Sig Sys 2 - UE 9

Aufgabe 4.3:

Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch und bestimmen Sie Pole und Nullstellen. Wählen Sie den Konvergenzbereich derart, dass Sie ein rechtsseitiges Signal erhalten und berechnen Sie dieses!

a) $H(z) = \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}$

Pole bei $z = \frac{1}{2} \wedge z = \frac{1}{4}$, Nullstelle bei $z=0$

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich: $\frac{1}{2} < |z| \leq \infty$

$$H(z) = z\Big(\underbrace{\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}}_{F(z)}\Big)$$

PBZ: $F(z) = \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-\frac{1}{4}} \quad / \cdot (z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})$

$$1 = A(z-\tfrac{1}{4}) + B(z-\tfrac{1}{2})$$

$z=\frac{1}{2}$: $1 = \frac{1}{4}A \Rightarrow A = 4$

$z=\frac{1}{4}$: $1 = -\frac{1}{4}B \Rightarrow B = -4$

$$H(z) = 4\left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-\frac{1}{4}}\right)$$

FS: $\alpha^n \sigma[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-\alpha}$

$$h[n] = 4\left((\tfrac{1}{2})^n - (\tfrac{1}{4})^n\right)\sigma[n]$$

b) $H(z) = \frac{1}{(z-\frac{1}{3})(z+\frac{1}{4})}$

Pole bei $z = \frac{1}{3} \wedge z = -\frac{1}{4}$

Nullstelle bei $z = \infty$

$\Rightarrow$ Konv. $\frac{1}{3} < |z| \leq \infty$

PBZ: $\frac{1}{(z-\frac{1}{3})(z+\frac{1}{4})} = \frac{A}{z-\frac{1}{3}} + \frac{B}{z+\frac{1}{4}} \quad / \cdot (z-\frac{1}{3})(z+\frac{1}{4})$

$$1 = A(z+\tfrac{1}{4}) + B(z-\tfrac{1}{3})$$

$z=\frac{1}{3}$: $1 = \frac{7}{12}A \Rightarrow A = \frac{12}{7}$

$z=-\frac{1}{4}$: $1 = -\frac{7}{12}B \Rightarrow B = -\frac{12}{7}$

$$H(z) = \frac{12}{7}\left(\frac{1}{z-\frac{1}{3}} - \frac{1}{z+\frac{1}{4}}\right) \quad / \cdot \frac{z}{z}$$

FS: $\alpha^n \sigma[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-\alpha}$

FS: $x[n+n_0] \circ\!\!-\!\!\bullet z^{n_0} X(z)$

$$H(z) = \frac{12}{7} z^{-1}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{z}{z+\frac{1}{4}}\right)$$

$$h[n] = \frac{12}{7}\left((\tfrac{1}{3})^{n-1} - (-\tfrac{1}{4})^{n-1}\right)\sigma[n-1]$$

$$h[n] = \frac{12}{7}\left(3\cdot(\tfrac{1}{3})^n + 4\cdot(-\tfrac{1}{4})^n\right)\sigma[n-1]$$

c) $H(z) = \frac{1}{(3z-1)(6z-1)(2z-1)}$

Pole bei $z = \frac{1}{3} \wedge z = \frac{1}{6} \wedge z = \frac{1}{2}$

Nullstelle bei $z = \infty$

Konvergenzbereich: $\frac{1}{2} < |z| \leq \infty$

PBZ: $H(z) = \frac{1}{(3z-1)(6z-1)(2z-1)} = \frac{A}{3z-1} + \frac{B}{6z-1} + \frac{C}{2z-1} \quad / \cdot (3z-1)(6z-1)(2z-1)$

$$1 = A(6z-1)(2z-1) + B(3z-1)(2z-1) + C(3z-1)(6z-1)$$

$z = \frac{1}{3}$: $1 = -\frac{1}{3}A \Rightarrow \boxed{A = -3}$

$z = \frac{1}{6}$: $1 = B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 1 = \frac{1}{3}B \Rightarrow \boxed{B = 3}$

$z = \frac{1}{2}$: $1 = C \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow \boxed{C = 1}$

$$H(z) = -\frac{3}{3z-1} + \frac{3}{6z-1} + \frac{1}{2z-1} = -\frac{1}{z-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-\frac{1}{6}} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-\frac{1}{2}}$$

$$H(z) = z^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{6}} + \frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right) - \frac{z}{z-\frac{1}{3}}\right)$$

