12. UE Analysis für INF und WINF

$\boxed{394}$ Nach 7.29 im Buch sind die Isoklinen bestimmt durch die Gleichungen $y' = c$, $c \in \mathbb{R}$, in unserem Fall also $\frac{x}{x-y} = c$.

Für $c=0$ ergibt sich $x=0$ (y-Achse).

Für $c \neq 0$ ergibt sich $x = x\cdot c - y\cdot c$, also

$$y = \frac{c-1}{c}\cdot x = \left(1-\frac{1}{c}\right)\cdot x = k\cdot x \text{ mit } k = 1-\frac{1}{c} \neq 1.$$

Geben wir uns umgekehrt $k \neq 1$ vor, so ergibt sich $1-k = \frac{1}{c}$, also $c = \frac{1}{1-k}$. Also ergeben sich als Isoklinen alle Geraden der Form $y=kx$ mit $k\neq 1$, sowie die Gerade $x=0$ (y-Achse).

Längs einer Geraden $y=kx$, $k\neq 1$, haben alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = \frac{x}{x-y}$ die Steigung $c = \frac{1}{1-k}$, und längs der y-Achse die Steigung $c=0$.

Anmerkung: Längs der – bisher ausgenommenen – Geraden $y=x$ verlaufen die Lösungen der Differentialgleichung senkrecht, wie die folgende Rechnung zeigt:

Setzen wir $\frac{dx}{dy} = c^*$, also $\frac{x-y}{x} = 1 - \frac{y}{x} = c^*$,

so ergibt sich $y = (1-c^*)x$, für $c^*=0$ also $y=x$.

Der Wert $c^*=0$ entspricht aber wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ dem Wert $c=\infty$.

Weitere Beispiele: $k=0$ (x-Achse) $\Longrightarrow c=1$; $k=-1 \Longrightarrow c=\frac{1}{2}$.

$\boxed{385}$ $\underset{\sim\sim\sim}{y' = y \cdot \tan x = y \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}$. Für die Lösung müssen wir zunächst ein geeignetes Intervall I festlegen. Wir nehmen $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, also $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Für $y > 0$ folgt: $\frac{y'}{y} = \frac{\sin x}{\cos x}$ (Trennung der Variablen), also $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$,

$\ln y = -\ln(\cos x) + C_1$, $y = \frac{C_1^*}{\cos x}$ mit $C_1^* = e^{C_1} > 0$. Für unsere Differentialgleichung passt als „<u>allgemeine Lösung</u>"

$$\underline{\underline{y = \frac{C}{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},}}$$

wie eine <u>Probe</u> zeigt:

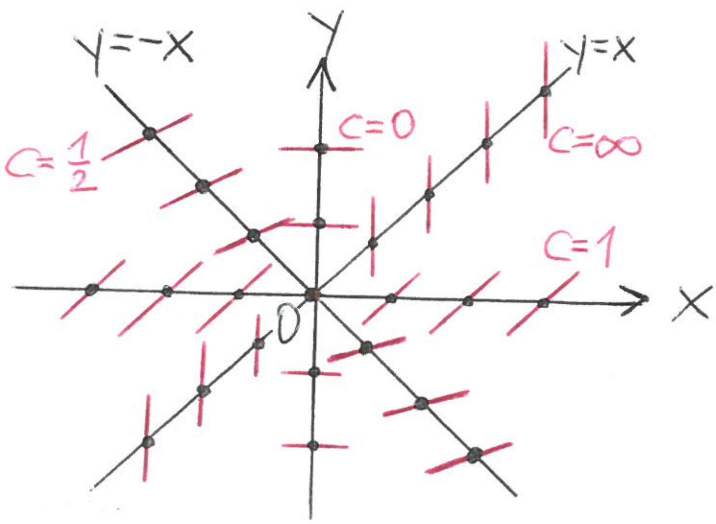
$y = \frac{C}{\cos x} = C \cdot (\cos x)^{-1} \Longrightarrow y' = -1 \cdot C \cdot (\cos x)^{-2} \cdot (-\sin x) =$

$= C \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} = C \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{C}{\cos x} \cdot \tan x =$

$= y \cdot \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$

<u>Skizze zu</u> $\boxed{394}$:

k	c
∞	0
0	1
-1	$\frac{1}{2}$
1	∞



$\boxed{400}$ $y' + \frac{1}{1-x}\, y = x^2$, $y(0)=1$. Wir müssen wieder ein Intervall I für die Lösung festlegen. Mit $y(0)=1$ kommt $I=(-\infty,1)$ in Frage, also $x<1$.

Für die homogene Gleichung machen wir Trennung der Variablen. Für $y>0$ folgt: $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1}$, also

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x-1}, \quad \ln y = \ln(1-x) + C_1, \quad y = C_1^*(1-x)$$

mit $C_1^* = e^{C_1} > 0$. Für die homogene Gleichung passt als „allgemeine Lösung" $y_h = C(1-x)$, $C \in \mathbb{R}$, wie eine Probe zeigt: $y_h' + \frac{1}{1-x} y_h = -C + \frac{1}{1-x}\cdot C(1-x) = 0$.

Für eine „partikuläre Lösung" der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz der „Variation der Konstanten":

$$y_p(x) = C(x)\cdot y_h(x) = C(x)\cdot(x-1) \Longrightarrow y_p' = C'(x)(x-1) + C(x)$$

und $\frac{y_p(x)}{1-x} = -C(x) \Longrightarrow y_p'(x) + \frac{y_p(x)}{1-x} = C'(x)(x-1) = x^2$

$$\Longrightarrow C'(x) = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}.$$

$x<1 \Longrightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(1-x)$ (auf die Konstante kann verzichtet werden) $\Longrightarrow y_p(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x + \ln(1-x)\right)(x-1)$.

Probe: $y_p'(x) + \frac{y_p(x)}{1-x} = \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)(x-1) + \frac{x^2}{2} + x + \ln(1-x) + (-1)\cdot\left(\frac{x^2}{2} + x + \ln(1-x)\right) = (x+1)(x-1)+1 = x^2-1+1 = x^2.$

$\Longrightarrow$ Gesamtlösung $y = y_h + y_p = C(1-x) + \left(\frac{x^2}{2} + x + \ln(1-x)\right)(x-1)$.

$\Longrightarrow y(0) = C\cdot 1 + (0 + 0 + \underbrace{\ln 1}_{=0})(-1) = C \Longrightarrow C=1.$

$\Longrightarrow$ Lösung zum „Anfangswert": $y = 1-x+\left(\frac{x^2}{2}+x+\ln(1-x)\right)(x-1)$, $x<1$.