

11

Bezugssysteme

11.1 Vorbemerkungen

Die grundlegenden Gesetze der Mechanik haben wir unter Verwendung der Vektorschreibweise ohne unmittelbaren Bezug auf ein spezielles Koordinatensystem formuliert. Man wird sofort der Meinung zustimmen, daß Grundgesetze selbstverständlich von der Wahl eines speziellen Bezugssystems unabhängig sein müssen – sonst wären es eben keine Grundgesetze. Wir wollen den Sachverhalt etwas genauer untersuchen.

Es zeigt sich, daß man zunächst einmal unterscheiden muß zwischen Bezugssystemen, die sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit bewegen, und solchen, die gegeneinander beschleunigt werden. In ersteren – so wird sich zeigen – gilt das Newtonsche Trägheitsgesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$; sie werden deshalb *Inertialsysteme*¹ genannt. In beschleunigten Bezugssystemen gilt dieses Gesetz nicht, wenn man unter \vec{a} die systembezogene Beschleunigung versteht. Bei Inertialsystemen ist es darüber hinaus zweckmäßig, die Situation bei kleiner Relativgeschwindigkeit gesondert zu betrachten. Klein heißt hier: klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit $c \approx 300\,000\text{ km/s}$. Im Fall großer Relativgeschwindigkeiten stößt man nämlich auf Fakten, die dem „gesunden Menschenverstand“ zuwiderzulaufen scheinen. Das ist nicht verwunderlich, denn er hat sich ja in einem Erfahrungsbereich gebildet, in dem die Geschwindigkeiten von Körpern stets klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind. Das gilt aber nicht mehr in der Elektrik und in der eng mit ihr verknüpften Optik sowie in der Atomistik. Elektromagnetische Wellen und Photonen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit; Elektronen z. B. kann man bis nahe an die Lichtgeschwindigkeit beschleunigen. In diesen Gebieten werden sich also relativistische Effekte mit Sicherheit bemerkbar machen.

In den folgenden Abschnitten werden nacheinander behandelt:

1. Bezugssysteme mit konstanter translatorischer Relativgeschwindigkeit $v \ll c$,
2. Bezugssysteme mit konstanter translatorischer Relativbeschleunigung a

¹ lat. inertia = Trägheit

und

- 3. Bezugssysteme mit konstanter rotatorischer Relativgeschwindigkeit ω .

Bezugssystemen mit großen, konstanten, translatorischen Geschwindigkeiten $v \rightarrow c$, also relativistischen Effekten, ist ein eigenes Kapitel gewidmet.

11.2 Bezugssysteme mit konstanter Relativgeschwindigkeit ($u \ll c$)

Wir wollen uns in diesem Kapitel also auf kleine Relativgeschwindigkeiten beschränken; es soll stets $u \ll c$ gelten. Gegeben seien zwei Bezugssysteme $S = \{x, y, z, t\}$ und $S' = \{x', y', z', t'\}$. Wir denken uns zunächst S als ruhend; S' bewege sich relativ zu S mit der konstanten Geschwindigkeit u . In den obigen Klammern wurden nicht nur die drei Raumkoordinaten, sondern auch die Zeit mitaufgeführt und in der Bezeichnung in beiden Systemen unterschieden. Das ist in der klassischen Mechanik nicht üblich und nicht notwendig. Es wird einfach als selbstverständlich angenommen, daß es eine absolute Zeit gibt, die für alle Beobachter – mögen sie sich bewegen oder nicht – stets gleichmäßig abläuft². Ein Reisender der nach einer längeren Fahrt feststellt, daß seine Armbanduhr eine andere Zeit anzeigt als die Bahnhofsuhr, obwohl er sie bei Antritt der Reise genau gestellt hatte, wird nach allen möglichen Erklärungen greifen, nie aber auf den Gedanken kommen, die Zeit könne für ihn anders abgelaufen sein als für jemanden, der die Reise nicht mitgemacht hat. Man setzt also:

$$t \equiv t'. \tag{11.1}$$

Der Einfachheit halber soll angenommen werden, daß die Achsen der Systeme S und S' einander parallel seien und daß die Relativbewegung in $x = x'$ -Richtung erfolge. Läßt man die Zeitzählung in dem Moment beginnen, in dem die beiden Bezugssysteme zusammenfallen, dann lassen sich die Koordinaten (x, y, z) bzw. (x', y', z') eines beliebigen Raumpunktes ineinander umrechnen:

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{11.2}$$

$$x = x' + ut, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{11.3}$$

Diese Gleichungen bezeichnet man als *Galilei-Transformationen*³. Sie vermitteln den Übergang von einem Bezugssystem in das andere. Ihre Differentiation nach der Zeit liefert das klassische Additionstheorem der Geschwindigkeiten:

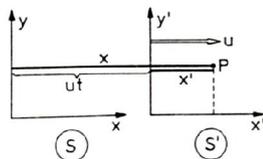


Fig. 11.1: Das Bezugssystem S' bewege sich relativ zu dem System S mit der konstanten Geschwindigkeit u in positiver $x = x'$ -Richtung.

