SigSys 2 - UE10

Aufgabe 4.9:

Ein FIR-Filter habe die Impulsantwort

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

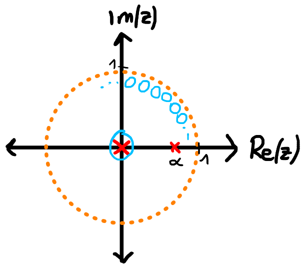
FS: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$

mit reellwertigem α. Filter mit einer Impulsantwort endlicher Dauer werden üblicherweise mit nichtrekursiven Strukturen (z.B. Transversalfilter) implementiert.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ und das Pol/Nullstellendiagramm für das gegebene Filter. Für welche Werte α ist das Filter stabil?

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \sigma[n] \cdot \sigma[-n+N] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{\alpha}{z}\right)^N}{1-\frac{\alpha}{z}} \quad \Big/ \cdot \frac{z}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{z - \frac{\alpha^N}{z^{N-1}}}{z-\alpha} = \frac{1}{z^{N-1}} \cdot \frac{z^N - \alpha^N}{z-\alpha}$$



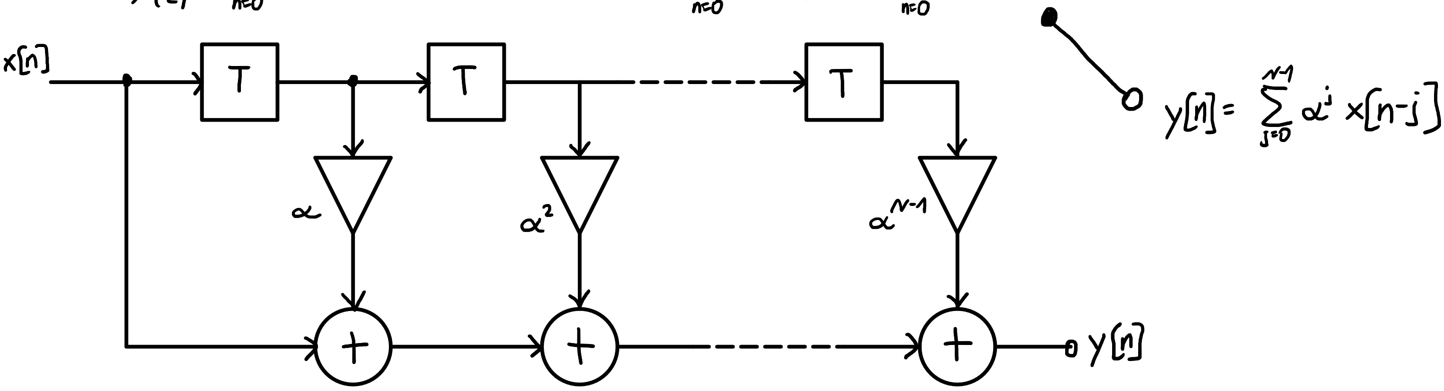
Polstellen: $z=0$ ($N-1$ fach)
$z=\alpha$

Nullstellen: $z_l = \alpha e^{j\frac{2\pi l}{N}}$ $\quad (l = 1, \dots, N-1)$
$z=\alpha$

stabil für alle endlichen α, da betragssummierbar (konv. gegen 0 bei $n\to\infty$)

b) Skizzieren Sie eine nichtrekursive Filterstruktur (Transversalfilter) mit der die gegebene Impulsantwort realisiert werden kann.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n \Rightarrow Y(z) = X(z) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{N-1} X(z) \cdot \alpha^n \cdot z^{-n}$$

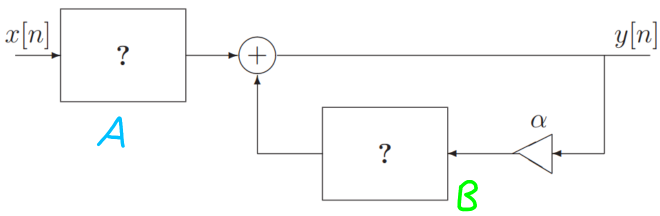


$$y[n] = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha^j x[n-j]$$

c) Wieviele Additionen, Multiplikationen und Speicherelemente benötigt diese Struktur in Abhängigkeit von N?

$N-1$

d) Zeigen Sie, daß die gegebene Impulsantwort *endlicher* Dauer auch mit folgendem *rekursiven* System erzeugt werden kann. Bestimmen Sie die dazu die beiden mit "?" gekennzeichneten (linearen und zeitinvarianten) Teilfilter.



$X \cdot A + \alpha \cdot B \cdot Y = Y$

$X \cdot A = Y(1-\alpha B)$

$H(z) = \frac{Y}{X} = \frac{A}{1-\alpha B}$

gleichsetzen: $\frac{A}{1-\alpha B} = \frac{1-\left(\frac{\alpha}{z}\right)^N}{1-\frac{\alpha}{z}}$

