Lösung von Aufgabe 252

Vorbemerkung: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$ (l'Hospital)

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$, so dass gilt: $0 < x \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{|\sin x|}{x} \leq 2$.

Dieses ε halten wir fest und spalten auf:

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^\varepsilon \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}\,dx + \int_\varepsilon^\infty \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}\,dx.$$

Wir behandeln beide Integrale getrennt:

$$\int_0^\varepsilon \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^\varepsilon \frac{1}{x^{1/2}} \cdot \frac{|\sin x|}{x}\,dx \leq 2 \cdot \int_0^\varepsilon x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$2 \cdot \lim_{a\to 0+} \int_a^\varepsilon x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2 \cdot \lim_{a\to 0+} 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_a^\varepsilon = 2 \cdot \lim_{a\to 0+} (2\sqrt{\varepsilon} - 2\sqrt{a}) =$$

$$= 4\sqrt{\varepsilon}, \text{ da } \lim_{a\to 0+} \sqrt{a} = 0.$$

Wegen $|\sin x| \leq 1$ haben wir beim 2. Integral:

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}\,dx \leq \int_\varepsilon^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{b\to\infty} \int_\varepsilon^b x^{-3/2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_\varepsilon^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{2}{\sqrt{b}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}, \text{ da } \lim_{b\to\infty} \frac{2}{\sqrt{b}} = 0.$$

Also sind beide Integrale konvergent, und somit konvergiert auch das Integral $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}\,dx$.

Anmerkung: Mit einer analogen Aufspaltung und einem $\varepsilon > 0$, so dass $\left(0 < x \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{1}{2}\right)$, zeigt man: Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx$ aus Aufgabe 254 ist divergent.