² Newton „Principia“ 1686; Sir Isaac Newton 1643–1727

³ Galileo Galilei 1564–1642

$$\dot{x}' = \dot{x} - u; \quad \dot{y}' = \dot{y}; \quad \dot{z}' = \dot{z}. \quad (11.4)$$

Dies läßt sich mit $\vec{v}' = (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$ und $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ vektoriell zu einer einzigen Gleichung zusammenfassen:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}, \quad \text{oder} \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}. \quad (11.5)$$

Bewegt sich also ein Körper in S' mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}' = \vec{u}$, dann besitzt er bezüglich S die doppelte Geschwindigkeit $\vec{v} = 2\vec{u}$. Analog lassen sich auch die Impulse und kinetischen Energien des Körpers angeben. Sie haben bezüglich S bzw. bezüglich S' selbstverständlich verschiedene Werte.

Wie steht es nun mit den physikalischen Gesetzen der klassischen Mechanik in den beiden Bezugssystemen? Da wäre z. B. das Grundgesetz $\vec{F} = m\vec{a}$ oder $\dot{\vec{F}} = \dot{\vec{p}}$. In ihm tritt nur die zweite Ableitung der Ortskoordinate auf, und die Galilei-Transformationen sagen sofort

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \equiv a' = \frac{d^2x'}{dt'^2}, \quad (11.6)$$

da u konstant ist. Man schließt demnach auf $F = F'$. Das Grundgesetz der Mechanik ist von der Wahl des Bezugssystems unabhängig: Es gilt für jedes Inertialsystem.

Oder man denke sich einen Billardspieler. Er mache einen einfachen Kugelstoßversuch, einmal auf der „ruhenden“ Erde (System S) und einmal in einem Flugzeug (System S'), das mit der konstanten Geschwindigkeit, z. B. $u = 800$ km/h, unterwegs ist. In beiden Systemen beschreibt er den elastischen Stoß mit Impuls- und Energieerhaltungssatz, wie es auch im Kap. 7.3 geschehen ist. Die Geschwindigkeiten vor dem Stoß seien mit \vec{v}_i , die nach dem Stoß mit \vec{w}_i bezeichnet. Die Indizes $i = 1, 2$ bezeichnen die beiden Kugeln. Im Ruhesystem S gilt:

$$\text{Impuls:} \quad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{w}_1 + m_2\vec{w}_2, \quad (11.7)$$

$$\text{Energie:} \quad \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{w}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{w}_2^2.$$

Im bewegten Bezugssystem S' würde der Impulssatz lauten:

$$m\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = m_1\vec{w}'_1 + m_2\vec{w}'_2. \quad (11.8)$$

Mit Hilfe der Galileitransformation kann man diese Aussage mit der im Ruhesystem vergleichen; $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$ eingesetzt ergibt:

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}) + m_2(\vec{v}_2 - \vec{u}) = m_1(\vec{w}_1 - \vec{u}) + m_2(\vec{w}_2 - \vec{u}). \quad (11.9)$$

Alle Terme, in denen die Relativgeschwindigkeit \vec{u} auftritt, heben sich weg. Der Impulssatz gilt in S genau wie in S' . Das liegt natürlich daran, daß es auch hier nur auf Geschwindigkeitsdifferenzen ankommt; die konstante Relativgeschwindigkeit \vec{u} fällt heraus.

Beim Energiesatz treten aber Geschwindigkeitsquadrate auf. Da könnte es vielleicht Schwierigkeiten geben. Es sei einmal angenommen, der Energiesatz gelte im Ruhssystem S , und man schreibt ihn für das bewegte System S' auf.

