1. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung

Marion Brandsteidl, Lara Spendier, Gernot Salzer

2. November 2012

Aufgabe 1 (0.3 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Schlussfolgerungen an, wie die zugrunde liegende Inferenzregel lautet. Handelt es sich um eine gültige Inferenzregel? Wenn ja, geben Sie eine weitere Schlussfolgerung an, der dieselbe Regel zugrunde liegt. Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Felix Baumgartner ist ein Extremsportler. Felix Baumgartner kann Fallschirm springen. Daher können alle Extremsportler Fallschirm springen.

(b) Alle Herdentiere leben in Afrika. Alle Büffel sind Herdentiere. Daher leben alle Büffel in Afrika.

(c) Güterzüge haben keinen Speisewagen. Alle Züge sind Güterzüge. Daher haben Züge keinen Speisewagen.

Lösung

(a)
$$\begin{array}{l} \text{Felix Baumgartner ist ein Extremsportler.} \\ \text{Felix Baumgartner kann Fallschirm springen.} \\ \hline \text{Alle Extremsportler können Fallschirm springen.} \end{array} \qquad \text{Inferenzregel: } \begin{array}{l} x \text{ ist ein } y. \\ x \text{ kann } z. \\ \hline \text{Alle } y \text{ können } z. \end{array}$$

Diese Inferenzregel ist **nicht gültig**. Anderes Gegenbeispiel:

$$\begin{array}{l} \text{Der Delphin ist ein Säugetier.} \quad \text{(richtig)} \\ \text{Der Delphin kann schwimmen.} \quad \text{(richtig)} \\ \hline \text{Alle Säugetiere können schwimmen.} \quad \text{(falsch)} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{l} \text{Alle Herdentiere leben in Afrika.} \\ \text{Alle Büffel sind Herdentiere.} \\ \hline \text{Alle Büffel leben in Afrika.} \end{array} \qquad \text{Inferenzregel: } \begin{array}{l} \text{Alle } x \text{ leben in } y. \\ \text{Alle } z \text{ sind } x. \\ \hline \text{Alle } z \text{ leben in } y. \end{array}$$

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Andere Schlussfolgerung mit der selben Inferenzregel:

Alle Studenten sind inskribiert.
Alle FMOD-Teilnehmer sind Studenten.
Alle FMOD-Teilnehmer sind inskribiert.

(c) Güterzüge haben keinen Speisewagen.
Alle Züge sind Güterzüge.
Züge haben keinen Speisewagen.

Inferenzregel: x hat nicht y.
Alle z sind x.
z haben nicht y.

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Andere Schlussfolgerung mit der selben Inferenzregel:

Kugeln haben keine Ecken.
Bälle sind Kugeln.
Bälle haben keine Ecken.

Aufgabe 2 (0.3 Punkte)

Analysieren Sie folgende Sätze und identifizieren Sie ihre logische Struktur sowie die Elementaraussagen.

(a) Ich habe viel zu tun, aber keine Zeit.

(b) Menschen mögen Katzen oder Hunde.

(c) Wir gehen entweder in den Zoo oder ins Kino, beides ist nicht möglich.

(d) Ich spiele nur dann Lotto, wenn es einen Fünffach-Jackpot gibt.

(e) Wenn es regnet, dann sagen wir das Eislaufen ab.

(f) Ich höre Musik, wenn ich traurig bin.

(g) Wenn ich meine Orchidee nicht gieße, dann stirbt sie.

(h) Das Fluchtauto war rot oder grün und hatte weder vorne noch hinten ein Nummernschild.

Lösung

(a) *Ich habe viel zu tun, aber keine Zeit.*
Elementaraussagen:

(x) „ich habe viel zu tun“

(y) „ich habe Zeit“

Logische Struktur: x und nicht y.

(b) *Menschen mögen Katzen oder Hunde.*
Elementaraussagen:

(x) „Menschen mögen Katzen“

(y) „Menschen mögen Hunde"

Logische Struktur: x oder y.

(c) *Wir gehen entweder in den Zoo oder ins Kino, beides ist nicht möglich.*
Elementaraussagen:

(x) „wir gehen in den Zoo"

(y) „wir gehen ins Kino"

Logische Struktur: Entweder x oder y. (ausschließendes „oder")

(d) *Ich spiele nur dann Lotto, wenn es einen Fünffach-Jackpot gibt.*
Elementaraussagen:

(x) „ich spiele Lotto"

(y) „es gibt einen Fünffach-Jackpot"

Logische Struktur: Wenn x, dann y.

Achtung! „Wenn y, dann x." oder „x wenn y" sind falsch. „nur dann – wenn" ist das Gegenteil von „dann – wenn" bzw. „wenn – dann". Überlegen Sie: Was lässt sich über mein Lottospiel sagen, wenn es einen Fünffach-Jackpot gibt? Gar nichts. Was weiß man, wenn ich Lotto spiele? Dass es einen Fünffach-Jackpot geben muss. Daher: Wenn Lottospiel (x), dann Jackpot (y).

(e) *Wenn es regnet, dann sagen wir das Eislaufen ab.*
Elementaraussagen:

(x) „es regnet"

(y) „wir sagen das Eislaufen ab"

Logische Struktur: Wenn x, dann y.

(f) *Ich höre Musik, wenn ich traurig bin.*
Elementaraussagen:

(x) „ich höre Musik"

(y) „ich bin traurig"

Logische Struktur: Wenn y, dann x.

(g) *Wenn ich meine Orchidee nicht gieße, dann stirbt sie.*
Elementaraussagen:

(x) „ich gieße meine Orchidee"

(y) „die Orchidee stirbt"

Logische Struktur: Wenn nicht x, dann y.

