Runde 2, Beispiel 11

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 27.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 25.10.2006

1 Angabe

Für welche Werte von y_0 ist das AWP $xy' + 2y = 3x, y(0) = y_0$ lösbar? Geben Sie für diese Werte jeweils die Lösung an.

2 Theoretische Grundlagen: Lineare inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung

Für inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = s(x)$$

gilt: Die allgemeine Lösung ist die Summe aus der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung.

1. Integration der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

   $$y' + f(x) \cdot y = 0$$

   Zunächst Trennung der Veränderlichen, dann Integration. Allgemeine Lösung ist schließlich (auch logarithmische Schreibweise möglich):

   $$y = c \cdot e^{-\int f(x)\,dx}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

2. Integration der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung

   Die aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung gewonnene Integrationskonstante c wird durch die Funktion $c(x)$ ersetzt, so dass man den Lösungsansatz

   $$y = c(x) \cdot e^{-\int f(x)\,dx}$$

   erhält und diesen in die inhomogene Differentialgleichung einsetzt. Die so entstehende Differentialgleichung 1. Ordnung ist durch unbestimmte Integration direkt gelöst werden.

3. Summe aus der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung berechnen

Eine andere Möglichkeit zur Lösung besteht in der **Verwendung einer Formel**: Lineare inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Form $y' + p(x)y = r$ (r ist Störfunktion, singulär oder nur von x abhängig) können mit folgender Formel aufgelöst werden:

$$h = \int p(x)\,dx$$
$$y(x) = e^{-h}(\int e^h r\,dx + c)$$

(Quelle: Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9.Aufl., S.26ff.)
Die Formel hat mir schon gute Dienste zur Kontrolle geleistet und ich kann sie mittlerweile auch auswendig

3 Lösung des Beispiels

3.1 Nach der 'Standardmethode'

$$xy' + 2y = 3x \mid \cdot x^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad y' + \frac{2}{x} \cdot y = 3 \qquad x \neq 0$$
$$y_h(x): \qquad ' + \frac{2}{x} \cdot y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y| = -2\ln|x| + \tilde{C} \qquad \Rightarrow \qquad y_h(x) = \frac{C}{x^2}$$
$$y_p(x): \qquad \frac{c'(x)}{x^2} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad c(x) = x^3 \qquad \Rightarrow \qquad y_p(x) = x$$
$$\mathbf{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{x^2} + x}$$

3.2 Unter Verwendung der 'Formel'

$$xy' + 2y = 3x \mid \cdot x^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad y' + \frac{2}{x} \cdot y = 3 \qquad x \neq 0$$
$$p(x) = \frac{2}{x}, \qquad r = 3, \qquad h = \int p\,dx = 2\ln|x|$$
$$y(x) = e^{-h}(\int e^h r\,dx + c) = e^{-2\ln|x|} \cdot (\int e^{2\ln|x|} \cdot 3\,dx\ + c) =$$
$$x^{-2} \cdot (\frac{x^3}{3} \cdot 3 + c) = \mathbf{\frac{c}{x^2} + x}$$

3.3 Mögliche Lösungen für das AWP $y(0) = y_0$

$y(0) = 0$ scheidet aus; wenn $C = 0$ istm dann bleibt nur $y(x) = x$.