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1w_1^2 + \frac{1}{2}m_2w_2^2. \quad (11.10)$$

Mit der Galileitransformation erhält man:

$$\frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1 - \vec{u})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2 - \vec{u})^2 = \frac{1}{2}m_1(\vec{w}_1 - \vec{u})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{w}_2 - \vec{u})^2. \quad (11.11)$$

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 - \underbrace{(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)\vec{u}} + \frac{1}{2}m_1\cancel{u^2} + \frac{1}{2}m_2\cancel{u^2} =$$

$$\frac{1}{2}m_1\vec{w}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{w}_2^2 - \underbrace{(m_1\vec{w}_1 + m_2\vec{w}_2)\vec{u}} + \frac{1}{2}m_1\cancel{u^2} + \frac{1}{2}m_2\cancel{u^2}.$$

Die durchgestrichenen quadratischen Terme in \vec{u} fallen von alleine heraus, die Eliminierung der durch Unterstreichung hervorgehobenen linearen Terme in \vec{u} bewerkstelligt der Impulssatz. Als Rest bleibt schließlich der Energiesatz in der Form stehen, die im Ruhssystem als richtig erkannt wurde. Er stellt also auch eine vom Bezugssystem unabhängige Aussage dar.

Dies bestätigt natürlich nur eine schon selbstverständliche Erfahrung: Mechanische Experimente laufen im konstant bewegten Bezugssystem genauso ab wie im Ruhssystem. Man kann demnach mit keiner Berechtigung von einem ausgezeichneten Ruhssystem sprechen. Der Beobachter in S' kann mit der gleichen Berechtigung sagen, er ruhe und der Beobachter in S bewege sich mit der Geschwindigkeit $-\vec{u}$. Gleichförmig gegeneinander bewegte Bezugssysteme sind einander völlig äquivalent. Mit mechanischen Mitteln kann nicht entschieden werden, welches System ruht und welches sich bewegt. In allen Systemen gilt gleichermaßen das Newtonsche Trägheitsgesetz. Die Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme heißt *klassisches Relativitätsprinzip*. Die Gesetze der klassischen Mechanik sind invariant gegenüber Galileitransformationen, oder kurz

Die Gesetze der klassischen Mechanik sind Galilei-invariant.

11.3 Linear beschleunigte Bezugssysteme

Auch in den folgenden Abschnitten wird angenommen, daß die Relativgeschwindigkeiten der betrachteten Bezugssysteme klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind. Im übrigen wollen wir an frühere Ausführungen anknüpfen und uns noch einmal ins Gedächtnis zurückrufen: Kräfte ändern den Bewegungszustand beweglicher Körper. Die Körper „wehren“ sich dagegen mit ihrer Trägheit. An ihnen greift eine Trägheitskraft an, die der Beschleunigung entgegengerichtet ist: $\vec{F}_T = -m\vec{a}$. Die Trägheitskraft wurde bei der Formulierung des dynamischen Gleichgewichts eingeführt. Damals

wurde auch bereits erwähnt, daß die Umschrift des Grundgesetzes $\vec{F}_a = m\vec{a}$ auf $\vec{F}_a - m\vec{a} = \vec{F}_a + \vec{F}_{tr} = 0$ einem Wechsel des Bezugssystems entspricht. Hier soll dies nun genauer untersucht werden.

Betrachten Sie wieder zwei Koordinatensysteme $S = (x, y)$ mit einem Beobachter B und $S' = (x', y')$ mit einem Beobachter B' . S sei wieder das „ruhende“ (z. B. mit dem Erdboden fest verbundene) Bezugssystem; S' werde in positiver x -Richtung mit \vec{a}_s beschleunigt. Wieder sind die Koordinatenachsen der Einfachheit halber parallel zueinander gewählt. Das S' -System sei mit einem großen, zur Ausschaltung der Gewichtskraft exakt horizontal ausgerichteten Wagen W verbunden, in dem die Beobachter die Bewegung eines kleinen, reibungslos gelagerten Wagens A verfolgen.

Der Beobachter B im Ruhesystem S sieht, daß der große Wagen mit Hilfe einer Kraft beschleunigt wird. Er kann diese Beschleunigung messen, nennt sie \vec{a}_s und kennt also ihren Wert. Der kleine Wagen A bleibt jedoch für ihn an der Stelle x_0 ruhig stehen. Es wirkt ja auch keine Kraft auf ihn, die ihn beschleunigen könnte.

Der Beobachter B' kommt zu einem ganz anderen Ergebnis. Er stellt fest, daß der kleine Wagen A in negativer x' -Richtung beschleunigt wird. Er mißt für diese Beschleunigung den Wert \vec{a}' und schließt, daß auf A eine Kraft \vec{F}' wirken muß, wobei $\vec{F}' = m \cdot \vec{a}'$ mit m als Wagenmasse gelten muß. Das Auftreten dieser Kraft ist zunächst für ihn unverständlich. (Es wird vereinfachend angenommen, daß der Beobachter selbst keine Masse besitzt und damit keine solchen Kräfte spürt.)

