Mathematik 3 für Informatiker — 1. Übungsblatt

1) Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = axy$ mit a reell. Man skizziere das Richtungsfeld und die Isoklinen für $a = -2$, $a = -1$ und $a = 1$.

2) Man bestimme für die Differentialgleichung aus Beispiel 1 für $a = -2$, $a = -1$ und $a = 1$ je 3 Strecken des Eulerschen Polygonzugs beginnend bei $P(1, 1)$ mit Schrittweite $\Delta x = 1$.

3) Man bestimme die Differentialgleichung der Kurvenscharen $x^2 + y^2 = C$ und $y = Ce^{x/C}$.

4) Man betrachte die Kurvenschar $\Phi(x, y, C) = y - Cx^2 - C^2$, $C \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie eine implizite Differentialgleichung 1. Ordnung, die diese Kurvenschar als allgemeine Lösung besitzt.

(b) Weisen Sie nach, daß die Einhüllende dieser Kurvenschar ebenfalls Lösung dieser Differentialgleichung ist. Die Einhüllende erhält man durch Elimination von C aus den Gleichungen

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial C}\Phi(x, y, C) = 0$$

5) Man beweise das Lemma von Gronwall: Sei $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiters gelte für alle $x \in [a, b]$ die Ungleichung

$$0 \leq \phi(x) \leq C + L \int_a^x \phi(t)\, dt$$

mit $C, L \geq 0$. Dann gilt für alle $x \in [a, b]$

$$\phi(x) \leq Ce^{L(x-a)}.$$

6) Man zeige, daß die Funktion $f(x, y) = 5|\cos(\pi y)| + x^2$ in $G = \mathbb{R}^2$ einer L-Bedingung genügt und gebe eine L-Konstante an.

7) Man berechne $y_0(x)$ bis $y_3(x)$ im Picard-Lindelöf Verfahren für die Differentialgleichung $y' = 2xy^2$ mit $y(0) = 1$ und vergleiche mit der exakten Lösung des AWP.

8–10) Man löse die Differentialgleichungen durch Trennung der Veränderlichen.

8) $4x\, dy - y\, dx = x^2\, dy$

9) $(1 + 2y)\, dx - (4 - x)\, dy = 0$

10) $\cos y\, dx + (1 - e^{-x}) \sin y\, dy = 0$ (für $x = 0$ sei $y = \pi/4$)

Mathematik 3 für Informatiker — 2. Übungsblatt

11–14) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

11) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$

12) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} - e^x - 6}\, dx$

13) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

14) $\displaystyle\int x^2 \cos x \, dx$

15) Mit Hilfe der Substitutionsregel beweise man die nachstehende Integrationsregel

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + C$$

und berechne damit $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x}$.

16) Beispiel 9 des ersten Übungsblatts.

17) Beispiel 10 des ersten Übungsblatts.

18–20) Man löse die exakten Differentialgleichungen.

18) $(x + y + 1)\, dx - (y - x + 3)\, dy = 0$

19) $(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1)\, dx + (x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y)\, dy = 0$

20) $(4x^3y^3 + \frac{1}{x})\, dx + (3x^4y^2 - \frac{1}{y})\, dy = 0$

Mathematik 3 für Informatiker — 3. Übungsblatt

21–22) Man löse mittels integrierendem Faktor:

21) $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

22) $y(3 - 5x^2y)\,dx + x(2 - 3x^2y)\,dy = 0$, Ansatz: $M(x, y) = m(x)y$

23–24) Man löse die homogenen Differentialgleichungen.

23) $(2x + 3y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$

24) $(x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x})\,dx + x \cos \frac{y}{x}\,dy = 0$

25) Bestimmen Sie die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y' = y.$$

Für welche Anfangswerte von (x_0, y_0) ist das zugehörige AWP $y(x_0) = y_0$ nicht oder nicht eindeutig lösbar? Welche Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind dabei verletzt?

26–28) Man löse die Differentialgleichungen.

26) $y' + \frac{y}{x} - e^x = 0$, $y(1) = 1$.

27) $y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\log x}{x}y^2$

28) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$ $(y_1 = -x^{-1})$

Mathematik 3 für Informatiker — 4. Übungsblatt

29) Man löse das AWP

$$xy' - y = x^3 + 3x^2 - 2x, \quad y(2) = 5.$$

30) Bestimmen Sie die Reihenentwicklungen von $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ aus der Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

mittels Potenzreihenansatz.

