74.) Quotientenkriterium

Es sei $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls eine Zahl q existiert, sodaß

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \text{ für (fast) alle } n,$$

so ist $\sum_n a_n$ absolut konvergent. Gilt hingegen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \text{ für (fast) alle } n,$$

so divergiert die Reihe $\sum_n a_n$.

Sei $a_n := \frac{n+2}{6^n}$, $n \geq 0$

Dann: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+3}{6^{n+1}}}{\frac{n+2}{6^n}}\right| = \left|\frac{n+3}{6n+12}\right| = \left|\frac{1+\frac{3}{n}}{6+\frac{12}{n}}\right| \leq \frac{1}{6} < 1$ für alle $n \geq 1$

So ist $\sum_{n\geq 0} a_n = \sum_{n \geq 0} \frac{n+2}{6^n}$ absolut konvergent.

86.) $a_n \geqslant 0$

$\sum_{n\geqslant 0} a_n$ konvergent, sei: $\sum_{n\geqslant 0} a_n = a$

zu zeigen: $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2$ konvergent

Beweis:

Seien:

$c_n = a_n^2$

$d_n = a_n \cancel{\sup a_n}$

Dann:

- $|c_n| = a_n^2 \leqslant a_n \cancel{\sup a_n} = d_n$ für alle $n \geqslant 0$
- $\sum_{n\geqslant 0} d_n = \sum_{n\geqslant 0} a_n \cancel{\underbrace{\sup a_n}_{\in \mathbb{R}} = \sup a_n \cdot \sum_{n\geqslant 0} a_n = a \sup a_n \in \mathbb{R}} \Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} d_n$ konvergent

Daher (Majorantenkriterium):

$\sum_{n\geqslant 0} c_n = \sum_{n\geqslant 0} a_n^2$ absolut konvergent ■

$a_n \geqslant 0$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ konvergent

z.z. $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2$ konvergent ebenfalls

Cauchy-Kriterium: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leqslant \varepsilon, \forall m, n \geqslant N$

$a_0 + a_1 + \dots + \underbrace{a_n + \dots + a_m}_{} + \dots$

N

$\varepsilon < 1 : \exists N : a_n \leqslant \varepsilon, \forall n \geqslant N$

$a_n < 1$

$\Rightarrow a_n^2 < a_n, \forall n \geqslant N$

$\overset{\text{C-K.}}{\Longrightarrow} \sum_{k=n}^{m} a_k^2 \leqslant \sum_{k=n}^{m} a_k \leqslant \varepsilon$ ✓

91.) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Sei $s_n = \sum\limits_{k\geq 0}^{n} (-1)^k (a_{k+1} + a_k) =$

$$= \sum_{k\geq 0}^{n} (-1)^k (a_k + a_{k+1}) =$$

$$= a_0 + \cancel{a_1} - \cancel{a_1} - \cancel{a_2} + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} - \cancel{a_3} - \cancel{a_4} + \cancel{a_4} + \cancel{a_5} - \cancel{a_5} - \cancel{a_6} + \cancel{a_6} + \cancel{a_7} -+ \ldots$$

$$\ldots -+ \cancel{a_{n-1}} -+ \cancel{a_n} +- \cancel{a_n} +- a_{n+1} =$$

$$= a_0 \pm a_{n+1}$$

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n (a_{n+1} + a_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = a_0 .$$