SigSys - UE 2

Aufgabe 1.5:

Das Signal $x[n]$ sei periodisch mit der Periode N. Prüfen Sie, ob das Signal $y[n] = x[Mn]$ (M ganzzahlig) ebenfalls periodisch ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Periode von $y[n]$.

$$y[n] = x[M\underbrace{(n+ZN)}_{n_0+N}]$$

man sagt, dass es auch periodisch mit N sein müsste, weil es ja ein Signal von x ist oder so

$$M((n_0+q)+ZN) = M(n_0+ZN)+N$$

$$\cancel{Mn_0} + Mq + \cancel{MZN} = \cancel{Mn_0} + \cancel{MZN} + N$$

$$Mq = N \Rightarrow q = \frac{N}{M} = \frac{N}{ggT(N,M)}$$

damit es ganzzahlig wird

q muss so groß sein, dass $x[-]$ wieder am gleichen „Punkt" landet

dann geht man bei $M=2$ nur jedes 2. oder so

Aufgabe 1.6:

Die Fourierreihendarstellungen der periodischen Signale $x[n]$ und $y[n]$ sind gegeben durch

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \Leftrightarrow \quad c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

und

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \Leftrightarrow \quad d_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}.$$

Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen den Fourierreihenkoeffizienten d_k und c_k für die folgenden Signalbeziehungen:

Tipp: Formelsammlung

a) $y[n] = x[n - \frac{N}{2}]$, N gerade

$N_0 = \frac{N}{2}$ einsetzen & kürzen

$$x[n-N_0] \circ\!\!-\!\!\bullet \left[e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0} c_k\right] \qquad c_k = c_{k+N}$$

$$d_k = e^{-j\pi k} c_k = (-1)^k c_k$$

b) $y[n] = x[N-n]$

$$x[-n] \circ\!\!-\!\!\bullet c_{-k} = d_k$$

c) $y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[N-n])$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $Re[c_k] = d_k$

d) $y[n] = x[2n]$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_x-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}(2n)k}$$

$$d_k = \frac{1}{N_y} \cdot \sum_{h=0}^{N_y-1} \left[\sum_{l=0}^{N_x-1} c_l \cdot e^{j\frac{2\pi}{N_x}(2n)\cdot l}\right] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N_y}\cdot hk}$$

können es in die Summe ziehen, da dieser Ausdruck nicht von l abhängt

$$d_k = \frac{1}{N_y} \cdot \sum_{h=0}^{N_y-1} \left[\sum_{l=0}^{N_x-1} c_l \cdot e^{j\frac{2\pi h}{N_x}\left(2l - k\cdot\frac{N_x}{N_y}\right)} \right]$$

Summen vertauschen

$$d_k = \frac{1}{N_y} \cdot \sum_{l=0}^{N_x-1} c_l \cdot \sum_{h=0}^{N_y-1} \left(e^{j2\pi\cdot\left(\frac{2l}{N_x} - \frac{k}{N_y}\right)}\right)^h$$

weiß nicht ob Tutor jetzt einfach aus h ein n gemacht hat

$$d_k = \frac{1}{N_y} \cdot \sum_{l=0}^{N_x-1} c_l \cdot \frac{1-e^{j2\pi\cdot\left(\frac{2l\cdot N_y}{N_x} - k\right)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N_y}\left(\frac{2l\cdot N_y}{N_x} - k\right)}}$$

$$\frac{1-e^{j2\pi m}}{1-e^{j\frac{2\pi m}{N}}} = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

wenn dieser Ausdruck Vielfaches von N_y ist, dann ergibt der Bruch N_y, sonst immer 0

$$d_k = \frac{1}{N_y} \cdot \sum_{l=0}^{N_x-1} c_l \cdot N_y \cdot \delta_{N_y}[x]$$

Hilfe zum Vorstellen:

Periode 3

h	0	1	2	3	4	5
x[n]:	1	2	3	1	2	3
y[n] = x[2n]:	1	3	2	1	3	2

Periode 3

Periode 4

h	0	1	2	3	4	5	6
x[n]	1	2	3	4	1	2	3
y[n]	1	3	1	3	1	3	1

Periode 2

⇒ müssen also unterscheiden, ob N_x gerade oder ungerade

$x[2n]$ heißt, dass es jeden 2. Wert nimmt, wie man sehen kann im Bsp

↳ bei Periode 3 ist $N_x = N_y$

Fall 1: N_x gerade

↳ $N_y = \frac{N_x}{2}$

Fall 2: N_x ungerade

↳ $N_x = N_y$

$$\frac{2l\cdot N_y}{N_x} - k = p\cdot N_y$$

Fall 1: $N_y = \frac{N_x}{2}$

$l - k = p\cdot N_y$

$k_\varepsilon = \{0, \dots, \frac{N_x}{2} - 1\}$ $p=0,\ l=k$

$l_\varepsilon = \{0, \dots, \frac{N_x}{2\,?} - 1\}$ $p=1,\ l = k + \frac{N_x}{2}$

Fall 2: $N_x = N_y$

$2l - k = p\cdot N_x$

$k_\varepsilon = \{0, \dots, N_x - 1\}$ $p=0,\ 2l = k$ gerade

$l_\varepsilon = \{0, \dots, N_x - 1\}$ $p=1,\ 2l = k + N_x$ ungerade

muss also auch ungerade sein

$$d_k = c_k + c_{k+\frac{N}{2}}$$

$$d_k = \begin{cases} c_{\frac{k}{2}} & k = 0,2,4,\dots,N_x-1 \\ c_{\frac{k+N_x}{2}} & k = 1,2,3,\dots,N_x-2 \end{cases}$$

e) $y[n] = x[n]\underbrace{\cos\frac{2\pi L}{M}n}$, L und M ganzzahlig

Müssen Ausdruck auf $\cos\left(\frac{2\pi m}{N}n\right)$ um Korrespondenz aus Formelsammlung nutzen zu können

$\hookrightarrow \frac{2\pi L}{M}\cancel{n} = \frac{2\pi m}{N}\cancel{n} \quad | \cdot N \Rightarrow m = \frac{LN}{M} \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi L}{M}n\right) = \cos\left(\frac{2\pi \frac{LN}{M}}{N}n\right)$

$$x[n]\,y[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{l=0}^{N-1} c_l \underbrace{d_{k-l}}_{\text{wichtig!}}, \quad x \,\&\, y \text{ gleiche Periode}$$

FS:

$$\cos\left(\frac{2\pi m}{N}n\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left(\delta[k-m] + \delta[k+m]\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi \frac{LN}{M}}{N}n\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left(\delta\left[k-\frac{LN}{M}\right] + \delta\left[k+\frac{LN}{M}\right]\right)$$

$$d_k = \sum_{l=0}^{N-1} c_l \frac{1}{2}\left(\delta\left[k-l-\frac{LN}{M}\right] + \delta\left[k-l+\frac{LN}{M}\right]\right)$$

da der $\cos(\dots)$ Ausdruck ja schon periodisch ist/war, heißt das, dass $k \pm \frac{LN}{M} = 0$ ergibt

$$\underline{d_k = \frac{1}{2}\left(c_{k+\frac{NL}{M}} + c_{k-\frac{NL}{M}}\right)}$$

f) $y[n] = x^2[n]$ $= x[n]\cdot x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{l=0}^{N-1} c_l c_{k-l} = d_k$

Aufgabe 1.7:

Für die gegebenen periodischen Signale bestimme man die Fourierreihenkoeffizienten c_k:

a) $x[n] = 1 - \cos\frac{\pi}{4}n$ $\quad N=8$ weil $\cos\frac{2\pi m}{N}$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right)$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right)e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \frac{1}{N}\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k n}{N}} - \left(\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right)\cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} - \frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{j\frac{\pi}{4}n - j\frac{2\pi k}{N}n}} + \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{4}n - j\frac{2\pi k}{N}n}}\right)$$

$$e^{j\pi n\left(\frac{1}{4}-\frac{2k}{N}\right)} = e^{j\pi n\left(\frac{N}{4N}-\frac{8k}{4N}\right)} = e^{j\frac{2\pi n}{N}\left(\frac{N}{8}-k\right)} = e^{-j\frac{2\pi n}{N}\left(k-\overset{m}{\frac{N}{8}}\right)} \qquad e^{-j\frac{2\pi n}{N}\left(k+\frac{N}{8}\right)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} - \frac{1}{2}\left(e^{-j\frac{2\pi n}{N}\left(k-\frac{N}{8}\right)} + e^{-j\frac{2\pi n}{N}\left(k+\frac{N}{8}\right)}\right)\right)$$

FS: $e^{j\frac{2\pi m}{N}n} \circ\!\!-\!\!\bullet \delta[k-m]$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\delta_N[k] - \frac{1}{2}\left(\delta_N\left[k-\frac{N}{8}\right] + \delta_N\left[k+\frac{N}{8}\right]\right)\right)$$

$$c_k = \delta_8[k] - \frac{1}{2}\delta_8\left[k-\frac{N}{8}\right] - \frac{1}{2}\delta_8\left[k+\frac{N}{8}\right]$$

Oder schneller:

FS: $e^{j\frac{2\pi m}{N}n} \circ\!\!-\!\!\bullet \delta[k-m]$

$$x[n] = 1-\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \quad m=0$$

$$= e^{j\frac{2\pi\cdot 0}{N}n} - \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \delta_8[k] - \frac{1}{2}\left(\delta\left[k-\frac{N}{8}\right] + \delta\left[k+\frac{N}{8}\right]\right) = c_k$$

$$e^{j\frac{\pi}{4}n} = e^{j\frac{2\pi m}{N}n} \;/\ln \Rightarrow \cancel{j}\frac{\pi}{4}\cancel{n} = \cancel{j}\frac{2\pi m}{N}\cancel{n} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2m}{N} \Rightarrow m = \frac{N}{8}$$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad -2 \le n \le 3, \quad$ und $\; x[n+6] = x[n]$

↳ heißt $N=6$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$c_k = \frac{1}{6}\sum_{n=-2}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{6}n}$$

nun die Summe von $-2 \le n \le 3$ auf $0 \le n \le 5$ verschieben

$$c_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{\pi k}{3}(n-2)}}_{=e^{-j\frac{\pi k}{3}n}\cdot e^{+j\frac{2\pi k}{3}}}$$

aus Summe herausziehen

$$c_k = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot e^{j\frac{2\pi k}{3}} \cdot \sum_{n=0}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{-j\frac{\pi k}{3}n} = \frac{2}{3}\cdot e^{j\frac{2\pi k}{3}} \cdot \sum_{n=0}^{5}\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi k}{3}}\right)^n$$

nun geometrische Summenformel anwenden: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} q^k = \frac{1-q^N}{1-q}$

$$\frac{2}{3}\cdot e^{j\frac{2\pi k}{3}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi k}{3}}\right)^6}{1-\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi k}{3}}\right)} = \frac{2}{3}\cdot e^{j\frac{2\pi k}{3}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \underbrace{e^{-j2\pi k}}_{=1}}{1-\frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi k}{3}}}$$

$$c_k = \frac{2}{3}\cdot e^{j\frac{2\pi k}{3}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi k}{3}}\right)}$$

c) $x[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-3k]$

↳ $N=3$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-mN] \Longleftrightarrow \frac{1}{N} \quad \forall k$$

$$c_k = \frac{1}{3} \quad \forall k$$