FS: $\alpha^n \sigma[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-\alpha}$

FS: $x[n+n_0] \circ\!\!-\!\!\bullet z^{n_0}X(z)$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)\sigma[n-1]$$

$$h[n] = \left(3\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\sigma[n-1]$$

d) nur Partialbruchzerlegung $H(z) = \frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2}$

$$\frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{(z-\frac{1}{2})^2} \quad / \cdot (z-\tfrac{1}{2})^2$$

$$z = A(z-\tfrac{1}{2}) + B$$

$z = \frac{1}{2}$: $\boxed{\frac{1}{2} = B}$

beliebig gewählt, weil eh B eingesetzt wird

$z = 1$: $1 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2} \Rightarrow A = 1$

$$H(z) = \frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

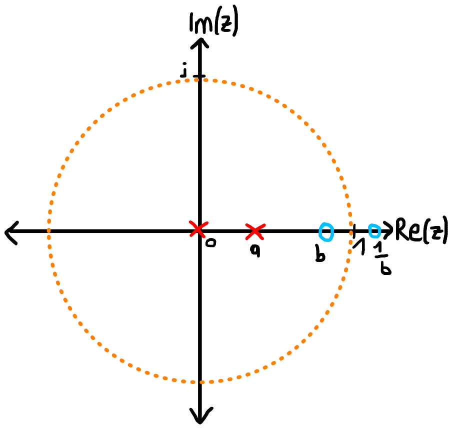
Aufgabe 4.10:

Von einem digitalen Filter sind die Pole $z_{\infty i}$ und Nullstellen z_{0i} der Übertragungsfunktion $H(z)$ gegeben:

$$z_{\infty 1} = 0,\ z_{\infty 2} = a \qquad z_{01} = b,\ z_{02} = \frac{1}{b}$$

mit $0 < a < 1$ bzw. $0 < b < 1$ und $a \neq b$.

a) Skizzieren Sie das Pol/Nullstellendiagramm.



b) Berechnen Sie allgemein die Übertragungsfunktion $H(z)$ dieses Filters. Wie ist der Verstärkungsfaktor in Abhängigkeit von a, b zu wählen, damit $H(z)|_{z=1} = 1$ ist?

$$H(z) = R\,\frac{(z-b)(z-\frac{1}{b})}{z(z-a)}$$

$$H(1) = R\cdot\frac{(1-b)(1-\frac{1}{b})}{1-a} \Rightarrow R = \frac{1-a}{(1-b)(1-\frac{1}{b})}$$

c) Bestimmen Sie die minimalphasige Teilübertragungsfunktion $H_m(z)$ des Filters und skizzieren Sie deren Pol/Nullstellendiagramm.

$H(z)$ ist nicht minimalphasig, kann aber als Kaskadenschaltung eines minimalphasigen Filters & Allpassfilters dargestellt werden

$$H(z) = H_m(z)\,H_a(z)$$

Bei $H_m(z)$ darf keine Nullstelle außerhalb vom Einheitskreis liegen

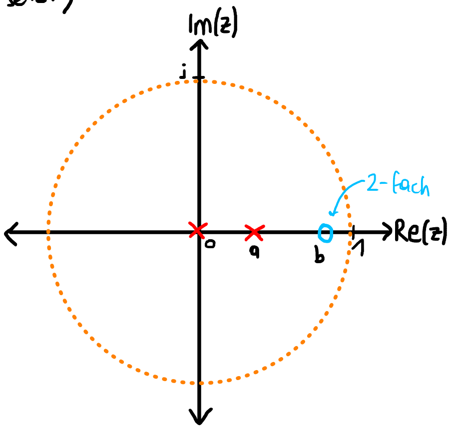
↳ Die NS außerhalb wird in den Einheitskreis gespiegelt. (= durch $\frac{1}{z_0^*}$ ersetzt)

$$H(z) = R\,\frac{z-b}{z(z-a)} \cdot \frac{(z-\frac{1}{b})}{1} \cdot \frac{(z-b)}{(z-b)}$$

