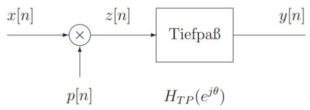
SigSys2 - UE6

Aufgabe 3.5:

Das Tiefpasssignal $x[n]$ wird mit dem abgebildeten zeitdiskreten System verarbeitet, wobei das Modulationssignal ein Einspuls mit der Periode N ist:

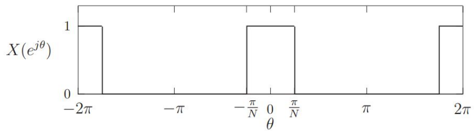
$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN].$$



FS: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right)$

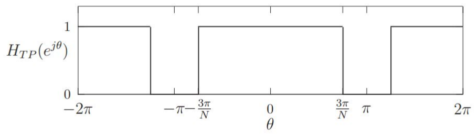
$$p[n] \circ\!\!-\!\!\bullet P(e^{j\theta}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

Das Spektrum des Eingangssignals und die Übertragungsfunktion des Tiefpassfilters sind in den folgenden Abbildungen dargestellt:



$$X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le |\theta| \le \frac{\pi}{N} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{N} < |\theta| < \pi \end{cases}$$

FS: $\frac{\sin(\alpha n)}{\pi n}$ $(0 < \alpha < \pi)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $\begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le |\theta| \le \alpha \\ 0 & \text{für } \alpha < |\theta| < \pi \end{cases}$



$$X(e^{j\theta}) \bullet\!\!-\!\!\circ x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N} n\right)}{\pi n}$$

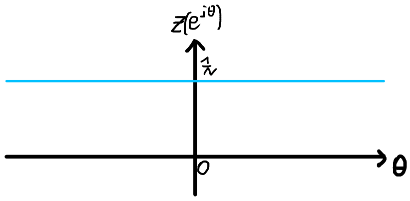
a) Berechnen und skizzieren Sie die Fouriertransformationen $P(e^{j\theta})$, $Z(e^{j\theta})$, $Y(e^{j\theta})$ der Signale $p[n]$, $z[n]$ und $y[n]$.

$$z[n] = x[n] \cdot p[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N} n\right)}{\pi n} \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]}_{=1 \text{ bei } n=kN} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\cancel{N}} k\cancel{N}\right)}{\pi k N} = \frac{\sin(\pi k)}{\pi k N} = 0 \quad \forall n \text{ außer } n=0$$

$\Rightarrow$ de L'Hospital

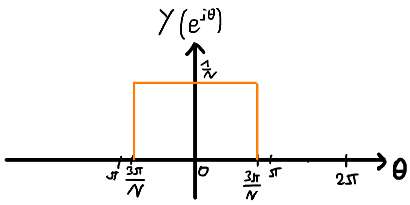
$$\lim_{n \to 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{N} n\right)}{\pi n}\right)' = \lim_{n \to 0} \left(\frac{\frac{\cancel{\pi}}{N} \cos\left(\frac{\pi}{N} n\right)}{\cancel{\pi}}\right) = \frac{1}{N}$$

$$z[n] \circ\!\!-\!\!\bullet Z(e^{j\theta}) = \frac{1}{N} \quad \text{(Konstante)}$$



$$Y(e^{j\theta}) = Z(e^{j\theta}) \cdot H_{TP}(e^{j\theta})$$

$$H_{TP}(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le |\theta| \le \frac{3\pi}{N} \\ 0 & \text{für } \frac{3\pi}{N} < |\theta| < \pi \end{cases}$$



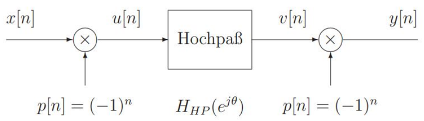
b) Bestimmen Sie das Ausgangssignal $y[n]$ des Gesamtsystems.

$$y[n] = z[n] * h[n] \qquad H(e^{j\theta}) \bullet\!\!-\!\!\circ h[n] = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{N} n\right)}{\pi n}$$

$$y[n] = \frac{1}{N} * \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{N} n\right)}{\pi n} = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{N} n\right)}{\pi n}$$

Aufgabe 3.6:

Ein zeitdiskretes System, bestehend aus zwei Modulatoren und einem idealisierten Hochpassfilter, wird mit einem Tiefpassignal $x[n]$, dessen Spektrum gegeben ist, angeregt.



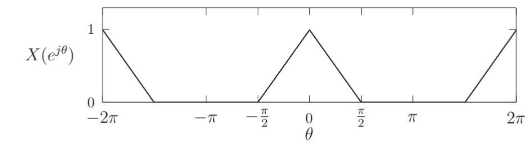
- $p[n] = (-1)^n = e^{j\pi n}$ FS: $e^{j\theta_0 n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0)$

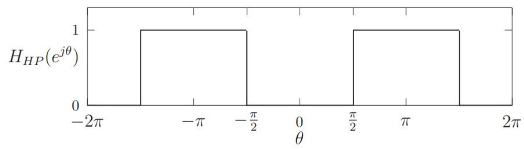
  $P(e^{j\theta}) = 2\pi\delta_{2\pi}(\theta-\pi)$

- $u[n] = x[n]\cdot p[n] = X(e^{j\theta}) * P(e^{j\theta}) = X(e^{j(\theta-\pi)})$