31) Gegeben sei das AWP $y' = x - y$, $y(0) = 1$. Man berechne die exakte Lösung und ermittle anschließend, wie groß n (Anzahl der Teilintervalle) gewählt werden muß, damit der relative Fehler beim Eulerverfahren für $y(x)$ an der Stelle $x = 1$ maximal 15% beträgt.

32–33) Man löse die folgenden Anfangswertprobleme.

32)

$$y'' + y^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

33)

$$yy'' + y'^2 = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

34–36) Man löse mittels Potenzreihenansatz.

34)

$$y' = \frac{2x - y}{1 - x}, \quad y(0) = C$$

35) $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$

36) $y'' - xy' + y = 0$

37) Konstruieren Sie zum AWP $y' = \alpha y$, $y(0) = y_0$ den Eulerschen Polygonzug E_n mit der Schrittweite $h = \xi/n$ auf dem Intervall $[0, \xi]$ (mit einem festen $\xi > 0$)und zeigen Sie, daß $E_n(\xi) \to y_0 e^{\alpha\xi}$ für $n \to \infty$.

38) Berechnen Sie vierstellige Runge-Kutta-Näherungswerte y_1, y_2 für die Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$, an den Stellen $x_1 = 0,1$ und $x_2 = 0,2$.

Mathematik 3 für Informatiker — 5. Übungsblatt

39) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0,$$

wobei $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$ bekannte Lösungen sind.

40) Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung durch einen Potenzreihenansatz um $x = 1$:

$$xy' - y - x - 1 = 0.$$

41) Man bestimme eine Lösungsbasis der folgenden Differentialgleichung über einen modifizierten Potenzreihenansatz um $x = 0$:

$$2(x^2 + x^3)y'' - (x - 3x^2)y' + y = 0.$$

42) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ (mittels Variation der Konstanten).
Hinweis: Die Lösung der homogenen Differentialgleichung finden Sie in Beispiel 30.

43) Man betrachte die homogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Ermitteln Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = x^r$ und lösen der Indexgleichung (wie beim modifizierten Potenzreihenansatz) eine Lösung $\phi_1(x)$. Eine zweite, unabhängige Lösung $\phi_2(x)$ bestimme man mittels Reduktionsansatz. Beweisen Sie auch die Unabhängigkeit von $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$.

44) Man betrachte die inhomogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}.$$

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
Hinweis: Aus Beispiel 43 erhält man die Integralbasis $\{\frac{1}{x}, \frac{\log x}{x}\}$.

45) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'' - 2y' = e^x \sin x$.

46) Man bestimme einen Wert a, sodaß $y = e^{ax}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(3x - 1)y'' - 9xy' + 9y = 0$$

ist und bestimme die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

Mathematik 3 für Informatiker — 6. Übungsblatt

47–51) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

47) $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$ (mittels Variation der Konstanten)

48) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

49) $y'' + 7y' + 6y = \cosh(x)$

50) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$

51) $y'' - 2y' + 2y = 2x + 5\sin x$

52) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 4y' + 8y = 0$ in komplexer und reeller Darstellung. Wie verhalten sich die Lösungen für $x \to \infty$?

53–54) Lösen Sie folgende Systeme von Differentialgleichungen, indem Sie diese durch geeignetes Einsetzen auf lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung zurückführen.

53)

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 - y_2 + t \\ y_2' &= y_1 - y_2 + t^2 \end{aligned} \qquad y_1(0) = -\frac{3}{8}, \quad y_2(0) = \frac{1}{8}$$

54)

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 + 4y_3 \\ y_2' &= 8y_1 + 3y_2 + 8y_3 \\ y_3' &= -8y_1 - 5y_3 \end{aligned}$$

Hinweis: Beachten Sie, daß die erste und dritte Gleichung unabhängig von der zweiten sind.

Mathematik 3 für Informatiker — 7. Übungsblatt

55) Man bestimme die Laplacetransformierten der folgenden Funktionen.

a) e^{6t+2}

b) $f(t) = 1 + 2t + 3t^2$

56) Man bestimme die Laplacetransformierten der folgenden Funktionen.

a) $f(t) = \int\limits_0^t \tau \sin(\tau)\, d\tau$

b) $f(t) = \sin^3(t)$
Anleitung: Man bestimme Konstanten a, b, sodaß $\sin^3(t) = a\sin(3t) + b\sin(t)$ mit Hilfe der Summensätze oder der Moivre-Formeln.

