SigSys2-UE7

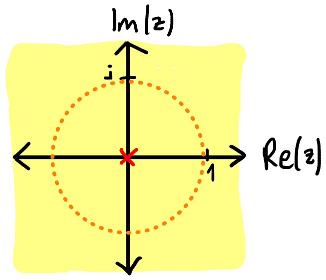
Aufgabe 4.1:
Bestimmen Sie die $\mathcal{Z}$–Transformation (inklusive Konvergenzbereich) für die angegebenen Signale und skizzieren Sie das zugehörige Pol/Nullstellendiagramm.

a) $x[n] = \delta[n-1]$

FS: $x[n+n_0] \circ\!\!-\!\!\bullet\, z^{n_0} X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

FS: $\delta[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1 \quad \forall z$

$x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(z) = z^{-1} = \frac{1}{z}$ konv. für $\underbrace{0 < |z| \leq \infty}_{R_x}$



Nullstelle bei ∞

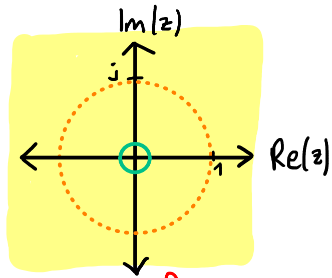
$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow$ Nullstelle bei $z=\infty$ & Polstelle bei $z=0$

b) $x[n] = \delta[n+1]$

FS: $x[n+n_0] \circ\!\!-\!\!\bullet\, z^{n_0} X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

FS: $\delta[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1 \quad \forall z$

$x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(z) = z^{1} = z$ konv. für $\underbrace{0 \leq |z| < \infty}_{R_x}$



Polstelle bei ∞

$\lim_{z\to\infty} z = \infty \Rightarrow$ Nullstelle bei $z=0$ & Polstelle bei $z=\infty$

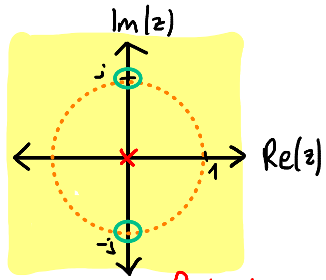
c) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$

FS: $x[n+n_0] \circ\!\!-\!\!\bullet\, z^{n_0} X(z)$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

FS: $\delta[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1 \quad \forall z$

$\delta[n-1] \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{z}$, $\delta[n+1] = z$

$x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(z) = \frac{1}{z} + z = \frac{1+z^2}{z}$



2. Polstelle bei ∞

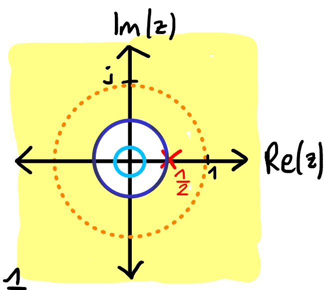
$\lim_{z\to\infty} \left(\frac{1+z^2}{z}\right) = \infty \Rightarrow$ Nullstelle bei $z=j \wedge z=-j$ & Polstelle bei $z=0 \wedge z=\infty$

konv. für $\underbrace{0 < |z| < \infty}_{R_x}$

d) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n]$

FS: $\alpha^n \sigma[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{z}{z-\alpha} \qquad |z| > |\alpha|$

$x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2z}}$



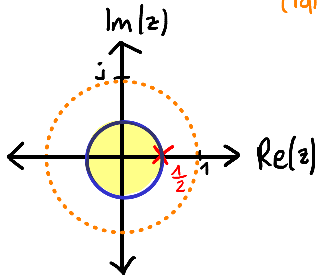
↳ Nullstelle bei $z=0$ & Polstelle bei $z=\frac{1}{2}$

konv. für $\underbrace{\frac{1}{2} < |z| \leq \infty}_{R_x}$

e) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[-n]$

unendliche geom. Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ $(|q|<1)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[-n]\cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \frac{1}{1-2z}$$



Nullstelle bei $z=\infty$ & Polstelle bei $z=\frac{1}{2}$

konv. für $0 \le \underbrace{|z|}_{R_x} < \frac{1}{2}$

f) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot z^{-n} \overset{\text{weil 0 zwei mal vorkommt}}{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n - 1 =$$

