Analysis - UE4

Styll Patrick

27. April 2022

1 - Beispiel 109

Man zeige mit Hilfe der Eulerschen Formeln den angegebenen Summensatz:

$$cos(u+v) = cos(u)cos(v) - sin(u)sin(v)$$

Definition - Eulersche Formel: $e^{ix} = cos(x) + isin(x)$

Prinzipiell wird hier lediglich eines der Additionstheoreme bewiesen. Einen hilfreichen Hinweis zum Erhalten der nötigen Lösung erhalten wir aus dem Buch, auf Seite 184/185, wobei der Beweis unmittelbar aus $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ folge. Des Weiteren sehen wir beim Betrachten der oben angegeben Eulerschen Formel folgenden Zusammenhang:

$$cos(x) = \Re(e^{ix}), sin(x) = \Im(e^{-ix})$$

Prinzipiell lässt sich daraus bereits der Beweis folgern:

$$cos(u+v) = \Re(e^{i(u+v)}) = \Re(e^{iu}e^{iv})$$

$$\Re((cos(u) + isin(u)(cos(v) + isin(v)))$$

$$\Re(cos(u)cos(v) + icos(u)sin(v) + isin(u)cos(v) + i^2 sin(u)sin(v))$$

$$cos(u)cos(v) - sin(u)sin(v)$$

Anmerkung: Genauso, nur eben mit $\Im$, kann das Additionstheorem für *sin* bewiesen werden.

2 - Beispiel 113

Mit Hilfe der Rechenregeln für die Exponentialfunktion e^x beweise man für den natürlichen Logarithmus $ln(x)$ folgende Eigenschaften:

$$ln(xy) = ln(x) + ln(y),\ ln(x^y) = yln(x)$$

$ln(xy) = ln(x) + ln(y)$

$e^{ln(xy)} = e^{ln(x)+ln(y)} = e^{ln(x)}e^{ln(y)}$

$xy = xy$

$ln(x^y) = yln(x)$

$e^{ln(x^y)} = e^{yln(x)} = (e^{ln(x)})^y$

$x^y = x^y$

3 - Beispiel 117

Man zeichne den Graphen der Funktion $f(x)$ und bestimme alle Stellen, an denen f(x) stetig ist. ($sgn(x) = 1$ für $x > 0$, $sgn(x) = -1$ für $x < 0$ und $sgn(0) = 0$).

$$f(x) = x \cdot sgn(sin(x))$$

Das Signum hängt somit vom Sinus ab - wir sehen, dass die Funktion immer 0 sein wird, sobald $x = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{N}$. Grundsätzlich lässt sich somit die Funktion leicht bestimmen, und sie sieht in etwa folgendermaßen aus:

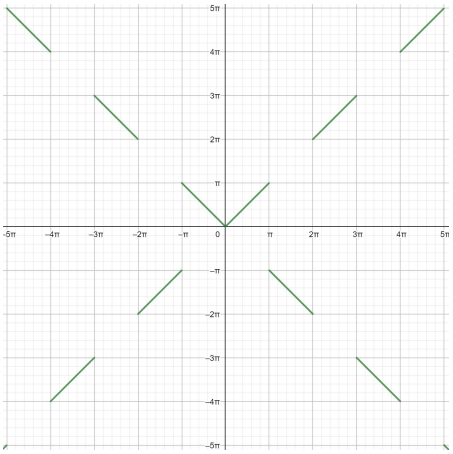

Abbildung 1: $f(x) = x \cdot sgn(sin(x))$

Definition - Stetigkeit: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* an der Stelle $x_0 \in D$, wenn $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Die Funktion f heißt *stetig in* D, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in D$ stetig ist.
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* an der Stelle $x_0 \in D$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Allgemein und vereinfacht gilt: Eine stetige Funktion kann nahtlos, also "ohne Absetzen", gezeichnet werden. Dies gilt in $f(x)$ offensichtlich nicht, da wegen $sgn(sin(x))$ bei allen $x = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ der Funktionswert immer 0 ist. Dennoch kann man sagen, dass die Teile von f(x) "zwischen den Sprüngen'ßtetig sind. Somit kann gelten, dass die Funktion stetig ist, für $\mathbb{R}/k\pi, k \in \mathbb{Z}$.