Kapitel 3
Lineare Algebra

Inhaltsverzeichnis

Vektoren

Vektorräume

Grundlegend besteht ein Vektor aus einem Körper K (z.B.: $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_2$) sowie dessen Elemente (= Skalare). Als Beispiel betrachten wir einen Körper mit drei Skalaren:

$$K^3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad K_1^3 + K_2^3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}; \quad \lambda * K^3 = \begin{pmatrix} \lambda * x_1 \\ \lambda * x_2 \\ \lambda * x_3 \end{pmatrix}$$

Definition Vektorraum

Man erkennt leicht, dass $(K^n, +)$ eine abelsche Gruppe bildet. Das neutrale Element ist der Nullvektor und das Inverse von $\vec{x}$ ist $-\vec{x}$.

Betrachtet man nun $V = K^n$, also $(V, +)$ als abelsche Gruppe und K als Körper, dann ist die algebraische Struktur $(V, +, K)$ ein **Vektorraum** (bzw. linearer Raum) über K, wenn folgende Eigenschaften für alle $\lambda, \mu \in K \; und \; \vec{x}, \; \vec{y} \in V$ erfüllt sind:

> $\lambda * (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda * \vec{x} + \lambda * \vec{y}$
> $(\lambda + \mu) * \vec{x} = \lambda * \vec{x} + \mu * \vec{x}$
> $(\lambda\mu) * \vec{x} = \lambda * (\mu * \vec{x})$
> $1 * \vec{x} = \vec{x}$

Die Prüfung eines Vektorraums ist einfach. Man nimmt zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V$ sowie $\lambda \in K$ und prüft ob $\vec{x} + \vec{y} \in V$ sowie $\lambda * \vec{x} \in V$ gültig ist.

Definition Unterraum/Teilraum

Man nimmt eine nichtleere Teilmenge U von V. Bildet $(U, +, K)$ wieder einen Vektorraum, dann heißt U Unterraum oder Teilraum von V (Kurzschreibweise $U \leq V$)

Auch hier ist der Beweis gleich einfach wie beim Vektorraum. Man nimmt zwei Vektoren aus U und prüft die Gültigkeit der Addition sowie der skalaren Multiplikation. Zum Beispiel sind alle Vielfachen eines Vektors ein Unterraum von diesem.

Definition Nebenraum

Ein verschobener Unterraum, also eine Nebenklasse ist der Nebenraum N.

$$N = \overrightarrow{x_0} + U = \{\overrightarrow{x_0} + \vec{u} \mid \vec{u} \in U\}$$

Ein Nebenraum besteht immer aus einem Ortsvektor $\overrightarrow{x_0}$ und dem eigentlichen Vektor $\vec{u}$ aus dem Unterraum.

$g = \overrightarrow{x_0} + [v]$ ist also eine Gerade, die um $\overrightarrow{x_0}$ verschoben, aber parallel zu $[v]$ $(= skalares \; Vielfaches)$ ist.

$\epsilon = \{\vec{x} = \overrightarrow{x_0} + \lambda_1 * \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 * \overrightarrow{v_2} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ bildet eine Ebene. Die Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ spannen einen Unterraum auf. Dieser Unterraum ist eine Ebene, der beide Vektoren enthält.

Definition Linearkombination

Eine Linearkombination besteht immer aus endlich vielen Vektoren sowie dem einzelnen Koeffizienten zu jedem Vektor. Die Idee dahinter ist, dass man untersuchen möchte, ob sich ein bestimmter Vektor durch die Summe von Vielfachen anderer Vektoren darstellen lässt.

Die Menge aller Linearkombinationen einer Menge von Vektoren wird lineare Hülle genannt.

Beispiel in $\mathbb{R}^3$

Der Vektor $\begin{pmatrix}16\\-4\\3\end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, denn

$$\begin{pmatrix}16\\-4\\3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Definition Lineare Hülle

Die lineare Hülle [M] einer nichtleeren Teilmenge M von V ist nichts anderes, als die Menge aller Vektoren, die durch Linearkombinationen von endlich vielen Vektoren gebildet werden können. Da man einen Vektor nicht verschieden darstellen kann, gibt es auch nur endlich viele Lösungen.

Beispielweise ist $[\vec{v}] = \{\lambda * \vec{v} | \lambda \in K\}$ die lineare Hülle eines Vektors $\vec{v}$.

Es gilt $M \subseteq V \Rightarrow [M] \leq V$ sowie $M \subseteq V \Rightarrow [M]$ ist der kleinste Unterraum der M enthält.

