

12. Man berechne die Ableitung von $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ im Punkt $P_0(3,2)$

a) in Richtung der Koordinatenachsen,

b) in Richtung von $(-1,-1)$ sowie

c) in Richtung von $\text{grad } f$.

a) Änderung in x-Richtung $P_0(3,2)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x|_{P_0} = 2 \cdot 3 = 6$

Änderung in y-Richtung $P_0(3,2)$: $\frac{\partial f}{\partial y} = 8y|_{P_0} = 8 \cdot 2 = 16$

b) Änderung in Richtung $\vec{p} = (-1, -1)$:

Richtungsvektor $(-1,-1)$ = Einheitsvektor?

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \rightarrow \text{kein Einheitsvektor (der müsste 1 sein)}$$

der dazugehörige Einheitsvektor wäre: $\vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \text{grad } f \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{-6}{\sqrt{2}} + \frac{-16}{\sqrt{2}} = \frac{-22}{\sqrt{2}}$$

c) Änderung in Richtung $\text{grad } f(\vec{p}_0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$:

$$df = \|\text{grad } f(\vec{p}_0)\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6^2 + 16^2} = \sqrt{36 + 256} = \sqrt{292} = 17,08800749$$

genauer: Richtungsvektor $(6,16)$ = Einheitsvektor?

$$\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6^2 + 16^2} = \sqrt{292} \rightarrow \text{kein Einheitsvektor (der müsste 1 sein)}$$

der dazugehörige Einheitsvektor wäre: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 6 \\ \sqrt{292} \\ 16 \\ \sqrt{292} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \text{grad } f \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ \sqrt{292} \\ 16 \\ \sqrt{292} \end{pmatrix} = \frac{36}{\sqrt{292}} + \frac{256}{\sqrt{292}} = \frac{292}{\sqrt{292}} = 17,08800749$$