4.0 VU Theoretische Informatik und Logik

Teil 2 **SS 2015** **22.6.2014**

Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe
	Lösung		A

6.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Jeder Arzt hat mindestens zwei Freunde.
(*Every doctor has at least two friends.*)

(2) Nicht alle Ärzte haben einen Arzt als Vater oder als Mutter.
(*Not all doctors have a father or a mother, who is a doctor.*)

(6 Punkte)

Lösung:
Signatur $\langle\{A, F\}, \{\}, \{v, m\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$A(x)$ ... x ist ein Arzt (einstellig)
$F(x, y)$ ... x ist Freund von y (zweistellig)
Funktionssymbole:
$v(x)$ ... der Vater von x (einstellig)
$m(x)$ ... die Mutter von x (einstellig)

Formeln:
(1): $\forall x[(A(x) \supset \exists y \exists z(y \neq z \wedge F(y, x) \wedge F(z, x))]$
(2): $\neg\forall x[A(x) \supset (A(v(x)) \vee A(m(x)))]$ oder (äquivalent) $\exists x[A(x) \wedge \neg A(v(x)) \wedge \neg A(m(x))]$

7.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:
$\forall x(Q(x, y) \wedge \neg Q(x, h(b, x))) \vee \exists y Q(y, h(z, b))$
Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen; spezifizieren Sie die beiden Interpretationen formal und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung informell.

(6 Punkte)

Lösung:
Modell $\mathcal{I} = \langle D, \Phi, \xi\rangle$:
$D = \omega$; $\Phi(Q) =$"$<$", $\Phi(h) =$"$+$", $\Phi(b) = 1$, $\xi(y) = \xi(z) = 0$, beliebig sonst.

Gemäß dieser Interpretation besagt das rechte Disjunkt: Es gibt eine natürliche Zahl, die kleiner als 1 ist. Das ist richtig; daher ist auch die gesamte Disjunktion wahr.

Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle D, \Phi, \xi\rangle$:
$D = \omega$; $\Phi(Q) =$"$<$", $\Phi(h)(m, n) = 0$, $\Phi(b) = 1$, $\xi(y) = \xi(z) = 0$, beliebig sonst.

Gemäß dieser Interpretation besagt das linke Disjunkt: Alle natürliche Zahlen sind gleichzeitig kleiner und nicht kleiner als 0. Auch das rechte Disjunkt ist falsch, denn es besagt, dass es eine natürliche Zahl kleiner 0 gibt. Damit ist die gesamte Disjunktion falsch.

8.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:
Aus $\forall y(\exists x P(x,y) \supset Q(h(h(y))))$ und $\forall x\, h(x) = x$ folgt $\forall x \forall y(P(x,y) \supset Q(y))$.
Markieren Sie γ- und δ-Formeln und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln.

(6 Punkte)

Lösung:
Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass die Konsequenzbehauptung richtig ist:

(1)	$\mathbf{t} : \forall y(\exists x P(x,y) \supset Q(h(h(y))))$				Annahme – γ-Formel
(2)	$\mathbf{t} : \forall x\, h(x) = x$				Annahme – γ-Formel
(3)	$\mathbf{f} : \forall x \forall y(P(x,y) \supset Q(y))$				Annahme – δ-Formel
(4)	$\mathbf{f} : \forall y(P(a,y) \supset Q(y))$				von 3 δ-Formel
(5)	$\mathbf{f} : P(a,b) \supset Q(b)$				von 4
(6)	$\mathbf{t} : P(a,b)$				von 5
(7)	$\mathbf{f} : Q(b)$				von 5
(8)	$\mathbf{t} : \exists x P(x,b) \supset Q(h(h(b)))$				von 1
(9)	$\mathbf{f} : \exists x P(x,b)$	von 8 γ-Formel	(10)	$\mathbf{t} : Q(h(h(b)))$	von 8
(11)	$\mathbf{f} : P(a,b)$	von 9	(12)	$\mathbf{t} : h(b) = b$	von b
	$\times$	Wid.: 6/11	(13)	$\mathbf{t} : Q(h(b))$	$S^{=}12 \rightarrow 10$
			(14)	$\mathbf{t} : Q(b)$	$S^{=}12 \rightarrow 13$
				$\times$	Wid.: 7/14