(h) *Das Fluchtauto war rot oder grün und hatte weder vorne noch hinten ein Nummernschild.*
Elementaraussagen:

(w) „das Fluchtauto war rot“

(x) „das Fluchtauto war grün“

(y) „das Fluchtauto hatte vorne ein Nummernschild“

(z) „das Fluchtauto hatte hinten ein Nummernschild“

Logische Struktur: (w oder x) und nicht y und nicht z.

Aufgabe 3 (0.3 Punkte)

Beschreiben Sie jene zweistelligen Funktionen der Aussagenlogik, die nicht in der Vorlesung besprochen wurden. (Siehe Vorlesungspräsentationen vom 2. und 9. Oktober).

Lösung

Folgende Funktionen wurden nicht gesondert behandelt und benannt:

x	y	f_0	f_2	f_3	f_4	f_5	f_{10}	f_{12}	f_{15}
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1

Sie haben folgende Bedeutung ($x, y \in \mathbb{B}$):

$f_0(x,y) = 0$	Konstante false mit zwei Argumenten
$f_2(x,y) = \mathsf{not}(x \text{ if } y)$	negierte ‘verkehrte’ Implikation
$f_3(x,y) = \mathsf{not}\ x$	Negation des ersten Arguments
$f_4(x,y) = \mathsf{not}(x \text{ implies } y)$	negierte Implikation
$f_5(x,y) = \mathsf{not}\ y$	Negation des zweiten Arguments
$f_{10}(x,y) = y$	Projektion auf das zweite Argument
$f_{12}(x,y) = x$	Projektion auf das erste Argument
$f_{15}(x,y) = 1$	Konstante true mit zwei Argumenten

Aufgabe 4 (0.4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{implies}, \mathsf{not}\}$ vollständig ist für die Klasse der aussagenlogischen Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{and}, \mathsf{or}\}$ nicht vollständig ist.

Lösung

(a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Funktionsmenge $\{\mathsf{nand}\}$ vollständig ist. Es genügt daher zu zeigen, dass diese Funktion mit implies und not dargestellt werden kann. Es gilt

$$\mathsf{nand}(x, y) = \mathsf{implies}(x, \mathsf{not}(y))$$

wie durch Auswertung in den vier möglichen Wahrheitsbelegungen überprüft werden kann:

x	y	**nand(x, y)**	not(y)	**implies(x, not(y))**
0	0	**1**	1	**1**
0	1	**1**	0	**1**
1	0	**1**	1	**1**
1	1	**0**	0	**0**

(b) Es genügt von einer einzigen Funktion zu zeigen, dass sie nicht durch and und or darstellbar ist. Wir untersuchen, welche einstelligen Funktionen darstellbar sind, indem wir vom einzigen Argument x ausgehend die beiden Funktionen in beliebiger Reihenfolge anwenden. Wir stellen zunächst fest, dass and $(x, x) = x$ und or $(x, x) = x$ gilt. Wir stellen daher folgende Behauptung auf.

Induktionsbehauptung: Jeder Ausdruck bestehend aus and, or und x ist äquivalent zu x.

Der Beweis erfolgt induktiv nach der Anzahl n der Anwendungen der Funktionen and bzw. or.

Induktionsanfang $n = 0$: Der einzige Ausdruck ohne Anwendung von and und or ist x selber. Dafür gilt unsere Behauptung.

Induktionshypothese: Unsere Behauptung gelte für alle Ausdrücke mit n oder weniger Anwendungen von and bzw. or.

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass unter der Annahme, dass die Induktionshypothese zutrifft, unsere Behauptung auch für Ausdrücke mit $n + 1$ Anwendungen von and bzw. or gilt. Wir haben also einen Ausdruck $\mathsf{and}(f(x), g(x))$ bzw. $\mathsf{or}(f(x), g(x))$ vor uns, bei dem sowohl f als auch g mit n oder weniger Anwendungen von and bzw. or definiert sind. Laut Hypothese ist jeder der beiden Ausdrücke äquivalent zu x. Wie wir oben aber festgestellt haben, liefert and bzw. or mit dem Argument x wieder nur x.

Da somit die einzigen darstellbaren einstelligen Funktionen äquivalent zu x sind, ist z.B. die einstellige Funktion not nicht darstellbar. Die Menge $\{\mathsf{and}, \mathsf{or}\}$ ist daher nicht funktional vollständig.

Anmerkung für Puristen: Die Argumentation ist ein wenig schlampig, da sie Funktionen und Werte mischt. Genau genommen wollen wir nachweisen, dass ausgehend von der identischen Abbildung id (definiert durch $\mathsf{id}(x) = x$ für alle x) durch Anwendung von and bzw. or wieder nur id entsteht. Mehr dazu unter dem Stichwort „Klon“ (engl. *clone*) im Internet oder in Büchern zur Algebra.

Aufgabe 5 (0.3 Punkte)

Sei $\mathcal{M}$ die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

(m1) $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\} \subseteq \mathcal{M}$

(m2) Wenn $u \in \mathcal{M}$, dann auch $\mathtt{+}uu \in \mathcal{M}$.

(m3) Wenn $u, v \in \mathcal{M}$, dann auch $u\mathtt{*}v \in \mathcal{M}$.

(a) Geben Sie die Mengen $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ der stufenweise Konstruktion von $\mathcal{M}$ an. (Siehe die Vorlesungspräsentation vom 9.10.2012, Seite 21.) Die Menge $\mathcal{M}_2$ enthält bereits mehr als 60 Elemente; es genügt, 10 typische Elemente anzugeben.

(b) Zeigen Sie, dass die Zeichenkette `+1*+001*+00` in der Menge $\mathcal{M}$ liegt.

(c) Erklären Sie, warum die Zeichenkette `++0*0+0*0` nicht in der Menge $\mathcal{M}$ liegen kann.