- $v[n] = u[n] * h[n] = U(e^{j\theta})\cdot H_{HP}(e^{j\theta}) = X(e^{j(\theta-\pi)})\cdot H_{HP}(e^{j\theta}) = X(e^{j(\theta-\pi)})$

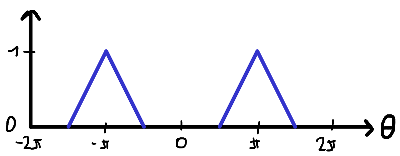
- $y[n] = v[n]\cdot p[n] = V(e^{j\theta}) * P(e^{j\theta}) = X(e^{j(\theta-\pi)}) * P(e^{j\theta}) = X(e^{j(\theta-\pi-\pi)}) = X(e^{j\theta})$



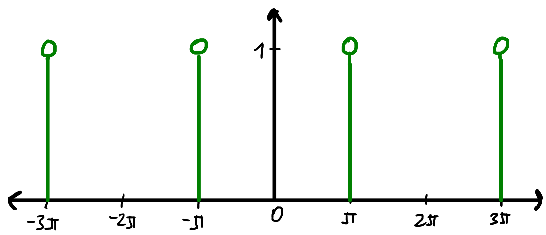


a) Berechnen und skizzieren Sie die Fouriertransformationen $P(e^{j\theta})$, $U(e^{j\theta})$, $V(e^{j\theta})$, $Y(e^{j\theta})$ der Signale $p[n]$, $u[n]$, $v[n]$ und $y[n]$.

$$U(e^{j\theta}) = V(e^{j\theta}) = X(e^{j(\theta-\pi)})$$



$P(e^{j\theta})$



b) Bestimmen Sie das Ausgangssignal $y[n]$.

$Y(e^{j\theta})$ ist die Faltung zweier Rechtecke, die $\frac{\pi}{4}$ breit sind (die Fläche $\frac{\pi}{2}$ vom Dreieck muss ja beibehalten werden). Die Höhe würde dann aber $\frac{\pi}{2}$ ergeben, was wir mit $\frac{2}{\pi}$ multiplizieren müssen um 1 zu bekommen

$$Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta}) = \text{rect}\left(\frac{\theta}{\frac{\pi}{4}}\right) * \text{rect}\left(\frac{\theta}{\frac{\pi}{4}}\right)\cdot\frac{2}{\pi}$$

wegen Rücktrafo

$$y[n] = 2\cancel{\pi}\cdot\left(\frac{2}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\right) = 4\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\right)$$

Aufgabe 3.7:

Es soll ein LTI–System entworfen werden, das auf das Eingangssignal

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n\sigma[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sigma[n-1]$$

mit dem Ausgangssignal

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n\sigma[n]$$

antwortet.

$H = \frac{Y}{X}$

FS: $a^n\sigma[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1-ae^{-j\theta}}$ $|a|<1$

FS: $x[n-N_0] \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-j\theta N_0}X(e^{j\theta})$

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ des Systems.

$$x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet X(e^{j\theta}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\theta}} - \frac{1}{4}e^{-j\theta}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\theta}}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\theta}}\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\theta}\right)$$

$$y[n] \circ\!\!-\!\!\bullet Y(e^{j\theta}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\theta}}$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\theta}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\theta}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\theta}} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\theta}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\theta})(1-\frac{1}{4}e^{-j\theta})}$$

PBZ $\frac{A}{1-\frac{1}{3}e^{-j\theta}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\theta}}$ $\Big|\ \cdot(1-\frac{1}{3}e^{-j\theta})\cdot(1-\frac{1}{4}e^{-j\theta})$

$$1-\frac{1}{2}e^{-j\theta} = A\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\theta}\right) + B\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\theta}\right)$$

setzen $e^{-j\theta}=3 \Rightarrow 1-\frac{3}{2} = A\left(1-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{1}{4}A \ /\cdot 4 \Rightarrow \boxed{A=-2}$

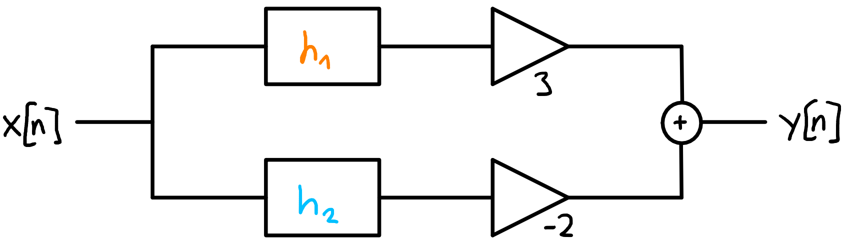
setzen $e^{-j\theta}=4 \Rightarrow 1-2 = B\left(1-\frac{4}{3}\right) \Rightarrow -1 = -\frac{1}{3}B \Rightarrow \boxed{B=3}$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{3}{1-\frac{1}{4}e^{-j\theta}} - \frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\theta}}$$

b) Berechnen Sie die Impulsantwort $h[n]$ des Systems.

$$H(e^{j\theta}) \bullet\!\!-\!\!\circ\; h[n] = 3\cdot\underbrace{\left(\tfrac{1}{4}\right)^n \sigma[n]}_{h_1} - 2\cdot\underbrace{\left(\tfrac{1}{3}\right)^n \sigma[n]}_{h_2}$$

c) Geben Sie eine mögliche Realisierung des Systems mit Addierern, Konstantenmultiplizierern und Verzögerungselementen an.



oder so: