Stufler Prüfung 28.06.2022 / Beispiel 1

Angabe ist:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2(n+1) & 4n & 4n \\ -n & -2(n-1) & -2n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Man kann schonmal vermuten das wir hier den Beweis durch vollständige Induktion durchführen müssen, darum setzen wir n=1 ein und rechnen alles aus.

IA: $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = 2^0 \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

IB: $\exists n \in N \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2(n+1) & 4n & 4n \\ -n & -2(n-1) & -2n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Und wir sollen jetzt zeigen: $n \to n+1$

also: $2^n \begin{pmatrix} 2(n+2) & 4(n+1) & 4(n+1) \\ -(n+1) & -2n & -2(n+1) \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

IS: $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{n+1}$

Kann man auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n * \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^1$$

Jetzt können wir die Matrix von der Angabe einsetzen.

$$2^{n-1}\begin{pmatrix} 2(n+1) & 4n & 4n \\ -n & -2(n-1) & -2n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt die zwei Matrizen multiplizieren:

$$2^{n-1}\begin{pmatrix} 4n+8 & 8n+8 & 8n+8 \\ -2n-2 & -4n & -4n-4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Damit wir jetzt auf die 2^n von der IB kommen, müssen wir aus der Matrix 2 herausheben:

$$2^{n-1}\begin{pmatrix} 2(2n+4) & 2(4n+4) & 2(4n+4) \\ 2(-n-1) & 2(-2n) & 2(-2n-2) \\ 2(0) & 2(0) & 2(2) \end{pmatrix} = 2^{n-1+1}\begin{pmatrix} 2n+4 & 4n+4 & 4n+4 \\ -n-1 & -2n & -2n-2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt noch ein bisschen umformen:

$$2^{n}\begin{pmatrix} 2(n+2) & 4(n+1) & 4(n+1) \\ -(n+1) & -2n & -2(n+1) \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Somit haben wir die Matrix der IB, und die Gleichung für alle $n \in N$ bewiesen.