Lösung

(a) $\mathcal{M}_0 = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$,

$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0 \cup \{\mathtt{+00}, \mathtt{+11}, \mathtt{0*0}, \mathtt{0*1}, \mathtt{1*0}, \mathtt{1*1}\}$,

$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \cup \{$`++00+00`, `++11+11`, `+0*00*0`, `+0*10*1`, `+1*01*0`, `+1*11*1`,
`0*+00`, `0*+11`, `0*0*0`, `0*0*1`, `0*1*0`, `0*1*1`,
`1*+00`, `1*+11`, `1*0*0`, `1*0*1`, `1*1*0`, `1*1*1`,
`+00*0`, `+00*1`, `+00*+00`, `+00*+11`, `+00*0*0`, `+00*0*1`, `+00*1*0`, `+00*1*1`,
`+11*0`, `+11*1`, `+11*+00`, `+11*+11`, `+11*0*0`, `+11*0*1`, `+11*1*0`, `+11*1*1`,
`0*0*+00`, `0*0*+11`, `0*0*0*0`, `0*0*0*1`, `0*0*1*0`, `0*0*1*1`,
`0*1*+00`, `0*1*+11`, `0*1*0*0`, `0*1*0*1`, `0*1*1*0`, `0*1*1*1`,
`1*0*+00`, `1*0*+11`, `1*0*0*0`, `1*0*0*1`, `1*0*1*0`, `1*0*1*1`,
`1*1*+00`, `1*1*+11`, `1*1*0*0`, `1*1*0*1`, `1*1*1*0`, `1*1*1*1`$\}$

(b)

i. $\mathtt{0} \in \mathcal{M}$	Eigenschaft m1
ii. Wegen $\mathtt{0} \in \mathcal{M}$ (i) gilt $\mathtt{+00} \in \mathcal{M}$.	Eigenschaft m2
iii. $\mathtt{1} \in \mathcal{M}$	Eigenschaft m1
iv. Wegen $\mathtt{1} \in \mathcal{M}$ (iii) und $\mathtt{+00} \in \mathcal{M}$ (ii) gilt $\mathtt{1*+00} \in \mathcal{M}$.	Eigenschaft m3
v. Wegen $\mathtt{1*+00} \in \mathcal{M}$ (iv) gilt $\mathtt{+1*+001*+00} \in \mathcal{M}$.	Eigenschaft m2

(c) Um zu zeigen, dass ein bestimmtes Wort nicht in der definierten Menge liegt, muss man eine Eigenschaft finden, die alle Wörter in der Menge besitzen, nicht aber das bestimmte Wort. Für die Wahl dieser Eigenschaft gibt es verschiedene Möglichkeiten; hier zwei davon.

Argumentation über die Länge der Wörter. Bei der stufenweisen Konstruktion der gegebenen Menge $\mathcal{M}$ besitzen jene Wörter in $\mathcal{M}_i$, die neu hinzukommen (die also noch nicht in $\mathcal{M}_{i-1}$ vorhanden sind), mindestens die Länge $2i + 1$; das lässt sich mit einem kurzen Induktionsbeweis zeigen. Da das Wort `++0*0+0*0` die Länge 9 besitzt, müsste es spätestens ab $i = 4$ in den stufenweise konstruierten Mengen $\mathcal{M}_i$

liegen. Wenn man also $\mathcal{M}_4$ konstruiert und feststellt, dass das gesuchte Wort nicht vorkommt, liegt es nicht in $\mathcal{M}$.

Diese Art von Argumentation lässt sich immer dann verwenden, wenn alle Abschlusseigenschaften der induktiven Definition zu längeren Worten führen. Allerdings kann es aufwändig sein, alle Worte bis zur benötigten Länge tatsächlich zu generieren. Etwa besitzt $\mathcal{M}_4$ in diesem Beispiel bereits 9 541 122 Elemente.

Argumentation über die besondere Form der `+`-Wörter. Wir betrachten das Ende `+0*0` des zu untersuchenden Wortes `++0*0+0*0`. Das Zeichen `+` kann nur durch die Eigenschaft m2 in ein Wort gelangen. Dann müssen diesem Symbol aber zwei Kopien eines Wortes u folgen. Für u kommt hier nur `0` in Frage, da $u =$ `0*` nach Verdopplung bereits länger als die drei vorhandenen Zeichen wäre. Somit müssen gemäß Eigenschaft m2 auf `+` zwei `0`er folgen, was offenbar nicht der Fall ist. Somit kann `++0*0+0*0` (und jedes andere Wort, das mit `+0*0` endet) nicht in $\mathcal{M}$ liegen.

Diese Argumentation ist kurz, allerdings benützt sie eine spezielle Eigenschaft der vorliegenden Menge $\mathcal{M}$ und ist nicht auf andere Fälle übertragbar; dort muss eine andere spezifische Eigenschaft gefunden werden.

Aufgabe 6 (0.3 Punkte)

Sei F die Formel $(\neg B \wedge ((A \vee B) \supset C))$.

(a) Zeigen Sie, dass F syntaktisch korrekt ist.

(b) Werten Sie $\mathsf{val}_I(F)$ für $I(A) = 1$, $I(B) = 0$ und $I(C) = 0$ schrittweise aus.

(c) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel um festzustellen, ob die Formel F gültig, erfüllbar, widerlegbar und/oder unerfüllbar ist.

Lösung

(a) Die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln ist die kleinste Menge, für die gilt:

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

$\mathcal{V} = \{A, B, C, \dots, A_0, A_1, \dots\}$ (aussagenlogische Variablen)

Wir zeigen, dass $(\neg B \wedge ((A \vee B) \supset C))$ eine aussagenlogische Formel gemäß dieser Definition ist.

- Die Variablen `A`, `B` und `C` sind Formeln (a1).
- Da `A` und `B` Formeln sind, ist auch $(A \vee B)$ eine Formel (a4).
- Da $(A \vee B)$ sowie `C` Formeln sind, ist auch $((A \vee B) \supset C)$ eine Formel (a4).

