Beispiel 48 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 7

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 06/2006

1 Angabe

Welcher Quader mit gegebener Oberfläche A besitzt maximales Volumen?

2 Theoretische Grundlagen: Lagrangesches Multiplikatorverfahren

Die Extremwerte einer Funktion $z = f(x, y)$, deren unabhängige Variablen x und y einer Nebenbedingung $\phi(x, y) = 0$ unterworfen sind, lassen sich mit Hilfe des Lagrangeschen Multiplikatorverfahrens wie folgt bestimmen:

1. Aus der Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ und deren Nebenbedingung $\phi(x, y) = 0$ wird zunächst die Hilfsfunktion

   $$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \phi(x, y)$$

   gebildet. Der (noch unbekannte) Faktor λ heißt Langrangescher Multiplikationsfaktor.

2. Dann werden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Hilfsfunktion gebildet und gleich Null gesetzt:

   $$\begin{cases} F_x = f_x(x, y) + \lambda \cdot \phi_x(x, y) = 0 \\ F_y = f_y(x, y) + \lambda \cdot \phi_y(x, y) = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

   Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die Koordinaten der gesuchten Extremwerte sowier der Lagrangesche Multiplikationsfaktor λ berechnen.

3 Lösung des Beispiels

Wir setzen die Lagrange-Funktion zusammen aus

- $f(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$ (Maximales Volumen)
- Nebenbedingung $A = 2ab + 2bc + 2ac$

Bilden Lagrange-Funktion:

$$\Phi(a, b, v, \lambda) = a \cdot b \cdot c + \lambda \cdot (2ab + 2bc + 2ac)$$

Bilden $\mathrm{grad}(\Phi(x)) = 0$ - partielle erste Ableitungen sind zu berechnen:

1. $\Phi'(a) = bc + 2\lambda b + 2\lambda c = 0$
2. $\Phi'(b) = ac + 2\lambda a + 2\lambda c = 0$
3. $\Phi'(c) = ab + 2\lambda b + 2\lambda a = 0$
4. $\Phi'(\lambda) = 2ab + 2bc + 2ac = 0$

Lösen explizit nach λ auf in den ersten drei Gleichungen:

- $-bc = \lambda \cdot (2b + 2c) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -\frac{bc}{2b+2c}$
- $-ac = \lambda \cdot (2a + 2c) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -\frac{ac}{2a+2c}$
- $-ab = \lambda \cdot (2a + 2b) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -\frac{ab}{2a+2b}$

Da gilt $\lambda = -\frac{bc}{2b+2c} = -\frac{ac}{2a+2c} = -\frac{ab}{2a+2b}$, muss auch gelten:

$$-\frac{bc}{2b+2c} = -\frac{ac}{2a+2c} = -\frac{ab}{2a+2b} | \cdot (2a+2b)(2a+2c)(2b+2c)$$
$$-bc \cdot (2a+2b) \cdot (2a+2c) = -ac \cdot (2a+2b) \cdot (2b+2c) = -ab \cdot (2a+2c) \cdot (2b+2c)$$
$$-bc = -ac = -ab \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a = b = c}$$