Erst eine Rücksprache zwischen B und B' klärt, daß die im System S' gemessene Beschleunigung \vec{a}' des kleinen Wagens und die äußere Beschleunigung \vec{a}_s des großen Wagens W entgegengesetzt gleich groß sind. Die Kraft \vec{F}' nennt man nun *Trägheitskraft*:

$$\vec{F}' = \vec{F}_{tr} = -m\vec{a}_s; \tag{11.12}$$

sie tritt nur im beschleunigten Bezugssystem auf.

Ein zweites Experiment erläutert noch einmal das dynamische Gleichgewicht (Fig. 11.3). Beobachter B' läßt den kleinen Wagen A gegen die linke Wand des großen Wagens W fahren, wo er eine Feder um eine gewisse Strecke zusammendrückt. Für den ruhenden Beobachter B sieht es nun so aus, als sei der Wagen A mit W fest verbunden. A wird mit W beschleunigt (\vec{a}_s). Für B ist das selbstverständlich, denn er sieht ja, daß auf A die Federkraft \vec{F}_{fed} einwirkt.

Der Beobachter B' kommt wieder zu einem anderen Ergebnis: Für ihn ruht der Wagen A jetzt. Er schließt also, daß keine resultierende Kraft auf ihn einwirkt. Die vorher beobachtete Kraft \vec{F}' wird durch die Federkraft \vec{F}_{fed} kompensiert. Für B' herrscht Kräftegleichgewicht:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_{fed} + \vec{F}' = \vec{F}_{fed} + \vec{F}_{tr} = \vec{F}_{fed} - m\vec{a}_s = 0. \tag{11.13}$$

Dies ist aber genau die Aussage des dynamischen Gleichgewichts.

Beide in diesem Abschnitt beschriebenen Experimente zeigen, daß das New-

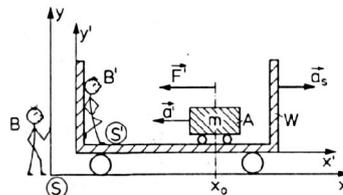


Fig. 11.2: Ein ruhender Beobachter B und ein beschleunigter Beobachter B' beurteilen die Bewegung eines kleinen Wagens A in einem großen Wagen W , der mit dem beschleunigten Bezugssystem fest verbunden ist.

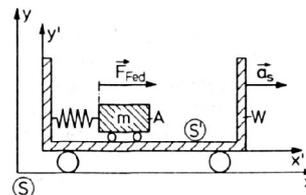


Fig. 11.3: Zwischen dem kleinen und dem großen Wagen wird eine Feder eingeführt, die während der beschleunigten Bewegung des großen Wagens bis zu einem Gleichgewichtswert zusammengedrückt wird. Beobachter B in S sagt, A ist mit W fest verbunden und wird genauso beschleunigt wie W . Für den Beobachter B' in S' ruht der kleine Wagen A .

tonsche Grundgesetz $\vec{F} = m\vec{a}$ im beschleunigten Bezugssystem nicht mehr gilt, dieses also kein Inertialsystem ist:

Bei dem Experiment von Fig. 11.2 wird für den Beobachter B' der Wagen A beschleunigt (\vec{a}'), ohne daß eine für ihn erkennliche Kraft auf den Wagen einwirkt.

Bei dem Experiment der Fig. 11.3 sieht B' die Federkraft auf den Wagen A einwirken, trotzdem bleibt der Wagen für ihn Ruhe und wird nicht beschleunigt.

Ersichtlich lautet das Grundgesetz im beschleunigten System nicht mehr $\vec{F} = m\vec{a}$, sondern

$$\vec{F}_{res} = \vec{F} + \vec{F}' = \vec{F} - m\vec{a}_s = m\vec{a}$$

oder

$$\vec{F} = m(\vec{a} + \vec{a}_s). \quad (11.14)$$

Man hat entweder auf der linken Seite der Gleichung die wirksame Kraft einzusetzen, in der eine aus der Beschleunigung des Bezugssystems resultierende Scheinkraft \vec{F}' berücksichtigt wird, oder man muß auf der rechten Seite zur Beschleunigung \vec{a} des Körpers die des Bezugssystems addieren.⁴

11.4 Rotierende Bezugssysteme

11.4.1 Die Zentrifugalkraft

Konstante Linearbeschleunigungen lassen sich im Experiment meist nur für sehr kurze Zeiten aufrechterhalten; die Experimente sind daher nur schwer durchführbar. Anders bei Radialbeschleunigungen in Bezugssystemen, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotieren: Hier sind zeitlich keine Grenzen gesetzt und die experimentellen Effekte damit gut beobachtbar.