57–58) Lösen Sie folgende AWP mittels Laplacetransformation.

57)

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.$$

58)

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 6\sinh 2x, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 4.$$

59–60) Berechnen Sie die folgenden Faltungsprodukte und ihre Laplacetransformierten.

59)

a) $1 * 2$

b) $e^t * e^{2t}$

60)

a) $\sin t * \cos 2t$

b) $u(t-1) * t$

Mit $u(t)$ wird die Heavisidefunktion bezeichnet.

61) Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformierten die folgende Differential-Integralgleichung.

$$\dot{x}(t) + \int_0^t x(\tau)\cosh(t-\tau)\, d\tau = 0, \quad x(0) = 1.$$

Bemerkung: $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

62) Zeigen Sie: Ist $f(t)$ eine periodische Funktion mit Periode p, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $f(t+p) = f(t)$, dann gilt

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$$

Hinweis: Verwenden Sie $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{np}^{(n+1)p} f(t)e^{-st}\, dt$ und substituieren Sie in geeigneter Weise.

Mathematik 3 für Informatiker — 8. Übungsblatt

63–66) Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mit Hilfe der Laplacetransformation.

63)

$$xy'' + y' + 2xy = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Bemerkung: Die Formel $\mathcal{L}(J_0(at)) = 1/\sqrt{z^2 + a^2}$ darf ohne Beweis verwendet werden.

64)

$$\begin{array}{rcl} y_1' + 2y_2 & = & e^x \\ y_2' + 2y_1 & = & e^{-x} \end{array} \qquad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

65)

$$\begin{array}{rcl} y_1'' + y_2' + 3y_1 & = & 1 \\ y_2'' - 4y_1' + 3y_2 & = & 0 \end{array} \qquad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1'(0) = y_2'(0) = 0$$

66)

$$y'' + 4y = f(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 < t \leq \pi \\ 0 \text{ für } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

und periodischer Fortsetzung, also $f(t + 2\pi) = f(t)$.

67) Zeigen Sie, daß die Laplacetransformierte $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq t < \log\log 3 \\ (-1)^n e^{e^{t/2}} & \text{für } \log\log n \leq t < \log\log(n+1) \end{cases}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ existiert. $F(s)$ muß nicht berechnet werden.
Bemerkung: $\log x$ bezeichnet den natürlichen Logarithmus von x.
Hinweis: Splitten Sie das Laplace-Integral in geeigneter Weise, sodaß eine Reihe entsteht, auf die das Leibnizkriterium anwendbar wird.

68) Zeigen Sie die folgende Identität.

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(kx) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$$

69) Zeigen Sie, daß für je zwei Funktionen f und g aus der Menge $\{1/\sqrt{2}, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \ldots\}$ gilt:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{falls } f \equiv g \\ 0 & \text{falls } f \neq g \end{cases}$$

70) Bestimmen Sie die (reelle und komplexe) Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(t) = t, \qquad 0 \leq t < 2\pi,\ 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

Mathematik 3 für Informatiker — 9. Übungsblatt

71) Bestimmen Sie die (reelle und komplexe) Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(t) = \cos t + |\cos t|.$$

72) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \sin \frac{t}{2} & \text{für } 0 < t \leq \pi \\ 1 + \cos \frac{t}{2} & \text{für } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

mit periodischer Fortsetzung mit der Periode 2π.

73) Zeigen Sie, daß für $-\pi/2 < x < \pi/2$ die folgende Identität gilt:

$$\frac{\cos 3x}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{\cos 9x}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \ldots = \frac{\pi}{8} \cos^2 x - \frac{1}{3} \cos x$$

Gilt diese Identität auch in einem Intervall $(-a, a)$ mit $a > \pi/2$?
Hinweis: Entwickeln Sie $\cos^2 x$ in eine Fourierreihe.

74) Entwickeln Sie die Funktion $f(t) = \sin(at)$ $(a \notin \mathbb{Z})$ gegeben auf $[-\pi, \pi]$ mit periodischer Fortsetzung mit der Periode 2π in ihre reelle Fourierreihe.

