Beispiel 33 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 7, 11.05.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Das elektrostatische Potential einer Punktladung Q im Koordinatenursprung ist durch

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

gegeben, für das Potential eines Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p} = (p,0,0)$ gilt:

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{px}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

(Dabei sind Q,p und ε_0 Konstante.) In beieden Fällen berechne man das zugehörige elektrische Feld nach der Formel $\vec{E} = -grad\ \varphi$.

2 Theoretische Grundlagen: Der Gradient

Der **Gradient** ist die Funktion eines Skalarfeldes, welche die Änderungsrate und die Richtung der größten Änderung in Form eines Vektorfeldes angibt. Er ist damit eine Verallgemeinerung der Ableitung für Funktionen von mehreren Variablen.
Interpretiert man z.B. die Höhenkarte einer Landschaft als eine Funktion $z(x,y)$, die jedem Ort die Höhe an dieser Stelle zuordnet, dann ist der Gradient von z an einer Stelle (x,y) ein Vektor, der in die Richtung des steilsten Anstieges zeigt, und dessen Länge ein Maß für die Steigung ist.
Ein Vektor ist dann ein Gradient, wenn er jedem Punkt eines Skalarfeldes zugeordnet werden kann. Er hat die Richtung der Normalen der jeweiligen Niveaufläche, auf der die Werte des Skalarfeldes konstant sind, und ist in der Richtung wachsender Funktionswerte des Skalarfeldes orientiert. Der Betrag des Gradienten stimmt mit der Richtungsableitung der Funktion des Skalarfeldes in Normalenrichtung überein.

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, dann ist der Gradient an der Stelle x wie folgt definiert:

$$\nabla f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}^T$$

3 Lösung des Beispiels

Wir müssen zunächst die **partiellen Ableitungen von φ_1** berechnen:

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Dazu fassen wir zur Vereinfachung alle Konstanten unter K zusammen:

$$\varphi_1(x,y,z) = K \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad K = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$$

Weiters können wir zum Ableiten folgende günstigere Darstellung wählen:

$$\varphi_1(x,y,z) = K \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \qquad K = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$$

Nun leiten wir partiell ab:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1x} &= K \cdot -\frac{1}{2} \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2x = -K \cdot x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\
\varphi_{1y} &= K \cdot -\frac{1}{2} \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2y = -K \cdot y \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\
\varphi_{1z} &= K \cdot -\frac{1}{2} \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2z = -K \cdot z \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}
\end{aligned}$$

Die Gradient und das dadurch bestimmte elektrische Feld lautet somit:

$$grad\varphi_1 = -\begin{pmatrix} K \cdot x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\ K \cdot y \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\ K \cdot z \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \end{pmatrix} = -K \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = -grad\ \varphi_1 = K \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir die **partiellen Ableitungen von φ_2**:

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{px}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Dazu fassen wir zur Vereinfachung alle Konstanten unter K zusammen und führen eine Substitution durch:

$$\varphi_2(x,y,z) = K \cdot \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = K \cdot \frac{u}{v} \qquad K = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}$$

Zunächst berechnen wir alle partiellen Ableitungen von u und v:

$$u_x = 1 \qquad u_y = u_z = 0$$
$$v_x = \frac{3}{2} \cdot (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x = 3x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$
$$v_y = 3y \cdot (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$
$$v_z = 3z \cdot (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

Nun berechnen wir die partiellen Ableitungen von φ_2:

$$\varphi_{2x} = K \cdot \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = K \cdot \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x \cdot 3x(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = K \cdot \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$
$$\varphi_{2y} = K \cdot \frac{u_y v - v_y u}{v^2} = K \cdot \frac{-x \cdot 3y \cdot (x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = K \cdot \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$
$$\varphi_{2z} = K \cdot \frac{u_z v - v_z u}{v^2} = K \cdot \frac{-x \cdot 3z \cdot (x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = K \cdot \frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Die Gradient und das dadurch bestimmte elektrische Feld lautet somit:

$$grad\varphi_2 = \begin{pmatrix} K \cdot \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ K \cdot \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ K \cdot \frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \end{pmatrix} = K \cdot \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \cdot \begin{pmatrix} y^2+z^2-2x^2 \\ -3xy \\ -3xz \end{pmatrix}$$
$$\vec{E} = -grad\ \varphi_2 = -K \cdot \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \cdot \begin{pmatrix} y^2+z^2-2x^2 \\ -3xy \\ -3xz \end{pmatrix}$$