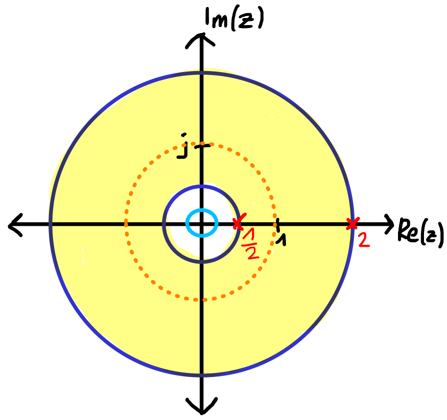
$\left|\frac{z}{2}\right| < 1$

$\left|\frac{1}{2z}\right| < 1$

$$= \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} - 1 = \frac{2}{2-z} + \frac{2z}{2z-1} - 1 =$$

$$= \frac{2(2z-1) + 2z(2-z) - (2-z)(2z-1)}{(2-z)(2z-1)} = \frac{4z - 2 + 4z - 2z^2 - (4z - 2 - 2z^2 + z)}{(2-z)(2z-1)} =$$

$$= \frac{3z}{(2-z)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$



↳ Nullstelle bei $z=0$ & Polstellen bei $z=2 \wedge z=\frac{1}{2}$

konv. für $\frac{1}{2} < |z| < 2$

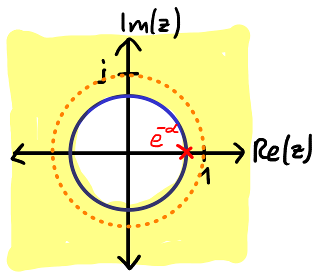
g) $x[n] = n e^{-\alpha n} \sigma[n]$ $\quad |\alpha| < 1$

FS: $n x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ -z \frac{dX(z)}{dz}$

FS: $\alpha^n \sigma[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{z}{z-\alpha}$ $\qquad |z| > |\alpha|$

$$x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(z) = -z \frac{d\left(\frac{z}{z-e^{-\alpha}}\right)}{dz} = -z\left(\frac{(z)'\cdot(z-e^{-\alpha}) - z\cdot(z-e^{-\alpha})'}{(z-e^{-\alpha})^2}\right) =$$

$$= -z\left(\frac{\cancel{z} - e^{-\alpha} - \cancel{z}}{(z-e^{-\alpha})^2}\right) = \frac{z e^{-\alpha}}{(z-e^{-\alpha})^2}$$



↳ Nullstellen bei $z=0 \wedge z=\infty$ & Polstellen bei $z=e^{-\alpha}$ (zweifach)

konv. für $e^{-\alpha} < \underbrace{|z|}_{R_x} \le \infty$

h) $x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & 0 \leq n \leq 9 \\ 0 & n > 9 \end{cases}$ $x[n] = \sigma[n] - \sigma[n-10]$

FS: $\sigma[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-1}$ $|z| > 1$

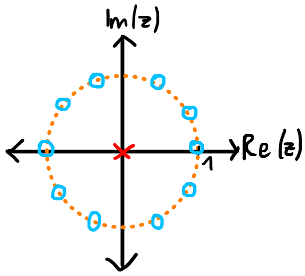
FS: $x[n+n_0] \circ\!\!-\!\!\bullet z^{n_0} X(z)$

$$x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet X(z) = \frac{z}{z-1} - z^{-10}\frac{z}{z-1} = \frac{z^{11}}{z^{10}(z-1)} - \frac{z}{z^{10}(z-1)} = \frac{\cancel{z}(z^{10}-1)}{z^{\cancel{10}\,9}(z-1)} = \frac{z^{10}-1}{z^9(z-1)}$$

↳ Nullstellen bei $e^{j\phi_k}$ mit $\phi_k = \frac{2\pi k}{10}$ $k = 1, \dots, 9$ $z^{10} = 1$ für Nullstelle

Polstelle bei $z = 0$ (9-fach)

bei $z = 1$ Pol-Nullstellenauslöschung



konv. für $\underbrace{0 < |z| \leq \infty}_{R_x}$

Aufgabe 4.2:

Berechnen Sie für jede gegebene $\mathcal{Z}$–Transformation $X(z)$ die rechtsseitigen und die linksseitigen Zeitsignale $x[n]$.

a) $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$