- $\neg B$ ist eine Formel, da `B` eine Formel ist (a3).
- Da $((A \lor B) \supset C)$ sowie $\neg B$ Formeln sind, ist auch $(\neg B \land ((A \lor B) \supset C))$ eine Formel.

(b)
$$
\begin{aligned}
\mathsf{val}_I(\neg B \land ((A \lor B) \supset C)) &= \mathsf{val}_I(\neg B) \text{ and } \mathsf{val}_I((A \lor B) \supset C) \\
&= \text{not } \mathsf{val}_I(B) \text{ and } (\mathsf{val}_I(A \lor B) \text{ implies } \mathsf{val}_I(C)) \\
&= \text{not } 0 \text{ and } ((\mathsf{val}_I(A) \text{ or } \mathsf{val}_I(B)) \text{ implies } 0) \\
&= 1 \text{ and } ((1 \text{ or } 0) \text{ implies } 0) \\
&= 1 \text{ and } ((1 \text{ implies } 0) \\
&= 1 \text{ and } 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(c) Die Formel F ist erfüllbar, da es eine Interpretation I gibt, in der sie wahr ist, etwa $I(A) = I(B) = I(C) = 0$. Sie ist auch widerlegbar, da es eine Interpretation I gibt, in der sie falsch ist, etwa $I(A) = I(B) = I(C) = 1$. Diese Interpretationen lassen sich mittels der Wahrheitstafel systematisch finden:

A	B	C	$(\neg B$	$\land$	$((A \lor B)$	$\supset C))$
1	1	1	0	**0**	1	1
1	1	0	0	**0**	1	0
1	0	1	1	**1**	1	1
1	0	0	1	**0**	1	0
0	1	1	0	**0**	1	1
0	1	0	0	**0**	1	0
0	0	1	1	**1**	0	1
0	0	0	1	**1**	0	1

Aufgabe 7 (0.4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Formeln $(A \land B) \supset \neg(C \supset A)$ und $(A \equiv \neg B) \lor \neg A$ äquivalent sind

(a) mithilfe einer Wahrheitstafel;

(b) durch algebraische Umformungen.

Lösung

(a) Wahrheitstafel:

A	B	C	$(A \wedge B) \supset \neg(C \supset A)$	$(A \equiv \neg B) \vee \neg A$
0	0	0	0 **1** 0 1	0 1 **1** 1
0	0	1	0 **1** 1 0	0 1 **1** 1
0	1	0	0 **1** 0 1	1 0 **1** 1
0	1	1	0 **1** 1 0	1 0 **1** 1
1	0	0	0 **1** 0 1	1 1 **1** 0
1	0	1	0 **1** 0 1	1 1 **1** 0
1	1	0	1 **0** 0 1	0 0 **0** 0
1	1	1	1 **0** 0 1	0 0 **0** 0

Da die Ergebnisspalten der beiden Formeln identisch sind, sind die Formeln äquivalent.

Arbeitsvereinfachung: Es müssen nicht alle Teilformeln in allen Interpretationen ausgewertet werden, wenn das Ergebnis bereits nach Auswertung einer Teilformel feststeht. Etwa liefert die Implikation in der ersten Formel wahr, wenn ihr erstes Argument falsch ist. Wir erhalten die folgende vereinfachte Tabelle, wenn wir mit der Auswertung der Teilformeln $A \wedge B$ bzw. $\neg A$ beginnen.

A	B	C	$(A \wedge B) \supset \neg(C \supset A)$	$(A \equiv \neg B) \vee \neg A$
0	0	0	0 **1**	**1** 1
0	0	1	0 **1**	**1** 1
0	1	0	0 **1**	**1** 1
0	1	1	0 **1**	**1** 1
1	0	0	0 **1**	1 1 **1** 0
1	0	1	0 **1**	1 1 **1** 0
1	1	0	1 **0** 0 1	0 0 **0** 0
1	1	1	1 **0** 0 1	0 0 **0** 0

(b) Wir bringen beide Formeln in Normalform. Da wir dabei identische Formeln erhalten, sind die ursprünglichen Formeln äquivalent.

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) \supset \neg(C \supset A) &= \neg(A \wedge B) \vee \neg(\neg C \vee A) && \text{Ersetzen von } \supset \text{ durch } \neg,\ \vee \\
&= \neg A \vee \neg B \vee (C \wedge \neg A) && \text{De Morgan, Doppelnegation} \\
&= \neg A \vee \neg B && \text{Absorption} \\
(A \equiv \neg B) \vee \neg A &= (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg\neg B) \vee \neg A && \text{Ersetzen von } \equiv \text{ durch } \neg,\ \vee,\ \wedge \\
&= (A \wedge \neg B) \vee \neg A && \text{Absorption} \\
&= (A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A) && \text{Distributivität} \\
&= \top \wedge (\neg B \vee \neg A) && \\
&= \neg B \vee \neg A && \text{Kommutativität} \\
&= \neg A \vee \neg B &&
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8 (0.3 Punkte)

Ist die Formel $\neg C$ eine logische Konsequenz der drei Formeln $A \vee B$, $\neg B$ und $C \supset \neg A$? Wie sieht die aussagenlogische Formel aus, die dieser Konsequenzbeziehung entspricht?

