Runde 5, Beispiel 31

LVA 118.181, Übungsrunde 5, 17.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 16.11.2006

1 Angabe

Man löse das AWP

$$y'' + y = \tan(x), \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

mittels Variation der Konstanten (eine Lösungsbasis der zugehörigen homogenen Dgl ist geg. durch $\{\cos(x), \sin(x)\}$.
Bemerkung:

$$\int \frac{1}{\cos(x)} \partial x = \frac{1}{2} \ln(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}) + C)$$

2 Lösung des Beispiels

Das Fundamentalsystem lautet:

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan x \end{pmatrix}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{1} = -\tan x \cdot \sin x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} =$$

$$\frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \underbrace{-\frac{1}{\cos x} + \cos x}_{\int}$$

$$\Rightarrow \;\; c_1 = -\frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}) + \sin x$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & x \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix}}{1} = \cos x \cdot \tan x = \underbrace{\sin x}_{\int}$$

$$\Rightarrow \;\; c_2 = -\cos x$$

$$y(x)_p = -\frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin x}{1-\sin x})\cos x + \sin x \cdot \cos x - \cos x \cdot \sin x$$

$$y(x) = c_3 \cos x + c_4 \sin x - -\frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin x}{1-\sin x})\cos x$$

$$\text{AWP: } c_3 = 0$$

$$y'(xx) = -c_3 \sin x + c_4 \cos x - \frac{1}{\cos x} \qquad \Rightarrow \qquad c_4 = 2$$

$$\mathbf{y(x) = 2\sin x - -\frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin x}{1-\sin x})\cos x}$$