9.) Beweisen Sie folgende Korrektheitsaussage über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ mit dem Hoare-Kalkül:

$$y \leq x\ \{\underline{\texttt{if}}\ x > y\ \underline{\texttt{then}}\ \underline{\texttt{begin}}\ y \underline{\leftarrow} 3 \cdot x \underline{;}\ x \underline{\leftarrow} y - 2\ \underline{\texttt{end}}\ \underline{\texttt{else}}\ x \underline{\leftarrow} x - 6\}\ y > x$$

Benennen Sie die verwendeten Regeln und vergessen Sie nicht, die Gültigkeit der resultierenden Formeln im Datentyp $\mathbb{Z}$ zu begründen.

(6 Punkte)

Lösung:

$$\text{(H3)}\ \dfrac{\text{(T2)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(1)}{(y \leq x \wedge x > y) \supset (y > x)\left[\begin{smallmatrix} y-2 \\ x \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 3\cdot x \\ y \end{smallmatrix}\right]}}{(y \leq x \wedge x > y)\ \{y \underline{\leftarrow} 3 \cdot x\}\ (y > x)\left[\begin{smallmatrix} y-2 \\ x \end{smallmatrix}\right]}}{(y \leq x \wedge x > y)\ \{\underline{\texttt{begin}}\ y \underline{\leftarrow} 3 \cdot x \underline{;}\ x \underline{\leftarrow} y - 2\ \underline{\texttt{end}}\}\ (y > x)} \qquad \text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(2)}{(y \leq x \wedge \neg x > y) \supset (y > x)\left[\begin{smallmatrix} x-6 \\ x \end{smallmatrix}\right]}}{(y \leq x \wedge \neg x > y)\ \{x \underline{\leftarrow} x - 6\}\ (y > x)}}{y \leq x\ \{\underline{\texttt{if}}\ x > y\ \underline{\texttt{then}}\ \underline{\texttt{begin}}\ y \underline{\leftarrow} 3 \cdot x \underline{;}\ x \underline{\leftarrow} y - 2\ \underline{\texttt{end}}\ \underline{\texttt{else}}\ x \underline{\leftarrow} x - 6\}\ (y > x)}$$

Nachweis der Gültigkeit von (1) und (2) in $\mathbb{Z}$:

(1): $(y > x)\left[\begin{smallmatrix} y-2 \\ x \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 3\cdot x \\ y \end{smallmatrix}\right] = (y > y - 2)\left[\begin{smallmatrix} 3\cdot x \\ y \end{smallmatrix}\right] = (3 \cdot x > 3 \cdot x - 2)$. Daher ist die rechte Seite der Implikation und somit die ganze Implikation immer wahr.

(2): Aus der linken Seite der Implikation $(\, y \leq x \wedge \neg x > y\,)$ folgt $y = x$. Daher lässt sich die rechte Seite $(y > x)\left[\begin{smallmatrix} x \\ x-6 \end{smallmatrix}\right] = (y > x - 6)$ zu $x > x - 6$ umformen, was in jeder Umgebung wahr ist. Somit ist die gesamte Implikation als gültig in $\mathbb{Z}$ nachgewiesen.

10.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Die Formel $\forall y P(f(y,x)) \supset \exists z Q(y, f(a,z))$ enthält gemäß unseren Schreibkonventionen genau zwei freie Variablenvorkommen.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: x kommt in der linken Teilformel und y in der rechten Teilformel frei vor. Hingegen ist a gemäß der Schreibkonventionen eine Konstante und keine Variable.

- Es gibt prädikatenlogische Formeln, die keine Modelle mit endlicher Domäne haben.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Unerfüllbare Formeln haben gar kein Modell. (Es gibt übrigens auch *erfüllbare* Formeln, die nur unendliche Modelle haben; siehe Folie 388.)

- Wenn in einem Kalkül keine einzige PL-Formel beweisbar ist, dann ist der Kalkül korrekt, aber unvollständig.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Da es keine beweisbaren Formeln gibt, gibt es auch kein Gegenbeispiel zur Korrektheit. Anderseits ist der Kalkül sicher unvollständig, da es gültige Formeln gibt.

(6 Punkte)