nach der Kraft $\vec{F}_a$, die benötigt wird, um die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Bandes konstant zu halten. Vereinfachend sei angenommen, daß der Sand mit der Geschwindigkeit $\vec{u} = 0$ auf das Förderband gebracht wird. Dann gilt wieder

$$\vec{F}_a = \dot{\vec{p}} = \dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}} = \dot{m}\vec{v},$$

wobei die Bedingung der konstanten Förderband-Geschwindigkeit ($\dot{\vec{v}} = 0$) bereits berücksichtigt wurde. In diesem Fall ist die äußere Kraft ausschließlich mit der Massenveränderung verknüpft:

$$\vec{F}_a = \vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \alpha \cdot \vec{v}. \tag{7.39}$$

Mit gegebener Rieselrate α und geforderter Geschwindigkeit v läßt sich die zur Aufrechterhaltung dieser Geschwindigkeit notwendige Kraft sofort ausrechnen. Mit ihr ergibt sich dann auch die Leistung des Antriebsmotors zu

$$P = \vec{F}_a \cdot \vec{v} = \alpha \cdot v^2 = v^2 \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}. \tag{7.40}$$

Auch hier läßt sich eine interessante Energiebetrachtung anschließen. In der Zeit Δt hat der Motor die Arbeit

$$\Delta W = P \cdot \Delta t = v^2 \cdot \Delta m = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\Delta m v^2\right) \tag{7.41}$$

aufzubringen. Das ist aber doppelt soviel, wie zur Beschleunigung der Sandmenge Δm notwendig ist, die in dieser Zeit auf das Band rieselt; zur Beschleunigung des Sandes braucht man ja nur $(\Delta m v^2)/2$. Wozu wird die zweite Hälfte benötigt?

Auch hier ist der Energiesatz offensichtlich nicht anwendbar. Wiederum handelt es sich um inelastische Stöße der Sandteilchen mit dem Förderband: Beide bewegen sich nach dem Stoß mit der gleichen Geschwindigkeit gemeinsam weiter. Die Hälfte der aufgewendeten Energie wird in Reibung verbraten.

Schlußfolgerung: Vorsicht bei der Anwendung des Energiesatzes! Manchmal ist es sehr schwierig, die Stelle ausfindig zu machen, wo Reibungseffekte zuschlagen.

Schlußbemerkung:

Alle vorstehend besprochenen Systeme veränderlicher Masse beschränken sich auf den Bereich kleiner Geschwindigkeiten. Bekanntlich hängt nach der speziellen Relativitätstheorie die Masse eines Körpers von seiner Geschwindigkeit ab, was aber erst merklich ist, wenn sie mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar wird. Im weiteren Sinne gehört auch dies zu diesem Abschnitt „Systeme mit veränderlicher Masse", sprengt aber den Umfang des vorliegenden Kapitels. Den relativistischen Problemen ist ein eigenes Kapitel gewidmet.

7.6 Zusammenfassung

Messung von Kraftstößen mit ballistischen Pendeln Stoßkonstante (inelastischer Stoß)	$S_F = \int_{\Delta t} F\,\mathrm{d}t = D' \cdot s_0$ $D' = M\omega = \frac{2\pi M}{T}$	s_0: Ausschlag Δt: Stoßzeit, T: Schwingungsdauer, $\Delta t \ll T$ M: Masse des Pendelkörpers
Zentrischer inelastischer Stoß		
Geschwindigkeit nach dem Stoß	$v' = \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot v_2$	m_i: Massen der Stoßpartner v_i: Geschwindigkeiten vor dem Stoß
relativer Energieübertrag	$\frac{E'}{E_1} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$	(gilt für $v_2 = 0$)
Zentrischer elastischer Stoß		
Geschwindigkeiten nach dem Stoß	$v_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2} \cdot v_2$ $v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} \cdot v_2$	m_i: Massen der Stoßpartner v_i: Geschwindigkeiten vor dem Stoß
relativer Energieübertrag	$\frac{E_2'}{E_1} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$	Vor dem Stoß: Körper 2 ruht, Körper 1 mit Energie E_1.
Systeme mit veränderlicher Masse		
Äußere Kraft:	$\vec{F}_a = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - (\vec{u} - \vec{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ $\vec{F}_a + \vec{u} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[m(t) \cdot v(t)]}{\mathrm{d}t}$	$m(t)$: Masse des Körpers $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$: Massenzuwachsrate $\vec{v}$: Geschwindigkeit des Körpers $\vec{u}$: Geschwindigkeit der zufließenden Massenelemente $\mathrm{d}m$.
Schub (Rakete) Raketengleichung	$\vec{F}_s = \vec{v}_{rel} \cdot \frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}$ $v(t) = v_0 + v_{rel} \cdot \ln\left\{\frac{m_0}{m(t)}\right\}$	$\vec{v}_{rel} = \vec{u} - \vec{v}$ m_0: Anfangsmasse v_0: Anfangsgeschwindigkeit $v_{rel} = u - v$: Geschwindigkeit des Treibgases relativ zur Rakete.