Bitte frei lassen! **Punkte:** **Note:**

Analysis für Informatik und WI - Vorlesungsprüfung

Prüfer: Panholzer Arbeitszeit: 100 min.

Familienname: Vorname:

Einziges erlaubtes Hilfsmittel:
Mathematische Formelsammlung von Götz/Kraft/Unfried des öbv-Verlages

(1) [8 Punkte] Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zu **elementaren Funktionen bzw. asymptotischer Vergleich von Folgen** (bitte ankreuzen).

Die folgenden 4 Fragen beziehen sich auf die reelle Funktion $h(x)$, welche wie folgt definiert sei:

$$h(x) = \sqrt{(1-x)^2}.$$

(a)	An welchen/r der folgenden Stellen ist $h(x)$ stetig? ○ -1 ○ 0 ○ 1 ○ 2
(b)	An welchen/r der folgenden Stellen ist $h(x)$ differenzierbar? ○ -1 ○ 0 ○ 1 ○ 2
(c)	Welchen Wert besitzt das bestimmte Integral $\int_0^2 h(x)dx$? ○ -1 ○ 0 ○ 1 ○ 2
(d)	An welchen/r der folgenden Stellen besitzt $h(x)$ ein relatives Minimum? ○ -1 ○ 0 ○ 1 ○ 2

In den folgenden 4 Fragen wird der asymptotische Vergleich der Folgen $(p_n)_{n\geq 1}$, $(q_n)_{n\geq 1}$ und $(r_n)_{n\geq 1}$ für $n \to \infty$ untersucht, wobei die Folgen wie folgt definiert sind ($\binom{n}{k}$ bezeichnet dabei den Binomialkoeffizienten):

$$p_n = \frac{n^2}{2}, \qquad q_n = \frac{n^2}{\ln n}, \qquad r_n = \binom{n}{2}.$$

(e)	Welche der folgenden asymptotischen Gleichheiten gelten? ○ $p_n \sim q_n$ ○ $q_n \sim r_n$ ○ $r_n \sim p_n$
(f)	Welche der folgenden klein o-Beziehungen gelten? ○ $p_n = o(q_n)$ ○ $q_n = o(r_n)$ ○ $r_n = o(p_n)$
(g)	Welche der folgenden groß $\mathcal{O}$-Beziehungen gelten? ○ $p_n = \mathcal{O}(q_n)$ ○ $q_n = \mathcal{O}(r_n)$ ○ $r_n = \mathcal{O}(p_n)$
(h)	Welche der folgenden Theta-Beziehungen gelten? ○ $p_n = \Theta(q_n)$ ○ $q_n = \Theta(r_n)$ ○ $r_n = \Theta(p_n)$

(2) [8 Punkte] Gegeben seien die beiden Potenzreichen

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

(a) Man bestimme den Konvergenzradius R der Reihe S_1.
(b) Man bilde das Cauchyprodukt der Reihen S_1 und S_2 und vereinfache dieses, um zu zeigen, dass $S_1 \cdot S_2 = 1$ ist.
Hinweis: Für das Vereinfachen ist der binomische Lehrsatz von Nutzen.

(3) [8 Punkte] Die reelle Funktion $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:

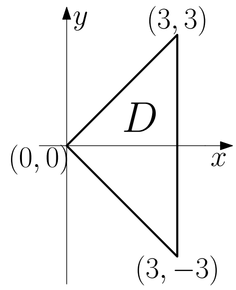
$$f(x) = \frac{1}{(x+2) \cdot \sqrt{x+1}}.$$

(a) Man bestimme eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.
Hinweis: Beispielsweise führt die Substitution $u = \sqrt{x+1}$ zum Ziel.
(b) Man berechne das folgende uneigentliche Integral 1. und 2. Art:

$$\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx.$$

(4) [8 Punkte] Gegeben sei die Funktion $g(x, y)$ in zwei reellen Variablen x, y auf einem dreieckigen Definitionsbereich D, welcher durch die drei Geraden $y = x$, $y = -x$ und $x = 3$ begrenzt ist:

$$g(x, y) = (x - y) \cdot (x + y) \cdot (3 - x).$$



Man bestimme auf D das absolute Maximum und das absolute Minimum von g, sowie Stellen, wo diese angenommen werden.

(5) [8 Punkte] Folgen und Reihen.
(a) Wie ist der Grenzwert einer reellen Folge definiert? Man gebe nun zwei reelle Folgen $(c_n)_{n\geq 1}$, $(d_n)_{n\geq 1}$ an mit $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = +\infty$, welche folgende Bedingungen zugleich erfüllen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{c_n^2}{d_n^3} = 0.$$

(b) Wie ist der Grenzwert einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ definiert? Falls $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, wie ist dann der Grenzwert der Teleskopreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ bestimmt?
(c) Wie ist für eine Potenzreihe $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ der Konvergenzradius R definiert? Weiters gebe man eine Potenzreihe $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an, welche Konvergenzradius $R = 1$ besitzt.