3. Zwischentest, Gruppe D

2022-11-29

Ein Unternehmen hat zwei mögliche Investitionsprojekte unsicherer Rendite.

- Projekt 1: $E(r_1) = 0.19400$; $Var(r_1) = 0.00500$
- Projekt 2: $E(r_2) = 0.28100$; $Var(r_2) = 0.02500$

Die Kovarianz der Renditen dieser beiden Projekte ist $Cov(r_1, r_2) = 0.00500$.

Portfolio $\boldsymbol{p_1}$: Nehmen Sie an, dass das Ziel des Unternehmens darin besteht, ein Projektportfolio mit möglichst geringem Risiko zu bilden. Welche Portfoliogewichte soll das Unternehmen für $\boldsymbol{p_1}$ wählen?

Portfolio $\boldsymbol{p_2}$: Wenn die EntscheidungsträgerInnen im Unternehmen eine Risikoaversion von $y = 6.5$ haben und das Projektportfolio so wählen, dass der zugehörige Mittelwert- Varianz Nutzen maximiert wird, wie soll das Unternehmen die Portfoliogewichte für $\boldsymbol{p_2}$ wählen?

Die Inverse der Kovarianzmatix ist gegeben als

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 250.0000 & -50.0000 \\ -50.0000 & 50.0000 \end{pmatrix}$$

Welche Antworten sind richtig?

a) Das Gewicht des 1. Projekts im Portfolio $\boldsymbol{p_1}$ mit der niedrigsten Varianz (in % auf zwei Kommastellen gerundet) ist: 66.92 .

b) Die Varianz des Portfolios $\boldsymbol{p_1}$ (auf 4 Kommastellen gerundet) ist: 0.0250.

c) Das Gewicht des 2. Projekts im Portfolio $\boldsymbol{p_2}$ mit dem maximalen Nutzen für $y = 6.5$ (in % auf zwei Kommastellen gerundet) ist: 66.92 .

d) Die Varianz des Portfolios $\boldsymbol{p_2}$ (auf 4 Kommastellen gerundet) ist 0.0140 .

330.227 Betriebswirtschaftliche Optimierung
ao.Univ.Prof. Mag. DDr. Thomas Dangl

3. Zwischentest, Gruppe D
2022-11-29

Ein Unternehmen hat zwei mögliche Investitionsprojekte mit unsicherer Rendite.

- Projekt 1: $E(r_1) = 0.19400$; $\mathrm{Var}(r_1) = 0.00500$
- Projekt 2: $E(r_2) = 0.28100$; $\mathrm{Var}(r_2) = 0.02500$

Die Kovarianz der Renditen dieser beiden Projekte ist $\mathrm{Cov}(r_1, r_2) = 0.00500$. Portfolio $\mathbf{p}_1$: Nehmen Sie an, dass das Ziel des Unternehmens darin besteht, ein Projektportfolio mit möglichst geringem Risiko zu bilden. Welche Porfoliogewichte soll das Unternehmen für $\mathbf{p}_1$ wählen?

Portfolio $\mathbf{p}_2$: Wenn die EntscheidungsträgerInnen im Unternehmen eine Risikoaversion von $\gamma = 6.5$ haben und das Projektportfolio so wählen, dass der zugehörige Mittelwert-Varianz-Nutzen maximiert wird, wie soll das Unternehmen die Portfoliogewichte für $\mathbf{p}_2$ wählen?

Die Inverse der Kovarianzmatix ist gegeben als

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 250.0000 & -50.0000 \\ -50.0000 & 50.0000 \end{pmatrix}.$$

a) Das Gewicht des 1. Projekts im Portfolio $\mathbf{p}_1$ mit der niedrigsten Varianz (in % auf 2 Kommastellen gerundet) ist: 66.92.

b) Die Varianz des Portfolios $\mathbf{p}_1$ (auf 4 Kommastellen gerundet) ist: 0.0250.

c) Das Gewicht des 2. Projekts im Portfolio $\mathbf{p}_2$ mit dem maximalen Nutzen für $\gamma = 6.5$ (in % auf 2 Kommastellen gerundet) ist: 66.92.

d) Die Varianz des Portfolios $\mathbf{p}_2$ (auf 4 Kommastellen gerundet) ist: 0.0140.

Lösungsversuch von Bbob:

Erstellung der Kovarianzmatrix:

Variante 1: Extraktion aus den angegebenen Daten

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \mathrm{Var}(X_n) \end{pmatrix}$$

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(r_1) & Cov(r_1, r_2) \\ Cov(r_2, r_1) & Var(r_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}005 & 0{,}005 \\ 0{,}005 & 0{,}025 \end{pmatrix}$$

Variante 2: Berechnung der Originalmatrix durch Invertieren der Inversen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Da b und c denselben Wert haben, lässt sich die Gleichung vereinfachen.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & -50 \\ -50 & 50 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{250 \cdot 50 - (-50)^2} \begin{pmatrix} 50 & 50 \\ 50 & 250 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10000} \begin{pmatrix} 50 & 50 \\ 50 & 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}005 & 0{,}005 \\ 0{,}005 & 0{,}025 \end{pmatrix}$$

Alle benötigten Angaben:

$$\mu = \begin{pmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}194 \\ 0{,}281 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}005 & 0{,}005 \\ 0{,}005 & 0{,}025 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 250 & -50 \\ -50 & 50 \end{pmatrix}$$

a) Das Gewicht des 1. Projekts im Portfolio $\boldsymbol{p_1}$ mit der niedrigsten Varianz (in % auf zwei Kommastellen gerundet) ist: 66.92 .

