Sigsys2 - UE11

[1]Ein Signal, das nur für N Zeitwerte gegeben ist, wird als N–Punkte Signal bezeichnet, wobei das Zeitintervall, auf dem das Signal gegeben ist, sich üblicherweise von $n = 0$ bis $n = N-1$ erstreckt.

Aufgabe 6.2:

Berechnen Sie die N–Punkte DFT $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ für die folgenden N–Punkte Signale:[1]

FS: $\delta[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1$

FS: $x[(n-N_0)_N] R_N[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0} X[k]$

a) $x[n] = \delta[n-5], \quad n = 0 \dots 9 \quad (N = 10)$

$$X[k] = 1 \cdot e^{-j\frac{\cancel{2}\pi k}{\cancel{10}}\cancel{5}} = (-1)^k$$

b) $x[n] = \delta[n+5], \quad n = -9 \dots 0 \quad (N = 10)$

$$X[k] = e^{-j\frac{\cancel{2}\pi k}{\cancel{10}}(-\cancel{5})} = (-1)^k$$

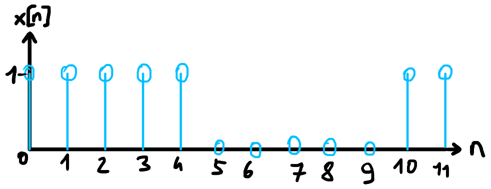
c) $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}n}, \quad n = 0 \dots 19 \quad (N = 20)$

FS: $e^{\frac{2\pi m}{N}n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ N\delta[k-m]$

$$x[n] = e^{j\frac{2\pi \cdot \overset{m}{2}}{20}n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ X[k] = 20 \cdot \delta[k-2]$$

d) $x[n] = \sigma[n] - \sigma[n-5], \quad n = 0 \dots 9 \quad (N = 10)$

FS: $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N_1 \\ 1 & N-N_1 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \dfrac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\pi k}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}$



um auf Form von FS zu kommen müssen wir $x[n]$ verschieben (mit $\delta[n-2]$ multiplizieren)

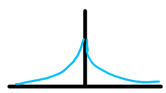
$$\Rightarrow x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le \overset{N_1}{2} \\ 1 & 10-2 \le n \le 9 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \cdot \delta[n-2] \Rightarrow x[n] = \begin{cases} 1 & 2 \le n \le 4 \\ 1 & 10 \le n \le 11 \quad (= 0 \le n \le 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$X[k] = e^{-j\frac{2\pi k}{10}2} \cdot \frac{\sin\left((2\cdot 2+1)\frac{\pi k}{10}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{10}\right)}$$

$$X[k] = e^{-j\frac{2\pi k}{5}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{10}\right)}$$

e) $x[n] = \alpha^{|n|}, \quad n = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2}-1 \quad (|\alpha| < 1$ und N gerade).

sieht ca. so aus:



$$X[k] = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \alpha^{|n|} e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{0} \alpha^{|n|} e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \alpha^{|n|} e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} - 1$$

weil n=0 2mal vorkommt

Grenzen verschieben => - bei e-Ausdruck weg

=

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} \left(\alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)^n + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\right)^n - 1$$

geom. Summenformel:

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-\left(\alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)^{\frac{N}{2}+1}}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}} + \frac{1-\left(\alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\right)^{\frac{N}{2}}}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} - 1$$

$$= \frac{1-\left(\alpha^{\frac{N}{2}} \cdot e^{j\cancel{\frac{2\pi k}{N}}\cdot\cancel{\frac{N}{2}}}\right)\cdot\left(\alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}} + \frac{1-\left(\alpha^{\frac{N}{2}} \cdot e^{-j\cancel{\frac{2\pi k}{N}}\cdot\cancel{\frac{N}{2}}}\right)}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} - 1$$

$e^{-j\pi k} = e^{j\pi k} = (-1)^k$

$$= \frac{1-\alpha^{\frac{N}{2}}(-1)^k \cdot \alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}} + \frac{1-\alpha^{\frac{N}{2}}(-1)^k}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} - 1$$

$$= \frac{1-\alpha^{\frac{N}{2}}(-1)^k \cdot \alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}} - \frac{1-\alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}} + \frac{1-\alpha^{\frac{N}{2}}(-1)^k}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}$$

$$= \frac{\cancel{1}-\alpha^{\frac{N}{2}}(-1)^k \cdot \alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}} - \left(\cancel{1}-\alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}} + \frac{1-\alpha^{\frac{N}{2}}(-1)^k}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}$$

$$= \alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}} \frac{1-\alpha^{\frac{N}{2}}(-1)^k}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi k}{N}}} + \frac{1-\alpha^{\frac{N}{2}}(-1)^k}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}$$

Aufgabe 6.3:

$X[k]$ sei die N–Punkte DFT des N–Punkte Signals $x[n]$. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

a) Aus $x[n] = -x[N-1-n]$ folgt $X[0] = 0$.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] = 0$$