Lösung

$I(A)$	$I(B)$	$I(C)$	$A \vee B,$	$\neg B,$	$C \supset \neg A$	$\models_I$	$\neg C$
0	0	0	0	1	1	✓	1
0	0	1	0	1	1	✓	0
0	1	0	1	0	1	✓	1
0	1	1	1	0	1	✓	0
1	0	0	1	1	1	✓	1
1	0	1	1	1	0	✓	0
1	1	0	1	0	1	✓	1
1	1	1	1	0	0	✓	0

Die Formel $\neg C$ ist somit eine logische Konsequenz der Prämissen.
Arbeitsvereinfachung: Ist in einer Interpretation eine der Prämissen falsch oder die Konklusion wahr, müssen die übrigen Formeln nicht mehr ausgewertet werden, da die Beziehung $\models_I$ dann bereits erfüllt ist. Umgekehrt kann man die Erstellung der Tabelle abbrechen, sobald man eine Interpretation I findet, für die $\models_I$ nicht gilt. Wertet man in diesem Beispiel die Formeln von links nach rechts aus, ergibt sich folgende vereinfachte Tabelle:

$I(A)$	$I(B)$	$I(C)$	$A \vee B,$	$\neg B,$	$C \supset \neg A$	$\models_I$	$\neg C$
0	0	0	0			✓	
0	0	1	0			✓	
0	1	0	1	0		✓	
0	1	1	1	0		✓	
1	0	0	1	1	1	✓	1
1	0	1	1	1	0	✓	
1	1	0	1	0		✓	
1	1	1	1	0		✓	

Formel zur Konsequenzbeziehung: $\neg C$ ist genau dann eine logische Konsequenz der drei Formeln $A \vee B$, $\neg B$ und $C \supset \neg A$, wenn die Formel

$$((A \vee B) \wedge \neg B \wedge (C \supset \neg A)) \supset \neg C$$

gültig ist.

Aufgabe 9 (0.4 Punkte)

Sei f folgende dreistellige Funktion.

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Stellen Sie f durch eine Formel in

(a) disjunktiver

(b) konjunktiver

Normalform dar.

Lösung

(a) $(A_1 \land \neg A_2 \land \neg A_3) \lor (\neg A_1 \land A_2 \land A_3) \lor (\neg A_1 \land \neg A_2 \land A_3)$

(b) $(\neg A_1 \lor \neg A_2 \lor \neg A_3) \land (\neg A_1 \lor \neg A_2 \lor A_3) \land (\neg A_1 \lor A_2 \lor \neg A_3) \land (A_1 \lor \neg A_2 \lor A_3) \land (A_1 \lor A_2 \lor A_3)$

Aufgabe 10 (0.4 Punkte)

Sei F die Formel $(A \uparrow (B \supset C)) \lor \neg(B \lor (C \equiv \neg A))$.

(a) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.

(b) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

Lösung

(a) DNF mittels semantischer Methode:

A	B	C	$(A \uparrow$	$(B \supset C))$	$\lor$	$\neg$	$(B \lor$	$(C \equiv$	$\neg A))$
0	0	0	1	1	**1**	1	0	0	1
0	0	1	1	1	**1**	0	1	1	1
0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1
0	1	1	1	1	**1**	0	1	1	1
1	0	0	0	1	**0**	0	1	1	0
1	0	1	0	1	**1**	1	0	0	0
1	1	0	1	0	**1**	0	1	1	0
1	1	1	0	1	**0**	0	1	0	0

Aus dieser Tafel lässt sich folgende DNF ablesen:

$$(\neg A \land \neg B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land C) \lor (\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land B \land C) \lor (A \land \neg B \land C) \lor (A \land B \land \neg C)$$

Die ersten vier Zeilen der Tabelle lassen sich kompakter durch $\neg A$ beschreiben, da die Werte von B und C für das Ergebnis keine Rolle spielen. Damit erhalten wir

$$\neg A \lor (A \land \neg B \land C) \lor (A \land B \land \neg C) \ .$$

Mittels des Distributivitätsgesetzes lässt sich diese Formel weiter vereinfachen zu

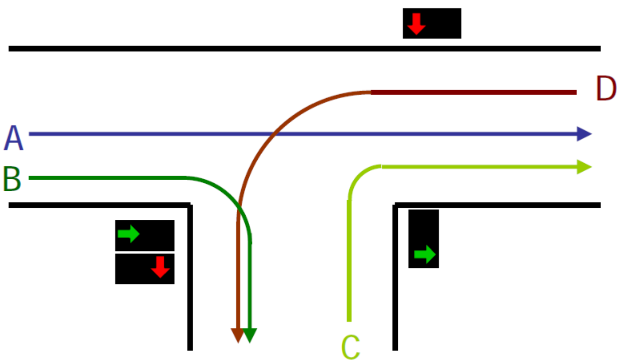
$$\neg A \lor (\neg B \land C) \lor (B \land \neg C) \ .$$

(b) KNF mittels algebraischer Methode:

$$\begin{aligned}
&(A \uparrow (B \supset C)) \lor \neg(B \lor (C \equiv \neg A)) \\
&= \neg A \lor \neg(\neg B \lor C) \lor \neg(B \lor (C \land \neg A) \lor (\neg C \land A)) \\
&= \neg A \lor (B \land \neg C) \lor (\neg B \land (\neg C \lor A) \land (C \lor \neg A)) \\
&= ((\neg A \lor B) \land (\neg A \lor \neg C)) \lor (\neg B \land (\neg C \lor A) \land (C \lor \neg A)) \\
&= (\neg A \lor B \lor \neg B) \land (\neg A \lor B \lor \neg C \lor A) \land (\neg A \lor B \lor C \lor \neg A) \\
&\quad \land (\neg A \lor \neg C \lor \neg B) \land (\neg A \lor \neg C \lor \neg C \lor A) \land (\neg A \lor \neg C \lor C \lor \neg A) \\
&= (\neg A \lor \top) \land (\top \lor B \lor \neg C) \land (\neg A \lor B \lor C) \\
&\quad \land (\neg A \lor \neg C \lor \neg B) \land (\top \lor \neg C) \land (\neg A \lor \top) \\
&= (\neg A \lor B \lor C) \land (\neg A \lor \neg B \lor \neg C)
\end{aligned}$$

Aufgabe 11 (0.4 Punkte)

Die Stadt Wien möchte die folgende Kreuzung analyiseren und bittet deshalb einen Logiker um Hilfe.