Term mit gespiegelter NS

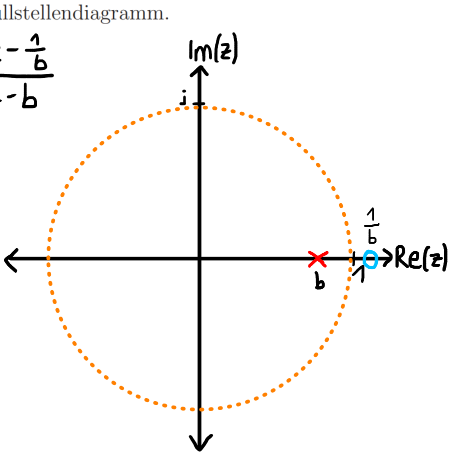
muss dazukommen damit H(z) gleich bleibt

$$\Rightarrow H(z) = \underbrace{R\cdot\frac{(z-b)^2}{z(z-a)}}_{H_m(z)} \cdot \underbrace{\frac{z-\frac{1}{b}}{z-b}}_{H_a(z)}$$



d) Bestimmen Sie die Allpassteilübertragungsfunktion $H_a(z)$ des Filters und das zugehörige Pol/Nullstellendiagramm.

$$H_a(z) = \frac{z-\frac{1}{b}}{z-b}$$



Zählergrad ≤ Nennergrad

↳ hängt nicht von Zukunft ab

e) Sind das minimalphasige Teilfilter und der Allpass stabil und kausal?

stabiles & kausales Signal besitzt im Pol-NS-Diagramm folgende Merkmale:

- alle Pole liegen im Einheitskreis
- Konvergenzbereich enthält $z = \infty$

minimalphasiges Teilfilter: für $|a| < 1$ stabil

Allpassfilter: für $|b| < 1$ stabil, kausal

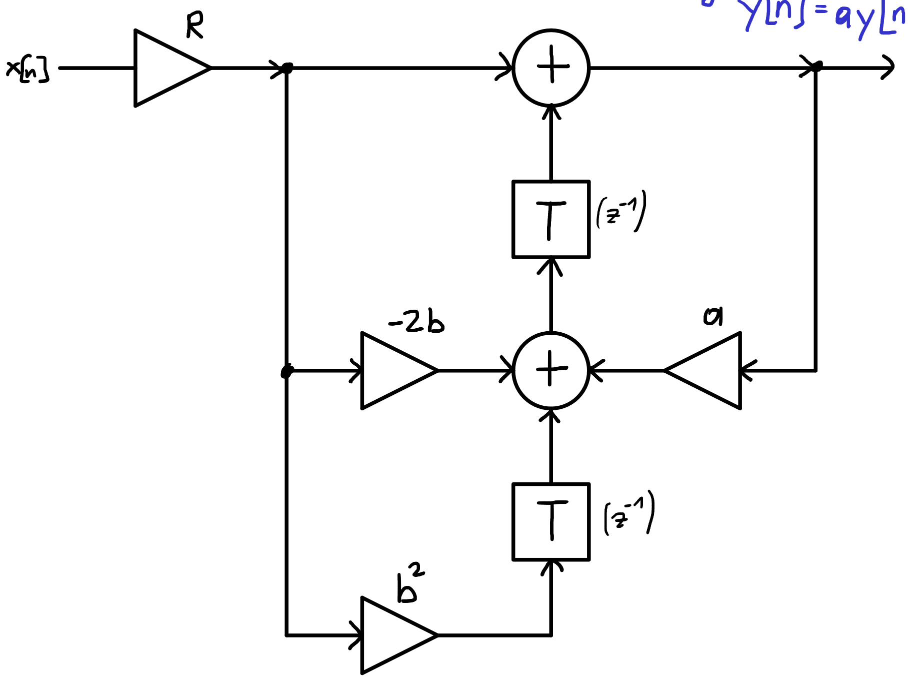
kausal, weil Pole $|z| < 1$ und damit rechtsseitiges Signal (Pole $|z| > 1$ wäre linksseitig & wenn beides dann zweiseitig

f) Geben Sie (sofern das überhaupt möglich ist) für beide Teilübertragungsfunktionen $H_m(z)$ und $H_a(z)$ Realisierungen mit Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen an.