Lineare Unabhängigkeit und Basen

Linear unabhängig

Sind zwei Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ linear unabhängig, bedeutet das, dass $\overrightarrow{v_2}$ kein Vielfaches von $\overrightarrow{v_1}$ ist. Weitet man diesen Grundsatz auf eine Menge M von Vektoren aus, so heißt diese Menge linear unabhängig, wenn kein Vektor aus M, durch eine Linearkombination der anderen Vektoren aus M dargestellt werden kann.

Lässt sich ein Vektor aus M durch eine Linearkombination der anderen Vektoren darstellen, heißt die Menge linear abhängig. Auf den ersten Blick scheint das Überprüfen der linearen Unabhängigkeit relativ aufwendig zu sein. Als Hilfe kann folgender Grundsatz verwendet werden:

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$$

Eine Menge $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ von Elementen eines Vektorraums V ist genau dann linear unabhängig, wenn nur die trivialen Linearkombinationen den Nullvektor darstellen.

Jedenfalls heißt eine Linearkombination trivial, wenn alle Koeffizienten $\lambda_i = 0 (1 < i \leq n)$. Andernfalls wäre die Linearkombination nicht trivial.

Eine anschauliche Erklärung findet man in der Beispielsammlung unter Aufgabe 479.

Definition Basis

Eine Basis B ist eine Teilmenge eines Vektorraums. Diese Teilmenge muss linear unabhängig sein und zusätzlich muss [B] (lineare Hülle von B) gleich V sein.

Es lässt sich also jeder Vektor $\vec{x} \in V$ als Linearkombination von Vektoren der Basis darstellen. Die Koeffizienten der Linearkombination heißen Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich der Basis B.

Kanonische Basis

Die Kanonische Basis ist eine grundlegende Basis für Vektorräume. Für einen n-Dimensionalen Vektorraum existieren n Basisvektoren.

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\ldots\\1\end{pmatrix} \in K^n$$

Dabei ist jeder Basisvektor linear unabhängig, da er offensichtlich nicht durch eine Kombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann.

Definition Dimension

Besitzt ein Vektorraum V eine endliche Basis B, so ist die Dimension von V (= dim V) gleich der Anzahl der Vektoren von B (= $|B|$). Besitzt V keine endliche Basis, so heißt der Vektorraum unendlichdimensional.

Beispiel Kanonische Basis:

Man betrachtet einen n-Dimensionalen Raum. Mithilfe der Kanonischen Basis $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$, kann man jeden Vektor aus K^n darstellen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ sind die Koordinaten bezüglich E. Für die Dimension gilt: $\dim K^n = n$.

Koordinatenabbildung

Wir möchten jetzt das Modell verallgemeinern. V sei ein allgemeiner Vektorraum der Dimension n und $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ eine Basis von V. Es lässt sich also jeder Vektor $\vec{x} \in V$ als eindeutige Linearkombination mithilfe der Basisvektoren darstellen.

$$\vec{x} = \lambda_1 * \overrightarrow{b_1} + \lambda_2 * \overrightarrow{b_2} + \cdots + \lambda_n * \overrightarrow{b_n}$$

Zu einer bestimmten Basis existiert also die bijektive Koordinatenabbildung $\phi_B: V \to K^n$, die einem Vektor $\vec{x} \in V$ die Koordinaten zuordnet.

$$\phi_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung erfüllt zusätzlich noch folgende zwei Bedingungen:

$$\phi_B(\vec{x} + \vec{y}) = \phi_B(\vec{x}) + \phi_B(\vec{y}) \quad und \quad \phi_B(\lambda * \vec{x}) = \lambda * \phi_B(\vec{x})$$

Matrizen

Rechnen mit Matrizen

Definition Matrix

Eine Matrix ist eine „tabellarische“ Ansammlung von Werten. Sie ist immer rechteckig, kann auch quadratisch sein. Die Größe einer Matrix wird auch mit „Dimensionen“ ausgedrückt. Das ist die Anzahl der Spalten bzw. die Anzahl der Zeilen.

Eine Matrix mit m-Zeilen und n-Spalten wird kurz als $A \in K^{mxn}$ bezeichnet.

Definition transponierte Matrix (A^T)

Eine transponierte Matrix, wird an ihrer Symmetrieachse gespiegelt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Bei einer symmetrischen Matrix, ist A und A^T gleich.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

Beispiel anhand der Multiplikation $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
$(1\ 2)$	$1 * 1 + 2 * 3 = 7$	$2 * 1 + 2 * (-2) = -2$
$(3\ -2)$	$1 * 3 + 3 * (-2) = -3$	$2 * 3 + (-2) * (-2) = 10$

Definition Einheitsmatrix (I_n)

In der Einheitsmatrix wird die Diagonale mit 1er gefüllt, alle anderen Stellen sind 0:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invertierbare Matrizen

Definition inverse Matrix

Existiert für eine Matrix A eine andere Matrix A^{-1}, sodass gilt

$$A * A^{-1} = A^{-1} * a = I_n,$$

so heißt diese Matrix invertierbar oder regulär. A^{-1} ist die inverse Matrix zu A.