Das Ziel für Portfolio $\boldsymbol{p1}$ ist, ein Portfolio mit der geringstmöglichen Varianz zu bilden.

Berechnung der Gewichte $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2$:

$$w_{minVar} = \frac{\Sigma^{-1} \cdot 1}{1^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot 1}$$

$$w_{minVar} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{w}_1 = 1, \mathrm{w}_2 = 0$$

Das Gewicht des 1. Projekts im Portfolio $\boldsymbol{p_1}$beträgt 100% (1,00).

Das Gewicht des 2. Projekts im Portfolio $\boldsymbol{p_1}$beträgt 0% (0,00).

Die Gewichtung der Projekte muss in Summe 1 ergeben.

$$\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = 1.$$

Ergebnis: a ist **falsch**, da die Gewichtung des 1. Projekts 100% ist.

b) Die Varianz des Portfolios $\boldsymbol{p_1}$ (auf 4 Kommastellen gerundet) ist: 0.0250 .

Berechnung der Portfolio-Varianz:

Variante 1: Berechnung mit Formel (Formel nur anwendbar für 2x2 Matrizen)

$Var(p) = \mathrm{w}_1{}^2 \cdot \mathrm{Var}(\mathrm{r}_1) + \mathrm{w}_2{}^2 \cdot \mathrm{Var}(\mathrm{r}_2) + 2 \cdot \mathrm{w}_1 \cdot \mathrm{w}_2 \cdot Cov(\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2)$

$Var(p) = 1^2 \cdot 0{,}005 + 0^2 \cdot 0{,}025 + 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0{,}005$

$Var(p) = 0{,}00500$

Variante 2: Berechnung via Multiplikation der Matrizen

$$w_{minVar}{}' \cdot \Sigma \cdot w_{minVar}$$

$$(1 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}005 & 0{,}005 \\ 0{,}005 & 0{,}025 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0{,}00500$$

Ergebnis: b ist **falsch**, da Varianz des Portfolios $\boldsymbol{p_1}$ 0,00500 ist.

c) Das Gewicht des 2. Projekts im Portfolio p_2 mit dem maximalen Nutzen für $\gamma = 6.5$ (in % auf zwei Kommastellen gerundet) ist: 66.92 .

Für Portfolio $\boldsymbol{p_2}$ ist das Ziel, den Mittelwert-Varianz-Nutzen zu maximieren.

Ein Entscheidungsträger mit Mean-Variance Utility (Erwartungswert-Varianz-Nutzen) wählt jenes Portfolio **w**, das die Nutzenfunktion

$$U(r_w) = E(r_w) - \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot Var(r_w)$$

Maximiert. Wobei der Parameter γ die Risikoaversion charakterisiert.

Das optimale Portfolio ergibt sich durch:

$$w^* = \frac{1}{\gamma} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \left(\mu - \frac{B - \gamma}{A} \cdot \mathbf{1}\right)$$

$$A = \mathbf{1}' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1}$$

$$B = \mathbf{1}' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu = \mu' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1}$$

$$w^* = \frac{1}{6{,}5} \cdot \begin{pmatrix} 250 & -50 \\ -50 & 50 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0{,}194 \\ 0{,}281 \end{pmatrix} - \frac{B - 6{,}5}{A} \cdot \mathbf{1}\right)$$

$$A = (1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 250 & -50 \\ -50 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 200$$

$$B = (1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 250 & -50 \\ -50 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}194 \\ 0{,}281 \end{pmatrix} = 38{,}8$$

$$w^* = \frac{1}{6{,}5} \cdot \begin{pmatrix} 250 & -50 \\ -50 & 50 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0{,}194 \\ 0{,}281 \end{pmatrix} - \frac{38{,}8 - 6{,}5}{200} \cdot \mathbf{1}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}3307 \\ 0{,}6692 \end{pmatrix}$$

$$w^* = \begin{pmatrix} 0{,}3307 \\ 0{,}6692 \end{pmatrix}$$

Das Gewicht des 1. Projekts im Portfolio $\boldsymbol{p_2}$ beträgt 33,07% (0,3307).

Das Gewicht des 2. Projekts im Portfolio $\boldsymbol{p_2}$ beträgt 66,92% (0,6692).

Ergebnis: c ist **richtig**.

d) Die Varianz des Portfolios $\boldsymbol{p_2}$ (auf 4 Kommastellen gerundet) ist 0.0140 .

Berechnung der Portfolio-Varianz:

Variante 1: Berechnung mit Formel (Formel nur anwendbar für 2x2 Matrizen)

$Var(p) = \mathrm{w_1}^2 \cdot \mathrm{Var(r_1)} + \mathrm{w_2}^2 \cdot \mathrm{Var(r_2)} + 2 \cdot \mathrm{w_1} \cdot \mathrm{w_2} \cdot Cov(\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2})$

$Var(p) = 0{,}3307^2 \cdot 0{,}005 + 0{,}6692^2 \cdot 0{,}025 + 2 \cdot 0{,}3307 \cdot 0{,}6692 \cdot 0{,}005$

$Var(p) = 0{,}0140$

Variante 2: Berechnung via Multiplikation der Matrizen

$$w' \cdot \Sigma \cdot \; w$$

$$(0{,}3307 \;\; 0{,}6692) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}005 & 0{,}005 \\ 0{,}005 & 0{,}025 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3307 \\ 0{,}6692 \end{pmatrix} = 0{,}0140$$

Ergebnis: d ist **richtig**.