$$H_m(z): \quad R \cdot \frac{(z-b)^2}{z(z-a)} = \frac{z^2 - 2zb + b^2}{z^2 - za} \quad \Big| \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}}$$

$$= R\,\frac{1 - 2bz^{-1} + b^2 z^{-2}}{1 - az^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)} = H_m(z) \Rightarrow Y(1 - az^{-1}) = X(1 - 2bz^{-1} + b^2 z^{-2})R$$

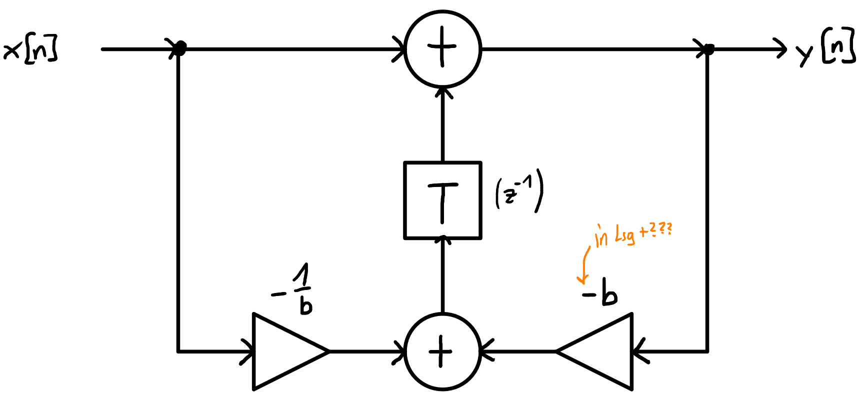
$$\Updownarrow \quad y[n] = ay[n-1] + x[n]R - 2bRx[n-1] + b^2 R x[n-2]$$



$$H_a(z): \quad \frac{z - \frac{1}{b}}{z - b} \quad \Big| \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{b} z^{-1}}{1 - bz^{-1}}$$

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{b} x[n-1] + by[n-1]$$



Aufgabe 4.11:

Es sei ein zeitdiskretes kausales LTI-System mit dem Eingangssignal $x[n]$ und dem Ausgangssignal $y[n]$ gegeben. Dieses System wird durch ein Paar von Differenzengleichungen spezifiziert, die jeweils ein Zwischensignal $w[n]$ enthalten:

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]+w[n]+w[n-1] &= \frac{1}{2}x[n] \\ \text{II:}\quad y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]+2w[n]-w[n-1] &= -\frac{1}{2}x[n] \end{aligned}$$

FS: $x[n+n_0] \circ\!\!-\!\!\bullet\, z^{n_0}X(z)$

a) Bestimmen Sie den Frequenzgang $H\left(e^{j\theta}\right)$ und die Impulsantwort $h[n]$ dieses Systems. Ist das System stabil?

I_z: $Y(z)+\frac{1}{2}Y(z)z^{-1}+W(z)+W(z)z^{-1}=\frac{1}{2}X(z)$

II_z: $Y(z)-\frac{1}{2}Y(z)z^{-1}+2W(z)-W(z)z^{-1}=-\frac{1}{2}X(z)$

$\oplus$ Additionsverfahren

I_z+II_z: $2Y(z)+3W(z)=0 \quad \Rightarrow \quad W(z)=-\frac{2}{3}Y(z)$

$W(z)=-\frac{2}{3}Y(z)$ einsetzen in I:

$$Y(z)+\frac{1}{2}Y(z)z^{-1}-\frac{2}{3}Y(z)-\frac{2}{3}Y(z)z^{-1}=\frac{1}{2}X(z)$$

$$\frac{1}{3}Y(z)-\frac{1}{6}Y(z)z^{-1}=\frac{1}{2}X(z)$$

$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$

$$Y(z)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}z^{-1}\right)=\frac{1}{2}X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(x)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}z^{-1}} \qquad |\cdot 3$$

$$H(e^{j\theta})=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\theta}}$$

(IIR-Filter, H(z) rationale Fkt, Bonusinfo | guess)

$$H(z)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}z} \qquad |\cdot\frac{z}{z}$$

$$H(z)=\frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

FS: $\alpha^n\sigma[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{z}{z-\alpha}$

$$h[n]=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\sigma[n]$$

b) Bestimmen Sie eine einzelne Differenzengleichung, durch die $x[n]$ und $y[n]$ verknüpft sind.