Koeff.vergleich: $A = 1-\left(\frac{\alpha}{z}\right)^N$, $B = z^{-1}$

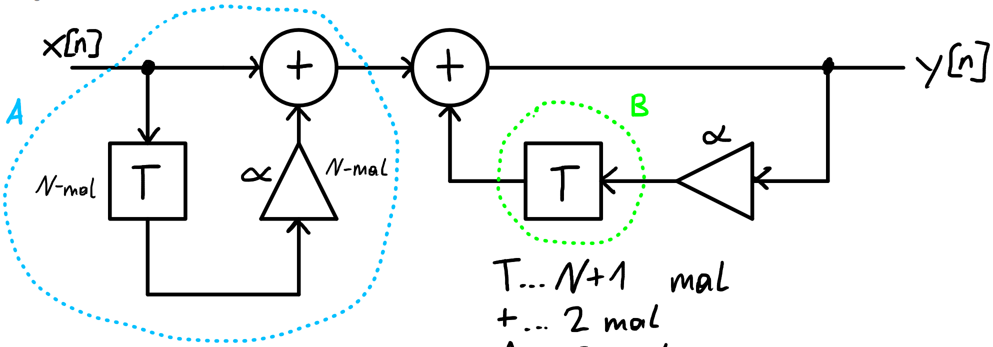
e) Für welche Werte von α ist das rekursive Filter stabil? (man betrachtet nur rek. Teil, also ohne A)

nur für $|\alpha| < 1$, Vertauschung der Teilsysteme für $|\alpha| \geq 1$ nicht erlaubt

stabil wegen Pol/NS-Auslöschung bei $z = \alpha$ $\quad H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad |a| < 1$

f) Vergleichen Sie die Komplexität (Anzahl Additionen, Multiplikationen und Speicherelemente) mit jener des Transversalfilters.

Realisierung:



T… N+1 mal
+… 2 mal
Δ… 2 mal

Aufgabe 5.5:

In entsprechender Weise wie bei Analogfiltern, können auch bei digitalen Filtern Frequenztransformationen angewendet werden, um aus einem Tiefpassfilter andere frequenzselektive Filter zu erzeugen. Die einfachste dieser digitalen Frequenztransformationen ist eine Tiefpass/Hochpasstransformation, bei der z in der Übertragungsfunktion des Tiefpassfilters durch $-z$ ersetzt wird, d.h.

$$H_{HP}(z) = H_{TP}(z)\Big|_{z \to -z}.$$

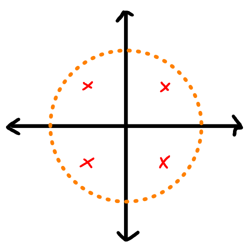
a) Zeigen Sie an Hand der Pol/Nullstellenform von $H_{TP}(z)$, dass diese Frequenztransformation tatsächlich ein Hochpassfilter liefert. Skizzieren Sie im Pol/Nullstellendiagramm die Transformation eines konjugiert komplexen Tiefpasspolpaares.

$\cancel{H_{HP}(z) = \frac{zT}{1+zT}}$ $\downarrow$ $\cancel{\text{Pol bei } z = -T^{-1}}$ $\cancel{\text{NS bei } z = 0}$

$\cancel{H_{TP}(z) = \frac{1}{1-zT}}$ $\downarrow$ $\cancel{\text{Pol bei } z = T^{-1}}$ $\cancel{\text{NS bei } z \to \infty}$

$\cancel{H_{TP}(z) = \frac{1}{1+zT}}$ $\downarrow$ $\cancel{\text{Pol bei } z = T^{-1}}$ $\cancel{\text{NS bei } z \to \infty}$

$$H_{TP}(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_g} + 1}$$



keine NS in dem Bsp

tiefe Frequenzen in rechter Halbebene

$f_{g,HP} = \frac{f_s}{2} - f_{g,HP}$

$\Theta = \Theta \pm \pi$

Irgendwie hat das Bsp so niemand verstanden, auch wenn es unser Tutor gemacht hat…

Aufgabe 5.8:

Von einem digitalen Filter mit reellwertigen Koeffizienten sei die Impulsantwort gegeben:

$$h_1[n] = a^n\sigma[n] - \frac{1}{2}\delta[n].$$

Mit diesem Filter wird nun ein neues Filter mit der Impulsantwort $h[n] = h_1[n] + h_1[-n]$ gebildet.

FS: $\alpha^n\sigma[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-\alpha}$

FS: $\delta[n] \circ\!\!-\!\!\bullet 1$

FS: $x[-n] \circ\!\!-\!\!\bullet X(z^{-1})$

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des neuen Filters.

$$H(z) = H_1(z) + H_1(z^{-1})$$

$$H_1(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{1}{2} \qquad H_1(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{z^{-1}-a} - \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{z^{-1}}{z^{-1}-a} - 1$$

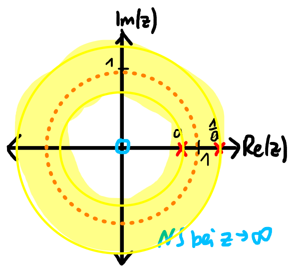
$$= \frac{z(z^{-1}-a) + z^{-1}(z-a) - (z-a)(z^{-1}-a)}{(z-a)(z^{-1}-a)} = \frac{1 - \cancel{az} + \cancel{1} - \cancel{az^{-1}} - \cancel{1} + \cancel{az} + \cancel{az^{-1}} - a^2}{(z-a)(z^{-1}-a)}$$

$$= \frac{1-a^2}{(z-a)(z^{-1}-a)} \quad \Big| \cdot \left(\frac{-z}{-z}\right) \quad \Rightarrow \frac{z(a^2-1)}{(z-a)(az-1)} = \frac{z(a^2-1)}{a(z-a)(z-\frac{1}{a})}$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich und skizzieren Sie das Pol/Nullstellendiagramm von $H(z)$.

Pole: $z = a \wedge z = \frac{1}{a}$

NS: $z = 0 \wedge z \to \infty$



stabil für $|a|<1$ da Einheitskreis dann im Konv.bereich liegt

akausal weil nicht alle Pole im Einheitskreis

Konv.bereich: $a < |z| < \frac{1}{a}$

c) Berechnen und skizzieren Sie Betrags- und Phasenverlauf des Frequenzgangs $H(e^{j\theta})$.

d) Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort $a[n]$ des neuen digitalen Filters.

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[k]\sigma[n-k] \quad \text{besser}$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k] = -\sigma[n]$$