Eine Matrix ist dann invertierbar, wenn die lineare Hülle der Spalten von A ganz K^n ist, also der Rang von $A \in K^{nxn}$ gleich n ist.

Definition singuläre Matrix

Eine nicht invertierbare Matrix wird als singulär bezeichnet.

Überprüfung auf Invertierbarkeit

Eine Matrix ist singulär, wenn ihre Determinante 0 ist.

Rang einer Matrix und elementare Umformungen

Definition Rang

Der Spaltenrang einer Matrix ist die Dimension der linearen Hülle der Spalten von A. Der Zeilenrang und Spaltenrang ist immer gleich, deshalb spricht man auch nur von dem Rang.

Berechnung des Rangs

Man entwickelt die Matrix in eine Dreiecksmatrix und zählt die Glieder der Hauptdiagonale ungleich 0.

Dafür verwenden wir die elementaren Spaltenumformungen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(S2 - 2x\ S1,\ S3 + 3x\ S1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & 14 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(S3 - 7x\ S2,\ S4 - 8x\ S2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & 70 & 70 \end{pmatrix} \xrightarrow{(S4 - S3)} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 4 & -8 & 70 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang dieser Matrix ist demnach 3.

Definition der elementaren Spaltenumformungen

Die drei elementaren Spaltenumformungen sind:

- Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar λ
- Addieren eines Vielfachen einer anderen Spalte, d.h. ersetzen der Spalte a_j durch $\lambda a_i + a_j (i \neq j)$
- Vertauschen zweier Spalten a_i, a_j $(i \neq j)$

Definition der elementaren Zeilenumformungen

Die drei elementaren Zeilenumformungen sind:

- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar λ
- Addieren eines Vielfachen einer anderen Zeile, d.h. ersetzen der Zeile a_j durch $\lambda * a_i + a_j$ $(i \neq j)$
- Vertauschen zweier Zeilen a_i, a_j $(i \neq j)$

Berechnung der inversen Matrix

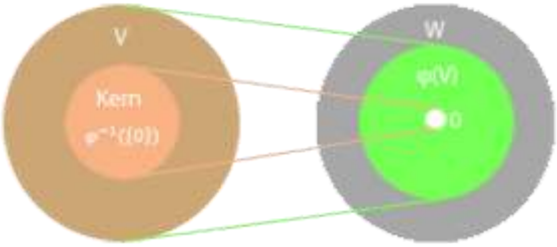
Zur Berechnung der inversen Matrix, wandelt man A in eine Dreiecksmatrix um. Dabei führt man die elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen nicht nur auf A sondern auch auf A^{-1} aus.

$$\underset{A}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \rightarrow \underset{Z2 - Z1,\ Z3 - Z1}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)} \rightarrow \underset{Z3 - Z2}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)} \rightarrow$$

$$\underset{Z1 + 2x\ Z2}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)} \rightarrow \underset{Z2 - ½\ Z3}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)} \rightarrow \underset{Z2 * (-1),\ Z3 * (-½)}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen



Definition einer linearen Abbildung

Eine Abbildung $f: V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W (über demselben Körper K) ist linear, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften für $\vec{x}, \vec{y} \in V; \lambda \in K$ hat.

- $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
- $f(\lambda * \vec{x}) = \lambda * f(\vec{x})$

Kern von f

Der Kern von f umfasst alle $\vec{x} \in V$, für die $f(\vec{x}) = 0$ gilt. Die Kurzschreibweise ist $\mathbf{ker}(\boldsymbol{f})$

Defekt von f

Die Dimension des Kerns von f ist der Defekt von f. Die Kurzschreibweise ist $\boldsymbol{def}(\boldsymbol{f})$

$$\operatorname{def}(f) = \dim(ker(f))$$

Bild von f

Das Bild von f definiert die Funktion $f(V) = \{f(\vec{x}) | \vec{x} \in V\}$. Die Kurzschreibweise ist $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{V})$

Rang von f

Die Dimension des Bildes von f ist der Rang von f. Die Kurzschreibweise ist $\boldsymbol{rg}(\boldsymbol{f})$

$$rg(f) = \dim\big(f(V)\big)$$

Rangformel

$$rg(f) + \operatorname{def}(f) = \dim V$$

Ein passendes Beispiel wäre Aufgabe 507 in der Beispielsammlung.

Determinanten

Definition Determinante

Die Determinante einer Matrix ist durch

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \dots a_{\pi(n)n}$$

gegeben. (S_n bezeichnet die Menge aller Permutationen der Zahlen 1,2, …, n und $sgn(\pi)$das Vorzeichen einer Permutation π)

Schreibweise der Determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Berechnung der Determinante

Die Determinante einer 2x2 Matrix ist einfach zu berechnen ($2! = 2$):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Man zieht also von dem Produkt der Hauptdiagonale das Produkt der anderen Diagonalen ab.

