Runde 2, Beispiel 14

LVA 118.181, Übungsrunde 2, 27.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 26.10.2006

1 Angabe

Das logistische Gesetz für das Wachstum einer Population im beschränkten Lebensraum lautet

$$\dot{x} = (a - bx)x, \qquad \text{fuer } a, b > 0$$

Man löse das AWP $x(t_0) = x_0$ und bestätige, dass $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{b}$ für $x_0 > 0$.

2 Theoretische Grundlagen: Bernoulli-Differentialgleichung

Die Bernoulli-Differentialgleichung hat die Form (stetige Funktionen a,b, $\alpha \neq 0, 1$):

$$y'(x) + a(x) \cdot y = b(x) \cdot y^{\alpha}$$

Sie geht nach der Multiplikation mit $(1 - \alpha) \cdot y^{-\alpha}$ und der Substitution

$$\eta(x) = y(x)^{1-\alpha}$$

wegen $\eta' = (1 - \alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot y'$ inf folgende lineare Differentialgleichung über:

$$\eta' + (1 - \alpha) \cdot a(x) \cdot \eta = (1 - \alpha) \cdot b(x)$$

Die allegemeine Lösung $\eta = \eta(x)$ ist zu bestimmen und die Substitution mittels

$$y(x) = \eta(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

3 Theoretische Grundlagen: Lineare inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung

Für inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = s(x)$$

gilt: Die allgemeine Lösung ist die Summe aus der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung.

1. Integration der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

Zunächst Trennung der Veränderlichen, dann Integration. Allgemeine Lösung ist schließlich (auch logarithmische Schreibweise möglich):

$$y = c \cdot e^{-\int f(x)\,dx}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

2. Integration der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung

Die aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung gewonnene Integrationskonstante c wird durch die Funktion $c(x)$ ersetzt, so dass man den Lösungsansatz

$$y = c(x) \cdot e^{-\int f(x)\,dx}$$

erhält und diesen in die inhomogene Differentialgleichung einsetzt. Die so entstehende Differentialgleichung 1. Ordnung ist durch unbestimmte Integration direkt gelöst werden.

3. Summe aus der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung berechnen

Eine andere Möglichkeit zur Lösung besteht in der **Verwendung einer Formel**: Lineare inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Form $y' + p(x)y = r$ (r ist Störfunktion, singulär oder nur von x abhängig) können mit folgender Formel aufgelöst werden:

$$h = \int p(x)\,dx$$
$$y(x) = e^{-h}(\int e^h r\,dx + c)$$

(Quelle: Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9.Aufl., S.26ff.)
Die Formel hat mir schon gute Dienste zur Kontrolle geleistet und ich kann sie mittlerweile auch auswendig

4 Lösung des Beispiels

$$
\begin{gathered}
x' = (a - b \cdot x) \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x' - ax = -bx^2 \\
\alpha = 2 \qquad \Rightarrow \qquad u = x^{alpha-1} = x^{-1} \\
u' = -x^{-2} \cdot x' = -x^{-2}(ax - bx^2) = b - ax^{-1} \\
-ax^{-1} = -au \qquad \Rightarrow \qquad u(t)' + au(t) = b \\
p = a, \qquad r = b, \qquad h = \int p\,dt = at \\
u(t) = e^{-at} \cdot (\int e^{at} \cdot b\,dt + c) = e^{-at} \cdot \frac{e^{at}}{a} \cdot b + c \cdot e^{-at} = \\
\frac{b}{a} + ce^{-at} \\
\mathbf{x(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{u(t)}} = \frac{\mathbf{1}}{\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} + \mathbf{ce^{-at}}} \\
\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + 0} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}
\end{gathered}
$$

Unabhängig, von welchem Anfangswert pendelt sich die Lösungskurve bei $\frac{a}{b}$ ein.