[Quelle: `www.swisseduc.ch/informatik/infotraffic/logictraffic/`]

(a) Formulieren Sie umgangssprachliche Anforderungen, die sicherstellen, dass die Verkehrsteilnehmer auf den Spuren A, B, C und D nicht zusammenstoßen. Sie brauchen dabei nur zwischen "fährt" und "fährt nicht" zu unterscheiden.

(b) Überführen Sie Ihre umgangssprachliche Anforderungen aus Teil a in eine aussagenlogische Formel. Begründen Sie, warum es in Ihrer Modellierung zu keinem Crash kommt.

Lösung

Die Skizze ist nicht eindeutig: Können A und C gleichzeitig fahren, da zwei Spuren zur Verfügung stehen, oder nicht? Falls es sich um eine österreichische Kreuzung mit Ampelregelung handelt, ist es ausgeschlossen, dass ein Abbieger Grün bekommt, solange die Ampel für den Querverkehr noch grün ist. Wir behandeln im Folgenden beide Varianten.

Variante 1: A und C dürfen nicht gleichzeitig fahren

(a) Die Verkehrsteilnehmer müssen folgende Regeln einhalten, damit es zu keiner Kollision kommt; X steht dabei für den Verkehrsteilnehmer auf Spur X.

- Wenn A fährt, dürfen weder C noch D fahren.
- Wenn B fährt, darf D nicht fahren.
- Wenn C fährt, darf A nicht fahren.
- Wenn D fährt, dürfen weder A noch B fahren.

In folgenden Situationen kommt es zu einer Kollision:

- A und C fahren gleichzeitig.
- A und D fahren gleichzeitig.
- B und D fahren gleichzeitig.

(b) Eine Aussagenvariable X steht im Folgenden für die Aussage „der Verkehrsteilnehmer auf Spur X fährt“. Die oben formulierten Regeln führen zu folgenden Formeln:

- $F_1 = A \supset \neg(C \vee D)$ (Wenn A fährt, dürfen weder C noch D fahren.)
- $F_2 = B \supset \neg D$ (Wenn B fährt, darf D nicht fahren.)
- $F_3 = C \supset \neg A$ (Wenn C fährt, darf A nicht fahren.)
- $F_4 = D \supset \neg(A \vee B)$ (Wenn D fährt, dürfen weder A noch B fahren.)

Für die Kollisionsbedingungen erhalten wir:

- $G_1 = A \wedge C$ (A und C fahren gleichzeitig.)
- $G_2 = A \wedge D$ (A und D fahren gleichzeitig.)
- $G_3 = B \wedge D$ (B und D fahren gleichzeitig.)

Sind die Formeln F_1, F_2, F_3, F_4 alle erfüllt, kann es zu keiner Kollision kommen. Das lässt sich durch folgende Konsequenzbeziehungen überprüfen:

$$\begin{aligned} F_1, F_2, F_3, F_4 &\models \neg G_1 \qquad \text{(A und C fahren nicht gleichzeitig.)} \\ F_1, F_2, F_3, F_4 &\models \neg G_2 \qquad \text{(A und D fahren nicht gleichzeitig.)} \\ F_1, F_2, F_3, F_4 &\models \neg G_3 \qquad \text{(B und D fahren nicht gleichzeitig.)} \\ \text{oder auch} F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4 &\models \neg G_1 \wedge \neg G_2 \wedge \neg G_3 \end{aligned}$$

Um die Gültigkeit zu überprüfen, wandeln wir die Formeln in KNF um:

$$\begin{aligned} &F_1 = A \supset \neg(C \vee D) = \neg A \vee (\neg C \wedge \neg D) = (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg D) \\ &F_2 = B \supset \neg D = \neg B \vee \neg D \\ &F_3 = C \supset \neg A = \neg C \vee \neg A \\ &F_4 = D \supset \neg(A \vee B) = \neg D \vee (\neg A \wedge \neg B) = (\neg D \vee \neg A) \wedge (\neg D \vee \neg B) \end{aligned}$$

Wir erhalten sechs Disjunktionen, von denen aber jede doppelt vorkommt. Für die gesamte Formel ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4 &= (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \\ &= \neg(A \wedge C) \wedge \neg(A \wedge D) \wedge \neg(B \wedge D) \\ &= \neg G_1 \wedge \neg G_2 \wedge \neg G_3 \end{aligned}$$

Nun ist offensichtlich, dass die Konsequenzbeziehung gilt, da die Prämisse äquivalent zur Konklusion ist.

Anmerkung: Bei Modellierungsproblemen ist es manchmal einfacher, an Stelle der gewünschten Situation ihr Gegenteil zu beschreiben und diese Beschreibung dann zu negieren. Im vorliegenden Beispiel ist es einfach zu beschreiben, welche Situationen *nicht* erwünscht sind, nämlich jene, die G_1 oder G_2 oder G_3 erfüllen. Als Gegenteil der unerwünschten Situationen erhält man eine Beschreibung der erwünschten, in diesem Fall $\neg(G_1 \vee G_2 \vee G_3)$. Wir erhalten dadurch direkt die vereinfachte Formel von oben.
Nachteil dieser Methode ist, dass wir keine Überprüfungsmöglichkeit haben, da bereits die Modellierung von den Kollisionen ausgeht. Beim anderen Ansatz wird die Situation auf zwei verschiedene Arten analysisert; da beide Modellierungen zum selben Ergebnis führen, steigt die Zuversicht in die Korrektheit der Formalisierung.

Variante 2: A und C dürfen gleichzeitig fahren

(a) Die Verkehrsteilnehmer müssen folgende Regeln einhalten, damit es zu keiner Kollision kommt.