75) Man bestimme die (reelle und komplexe) Fourierreihe folgender Funktion:

$$f(t) = t^2, \quad 0 \leq t < 2\pi, \qquad 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

76) Zeigen Sie, daß eine gerade T-periodische Funktion (d.h. $f(t) = f(-t)$) in ihrer reellen Fourierentwicklung keine Sinusterme enthalten kann.

77) Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des $\cosh z$,

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

die Summe der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n)!}$$

Hinweis: Man fasse die Reihe als Realteil von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt + i \sin 2nt}{(2n)!}$ auf.

78) Man zeige, daß für die Fouriermatrix F_N, gegeben durch

$$F_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

mit $w = e^{2\pi i/N}$, gilt:

$$F_N \cdot \overline{F_N} = N \cdot E_N.$$

Dabei bezeichnet $\overline{F_N}$ die konjugierte Matrix und E_N die $N \times N$-Einheitsmatrix.

Mathematatik 3 für Informatiker — 10. Übungsblatt

79) Sei $a \notin \mathbb{Z}$. Entwickeln Sie $f(t) = \pi \cos(at)$ in eine Fourierreihe und beweisen Sie durch geeignete Wahl von t die Identität

$$\frac{\pi}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2-1} + \frac{2a}{a^2-4} - \frac{2a}{a^2-9} + \frac{2a}{a^2-16} - \cdots$$

80) Seien $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ und $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{C}^N$ ihre Spektralwerte. Außerdem bezeichne $(x_k)_k$ die N-periodische Fortsetzung des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ sowie $w = e^{2\pi i/N}$. Zeigen Sie, daß für die sogenannte *periodische Faltung* gilt:

$$\mathbf{y} * \mathbf{z} := \left(\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell z_{k-\ell} \right)_k \stackrel{DFT}{\longrightarrow} (c_k \cdot d_k)_k$$

81) Berechnen Sie die Spektralkoeffizienten des N-periodischen diskreten Rechteckimpulses $(x_k)_k$ mit $x_0 = x_{N-1} = 1$ und $x_j = 0$ für $j = 1, 2 \ldots, N-2$.

82) Führen Sie für $\mathbf{y} = (0, 1, 2, 3)$ die FFT explizit durch.

83) Berechnen Sie die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

84) Berechnen Sie die Spektralfunktion von

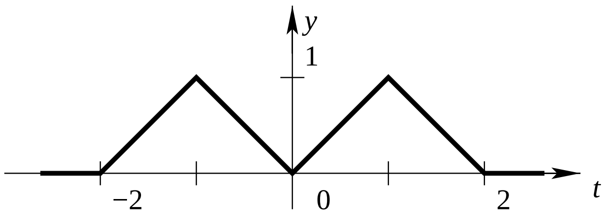
$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

85) Zeigen Sie: Falls $f(t)$ eine gerade Funktion ist, dann kann die Fouriertransformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ durch

$$F(\omega) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t)\, dt$$

berechnet werden.

86) Unter Berücksichtigung von Beispiel 85 berechne man die Fouriertransformierte für die nachfolgend skizzierte Zeitfunktion $y = f(t)$:



Mathematik 3 für Informatiker — 11. Übungsblatt

87–88) Man löse die folgenden partiellen Differentialgleichungen.

87) $u_{xy} + u_x + x + y = 1, \qquad u(x,0) = 0, u(0,y) = 0.$

88) $u_{xy} + yu_x = 0, \qquad u(x,x) = x^2, u_x(x,x) = u_y(x,x).$

89–90) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen.

89) $9u_{xx} - \frac{1}{4}u_{yy} = \sin x.$

90) $12u_x + 4u_y = x.$

91) Zeigen Sie, daß zum Lösen der partiellen Differentialgleichung

$$au_x + bu_y + cu_z = f(x,y,z), \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$$

die Substitution

$$\xi = x, \qquad \eta = bx - ay, \qquad \zeta = cx - az$$

zum Ziel führt. Bestimmen Sie damit die allgemeine Lösung der PDG

$$2u_x + 3u_y + 4u_z = e^{x+y+z}.$$

92) Eliminieren Sie mit Hilfe der Substitution $u(x,y) = v(x,y)e^{\lambda x + \mu y}$ und geeignete Wahl von λ und μ die ersten Ableitungen aus der PDG

$$u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0.$$

Bemerkung: Die entstehende PDG müssen Sie nicht lösen.

93) Wie 92 für die PDG

$$u_{xy} = \alpha u_x + \beta u_y.$$