$W(z)=-\frac{2}{3}Y(z)$ einsetzen in I:

$$Y(z)+\frac{1}{2}Y(z)z^{-1}-\frac{2}{3}Y(z)-\frac{2}{3}Y(z)z^{-1}=\frac{1}{2}X(z)$$

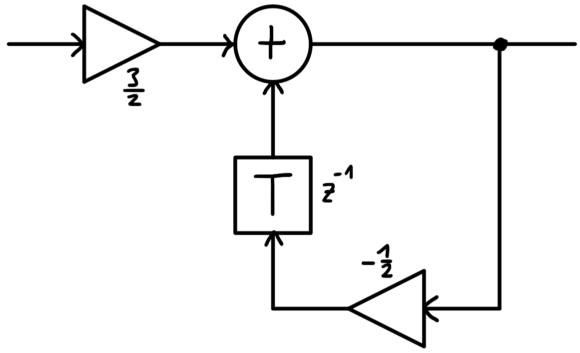
$$\frac{1}{3}Y(z)-\frac{1}{6}Y(z)z^{-1}=\frac{1}{2}X(z) \qquad |\cdot 3$$

$$Y(z)-\frac{1}{2}Y(z)z^{-1}=\frac{3}{2}X(z)$$

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=\frac{3}{2}x[n]$$

c) Skizzieren Sie eine Realisierung des Systems mit Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen.

$$H(z) = \frac{3}{2} \, \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \quad \Big| \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}}$$



Aufgabe 5.2:

Ein einfaches Verfahren für den Entwurf von FIR–Filtern ist die Fenstermethode, bei der ein idealisiertes Filter mit der unendlich langen Impulsantwort $h_d[n]$ durch ein Filter mit endlich langer Impulsantwort

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n] & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

approximiert wird. Dabei weicht die Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ des realisierten Filters von der Übertragungsfunktion $H_d(e^{j\theta})$ des idealisierten Filters ab. Diese Abweichung sei durch das Fehlermaß

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta}) - H_d(e^{j\theta})|^2 \, d\theta$$

erfasst.

a) Der spektrale Fehler $E(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta}) - H_d(e^{j\theta})$ kann als Fouriertransformation eines zeitlichen Fehlers $e[n]$ dargestellt werden:

$$E(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] e^{-j\theta n}.$$

Ermitteln Sie $e[n]$ dieser Fourierdarstellung in Abhängigkeit von $h[n]$ und $h_d[n]$.

$$E(e^{j\theta}) \bullet\!\!-\!\!\circ \; e[n] = h[n] - h_d[n]$$

b) Drücken Sie das Fehlermaß ϵ^2 als Funktion von $e[n]$ aus.

FS: Parsevalsche Beziehung für aperiodische zeitdiskrete Signale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(e^{j\theta})|^2 \, d\theta$$

wissen zusätzlich, dass: $X(e^{j\theta})$ ist 2π-periodisch und $\mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\theta})\} = x[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |e[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(e^{j\theta})|^2 \, d\theta = \epsilon^2 \qquad \Rightarrow \quad \epsilon^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e[n]|^2$$

c) Zeigen Sie, dass das Fehlermaß ϵ^2 dann minimal ist, wenn $h[n]$ entsprechend der oben angegebenen Beziehung die zeitbegrenzte Impulsantwort des idealisierten Filters ist.

beliebiger Parameter ($h_d[n]$ ist ideal, a_n muss nicht ideal sein)

$$\epsilon^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] - h_d[n]|^2 \qquad h[n] = \begin{cases} a_n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$\epsilon^2 = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} |0 - h_d[n]|^2}_{=0} + \sum_{0}^{N-1} |a_n - h_d[n]|^2 + \underbrace{\sum_{N}^{\infty} |0 - h_d[n]|^2}_{=0}$$

Minimieren: $\dfrac{\partial \epsilon^2}{\partial a_n} = 0$

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial a_n} = \sum_0^{N-1} \frac{\partial}{\partial a_n} \left(|a_n - h_d[n]|^2 \right) = 0$$

$$0 = \sum_0^{N-1} 2\,(a_n - h_d[n])$$

$\Rightarrow a_n = h_d[n]$ ist eine (offensichtliche) Lösung wenn das Signal ideal ist

es gibt aber mehrere Lösungen, im Falle zB.

n	1	2	3	4	5
x[n]	1	0	0	0	-1

was ja auch 0 ergeben würde