- Wenn A fährt, darf D nicht fahren.
- Wenn B fährt, darf D nicht fahren.
- Wenn D fährt, dürfen weder A noch B fahren.

In folgenden Situationen kommt es zu einer Kollision:

- A und D fahren gleichzeitig.
- B und D fahren gleichzeitig.

(b) Die Regeln führen zu folgenden Formeln:

- $F_1 = A \supset \neg D$
- $F_2 = B \supset \neg D$
- $F_3 = D \supset \neg(A \vee B)$

Für die Kollisionsbedingungen erhalten wir:

- $G_1 = A \wedge D$ (A und D fahren gleichzeitig.)
- $G_2 = B \wedge D$ (B und D fahren gleichzeitig.)

Folgende Konsequenzbeziehung ist zu überprüfen:

$$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \models \neg G_1 \wedge \neg G_2$$

Aufgabe 12 (0.4 Punkte)

Linda und Martin möchten den Oktober noch nutzen um auf Urlaub zu fahren. Optimalerweise soll die Reise günstig sein, an einen entfernt gelegenen Ort führen, und man soll sich sowohl entspannen als auch Wanderungen machen können. Zumindest zwei dieser Anforderungen sollen erfüllt sein. Zwecks Beratung suchen Linda und Martin ein Reisebüro auf. Folgende Überlegungen werden angestellt:

- Laut Reisebüro lassen sich günstig und weit entfernt nicht kombinieren.
- Die Reise soll eine Fernreise sein, außer es handelt sich um einen Wanderurlaub.
- Wenn es ein Wanderurlaub wird, dann muss es auf jeden Fall auch die Möglichkeit zum Entspannen geben.
- Wenn es ein Entspannungsurlaub wird, dann muss er günstig oder weit entfernt sein.

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung jeder Aussagenvariablen an.

(b) Finden Linda und Martin eine ihren Wünschen entsprechende Urlaubsdestination? Wenn ja, welche? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

E ... Es handelt sich um einen Entspannungsurlaub.
F ... Es handelt sich um eine Fernreise.
G ... Der Urlaub ist günstig.
W ... Es handelt sich um einen Wanderurlaub.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := (E \wedge F) \vee (E \wedge G) \vee (E \wedge W) \vee$ $(F \wedge G) \vee (F \wedge W) \vee (G \wedge W)$	mind. 2 Eigenschaften
$F_1 := \neg(G \wedge F)$	nicht günstig und Fernreise
$F_2 := F \not\equiv W$	Fernreise außer wenn Wanderurlaub
$F_3 := W \supset E$	wenn Wanderurlaub, dann auch entspannend
$F_4 := E \supset (G \vee F)$	wenn entspannend, dann günstig oder Fernreise

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen E, F, G, und W, sodass die Formeln $F_0, \ldots, F_4$ wahr werden.

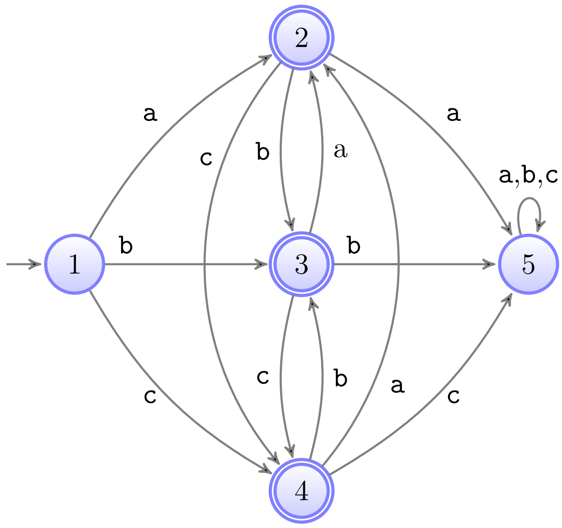
E	F	G	W	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	
0	0	0	0	0					
0	0	0	1	0					
0	0	1	0	0					
0	0	1	1	1	1	1	0		
0	1	0	0	0					
0	1	0	1	1	1	0			
0	1	1	0	1	0				
0	1	1	1	1	0				
1	0	0	0	0					
1	0	0	1	1	1	1	1	0	
1	0	1	0	1	1	0			
1	0	1	1	1	1	1	1	1	✓
1	1	0	0	1	1	1	1	1	✓
1	1	0	1	1	1	0			
1	1	1	0	1	0				
1	1	1	1	1	0				

(Arbeitsvereinfachung: Sobald eine der Formeln F_i in einer Interpretation zu falsch evaluiert, müssen die übrigen Formeln für diese Interpreation nicht mehr ausgewertet werden.)

Linda und Martin entscheiden sich entweder für einen entspannenden und günstigen Wanderurlaub oder für eine entspannende Fernreise.

Aufgabe 13 (0.4 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ der folgende endliche Automat.



(a) Geben Sie 5 Wörter an, die von $\mathcal{A}$ akzeptiert werden.

(b) Geben Sie an, welche der folgenden Wörter der Automat akzeptiert: ε, `b`, `abba`, `cbac`, `bbac`.

(c) Berechnen Sie schrittweise $\delta^*(1, \texttt{abacb})$.

(d) Beschreiben Sie $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, die von $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprache.

(e) Spezifizieren Sie $\mathcal{A}$ in tabellarischer Form. Handelt es sich bei $\mathcal{A}$ um einen determinstischen oder indeterministischen Automaten?

Lösung

(a) $\mathcal{A}$ akzeptiert zum Beispiel `a`, `ab`, `bab`, `abc` und `ababc`.

(b) $\mathcal{A}$ akzeptiert `b` und `cbac`, nicht aber ε, `abba` und `bbac`.