Bei einer 3x3 Matrix gibt es allerdings schon $3! = 6$ Permutationen:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Eine große Hilfe ist es, wenn man die Matrix zuerst mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren vereinfacht, da in einer Dreiecksmatrix die Kreuzprodukte für die Subtraktion wegfallen.

Sonstiges über die Determinante

> Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$.

> $\det(A * B) = \det A * \det B$ $\quad \forall A, B \in K^{nxn}$

> $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ $\quad$ Wenn $A \in K^{nxn}$ invertierbar ist

> $\det(A^T) = \det A$ $\quad \forall A \in K^{nxn}$

Skalarprodukte

Grundlegendes

Definition des Skalarproduktes

Das gewöhnliche Skalarprodukt von $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist die Summe der gliedweisen Multiplikation

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Das Skalarprodukt besitzt bestimmte Eigenschaften:

> $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$
> $\langle \vec{x}, \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{y_2} \rangle = \langle \vec{x}, \overrightarrow{y_1} \rangle + \langle \vec{x}, \overrightarrow{y_2} \rangle$
> $\langle \vec{x}, \lambda * \vec{y} \rangle = \lambda * \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
> $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0;\ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$

Definition der Länge

Die Länge eines Vektors $\vec{x}$, ist die Wurzel des Skalarproduktes mit sich selber.

$$\left||\vec{x}|\right| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Auch die Länge besitzt bestimmte Eigenschaften:

> $\left||\vec{x}|\right| \geq 0; \quad \left||\vec{x}|\right| = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$
> $\left||\lambda \vec{x}|\right| = |\lambda| * \left||\vec{x}|\right|$
> $\left||\vec{x} + \vec{y}|\right| \leq \left||\vec{x}|\right| + \left||\vec{y}|\right|$ Dreiecksungleichung: Abb. 3.11 (direkter Weg ist immer kürzer)

Definition des Winkels

Allgemein ist der Winkel zweier Vektoren so definiert:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\left||\vec{x}|\right| + \left||\vec{y}|\right|}$$

Dagegen kann noch der Spezialfall betrachtet werden:

$$\frac{\langle \vec{x}, \lambda \vec{x} \rangle}{\left||\vec{x}|\right| * \left||\lambda * \vec{x}|\right|} = \frac{\lambda * \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}{|\lambda| * \left||\vec{x}|\right|^2} = \begin{matrix} 1 & (\lambda > 0) \\ -1 & (\lambda < 0) \end{matrix}$$

Mit der Winkel- und Längenmessung haben wir eine geometrische Struktur über dem Vektorraum!

Ein Beispiel dazu ist Aufgabe 579 in der Beispielsammlung!

Sonstiges

> Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \left||\vec{x}|\right| * \left||\vec{y}|\right|$
> Es gilt: $\left||\vec{x} + \vec{y}|\right|^2 = \left||\vec{x}|\right|^2 + \left||\vec{y}|\right|^2$, wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ orthogonal sind (Beweis im Buch S. 134)

Orthogonal

Definition orthogonal

Sind zwei Vektoren orthogonal, ist deren Skalarprodukt 0.

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$

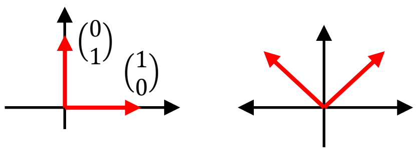
Außerdem bedeutet das, dass die Vektoren einen rechten Winkel bilden. Obwohl das in höheren Dimensionen nicht vorstellbar ist, gilt es für alle $\mathbb{R}^n$.

Definition Orthonormalbasis (ONB)

Eine Basis $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ des $\mathbb{R}^n$ heißt Orthonormalbasis (ONB), wenn die Basisvektoren $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}$ normiert und paarweise orthogonal sind. Das bedeutet, dass das Skalarprodukt zweier unterschiedlicher Basisvektoren immer 0 ergibt, während das Skalarprodukt eines Basisvektors mit sich selber 1 ergibt.

$$\langle \overrightarrow{b_i}, \overrightarrow{b_j} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Beispiel $\mathbb{R}^2$



Definition orthogonale Matrix

In einer orthogonalen Matrix ist jede Spalte normiert. Das Skalarprodukt zweier unterschiedlicher Spalten ist 0, das Skalarprodukt von einer Spalte mit sich selber ist 1. Dasselbe trifft auch auf die Zeilen zu.

Es gilt:

$$P * P^T = P^T * P = I_n \qquad\qquad P^T = P^{-1}$$