(c)
$$\begin{aligned}
\delta^*(1, \texttt{abacb}) &= \delta^*(\delta(1, \texttt{a}), \texttt{bacb}) \\
&= \delta^*(2, \texttt{bacb}) \\
&= \delta^*(\delta(2, \texttt{b}), \texttt{acb}) \\
&= \delta^*(3, \texttt{acb}) \\
&= \delta^*(\delta(3, \texttt{a}), \texttt{cb}) \\
&= \delta^*(2, \texttt{cb}) \\
&= \delta^*(\delta(2, \texttt{c}), \texttt{b}) \\
&= \delta^*(4, \texttt{b}) \\
&= \delta^*(\delta(4, \texttt{b}), \varepsilon) \\
&= \delta^*(3, \varepsilon) \\
&= 3
\end{aligned}$$

(d) $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\, w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^+ \mid \text{kein Symbol kommt zwei Mal hintereinander vor} \,\}$
$= \{\, w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^+ \mid w \text{ enthält weder } \mathtt{aa} \text{ noch } \mathtt{bb} \text{ noch } \mathtt{cc} \,\}$

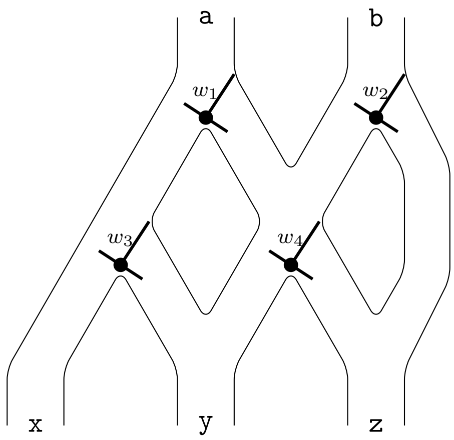
(e) $\mathcal{A} = \langle \{1,2,3,4,5\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, \delta, 1, \{2,3,4\} \rangle$, wobei die Übergangsfunktion δ durch folgende Tabelle definiert ist:

δ	a	b	c
1	2	3	4
2	5	3	4
3	2	5	4
4	2	3	5
5	5	5	5

$\mathcal{A}$ ist ein deterministischer Automat, da der momentane Zustand und die nächste Eingabe immer eindeutig den Folgezustand bestimmen. Das äußert sich in der Tabelle dadurch, dass jeder Eintrag genau einen Zustand enthält.

Aufgabe 14 (0.4 Punkte)

Max erhält zum Geburtstag ein Knobelspiel, das aus einem Würfel und einer Stahlkugel besteht. Der Würfel besitzt oben zwei Löcher (bezeichnet mit `a` und `b`) und unten drei (bezeichnet mit `x`, `y` und `z`). Wirft man die Kugel bei einem der beiden oberen Löcher hinein, kommt sie bei einem der unteren drei wieder heraus. Die Aufgabe besteht nun darin das Loch vorherzusagen, bei dem die Kugel erscheinen wird. Um die Sache schwieriger zu gestalten, sind die Eingänge nicht fest mit den Ausgängen verbunden, sondern werden durch Weichen umgeleitet, die sich mit jeder vorbeikommenden Kugel verstellen. Nach einiger Zeit verliert Max die Geduld und zerlegt den Würfel. Er findet vier Weichen (w_1 bis w_4) vor, die folgendermaßen angeordnet sind:



Bei der momentanen Weichenstellung werden die Kugeln nach links geleitet, sodass die Kugel vom Eingang `a` zum Ausgang `x` bzw. vom Eingang `b` zum Ausgang `y` rollen würde. Dabei würden die Weichen w_1 und w_3 bzw. w_2 und w_4 umgeschaltet werden. Wirft man etwa die Kugel viermal in den Eingang `a`, kommt sie zuerst bei Ausgang `x`, dann zweimal

bei Ausgang `y` und schließlich bei Ausgang `z` zum Vorschein; die Weichen befinden sich danach wieder in der Ausgangsstellung.
Modellieren Sie das Verhalten dieses Spiels mit Hilfe eines Moore- oder Mealy-Automaten. Bei Eingabe eines Wortes über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ soll der Automat jene Ausgänge liefern, bei denen die Kugel erscheinen würde. Sie können die Übergangs- und Ausgabefunktion graphisch oder als Tabelle darstellen.
Berechnen Sie $\gamma^*(q_0, \mathtt{aabaabb})$, wobei γ die Ausgabefunktion und q_0 den Anfangszustand Ihres Automaten bezeichnet.

Lösung

Der Zustand des Würfels wird durch die Stellung der vier Weichen festgelegt. Wir bezeichnen die Zustände mit $w_1w_2w_3w_4$, wobei $w_i = 0$ bedeutet, dass die Weiche rechts steht (wie in der Skizze eingezeichnet), und $w_i = 1$, dass sich die Weiche in der linken Stellung befindet. Das Spiel wird durch den Mealy-Automaten

$$\langle\{0000, 0001, \ldots, 1111\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}, \delta, \gamma, 0000\rangle$$

beschrieben, wobei die Übergangsfunktion δ und die Ausgabefunktion γ durch folgende Tabelle definiert sind.

	δ		γ	
	a	b	a	b
0000	1010	0101	x	y
0001	1011	0100	x	z
0010	1000	0111	y	y
0011	1001	0110	y	z
0100	1110	0000	x	z
0101	1111	0001	x	z
0110	1100	0010	y	z
0111	1101	0011	y	z
1000	0001	1101	y	y
1001	0000	1100	z	z
1010	0011	1111	y	y
1011	0010	1110	z	z
1100	0101	1000	y	z
1101	0100	1001	z	z
1110	0111	1010	y	z
1111	0110	1011	z	z

Für die Eingabe `aabaabb` erhalten wir $\gamma^*(0000, \mathtt{aabaabb}) = \mathtt{xyzyyzz}$.