Wieder soll $S = (x, y)$ das Ruhssystem des Beobachters B bedeuten.

$S' = (x', y')$ ist diesmal das rotierende Bezugssystem mit dem Beobachter B' . Die Winkelgeschwindigkeit ω sei konstant. Beide Koordinatensysteme mögen einen gemeinsamen Nullpunkt besitzen: $O = O'$ (Fig. 11.4). Ein Körper A mit der Masse m sei z. B. auf der x' -Achse durch die Kraft einer Feder an den Nullpunkt gebunden.

Der ruhende Beobachter B sieht, daß sich A auf einem Kreis bewegt (gestrichelt). Für ihn ist die Sache klar: Es wirkt ständig eine nach O gerichtete Federkraft senkrecht zur Bahngeschwindigkeit \vec{v} ; das ist die Zentripetalkraft $\vec{F}_{ZP} = -m\omega^2\vec{r}$, die die auf O hin gerichtete Radialbeschleunigung $\vec{a}_r = -\omega^2\vec{r}$ zur Folge hat: Der Körper muß sich auf einem Kreis bewegen.

Der rotierende Beobachter B' sieht: Der Körper A ruht. Er sieht aber auch

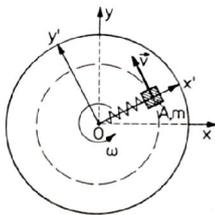


Fig. 11.4: Auf einer rotierenden Plattform ist ein Körper A mit der Masse m mit einer Feder an den Drehpunkt O gebunden. Für den mitrotierenden Beobachter ruht der Körper, für den ruhenden Beobachter bewegt er sich auf einem Kreis.

⁴ Die Bezeichnung Scheinkraft ist unglücklich gewählt: Es handelt sich um eine wirklich existierende Kraft, nicht um eine, die nur scheinbar da ist. Es soll nur zum Ausdruck gebracht werden, daß sie nicht durch andere Körper (z. B. eine Feder) hervorgerufen wird, sondern von der Beschleunigung des Bezugssystems herrührt.

den ausgezogenen Kraftmesser und schließt – da am ruhenden Körper A Kräftegleichgewicht herrschen muß –, daß eine weitere Kraft am Werk ist, die der Federkraft entgegengesetzt, also radial nach außen gerichtet sein muß. Er nennt sie *Zentrifugalkraft* \vec{F}_{ZF} , kann sich ihre Existenz und Größe jedoch erst nach Rücksprache mit B erklären, der ihm erläutert, daß sein Koordinatensystem S' mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Die Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_{ZF} = m\omega^2\vec{r} \quad (11.15)$$

ist eine Trägheitskraft, die wieder nur der rotierende Beobachter bemerkt. Schneidet man nun die Feder durch, die A mit dem Drehpunkt O verbindet, dann passiert wieder etwas, das die beiden Beobachter unterschiedlich beurteilen. Möge die Trennung genau zu dem Moment erfolgen, in dem die x' -Achse die x -Achse überstreicht; dann besitzt für B der Körper A eine Bahngeschwindigkeit \vec{v}_t , die gerade parallel zur y -Achse gerichtet ist (Fig. 11.5).

B sagt: Auf A wirkt keine Kraft mehr (die ihn früher auf der Kreisbahn hielt) – also bewegt sich A gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit tangential parallel y weiter.

B' sagt: Nachdem die Federkraft ausgeschaltet ist, bewirkt die Zentrifugalkraft \vec{F}_{ZF} , daß A radial nach außen fliegt (in Fig. 11.5 durch gestrichelt von O ausgehende Strahlen angedeutet). Dabei muß man jedoch einschränken, daß diese Feststellung nur für den ersten Moment nach dem Loslassen von A gilt, wenn die Bahngeschwindigkeit von A im rotierenden System noch gering ist. Mit wachsender Geschwindigkeit macht sich dann eine weitere Trägheitskraft bemerkbar, die die Bahn von A im S' -System krümmt: die Corioliskraft.

11.4.2 Die Corioliskraft⁵

Die Wirkung der Corioliskraft läßt sich mit einem einfachen Experiment eindrucksvoll zeigen (Fig. 11.6): Man läßt einen nassen Tennisball über einen rotierenden Drehtisch rollen. Seine Bahn im Ruhsystem des Hörsaals ist gerade (s_{ruh}). Auf dem Drehtisch zeichnet sich jedoch eine feuchte Spur ab, die gekrümmt ist (s_{rot}). Der Beobachter B im Ruhsystem sieht keine Besonderheiten; die Bahn des Balles ist gerade, es wirkt keine Kraft.

Der Beobachter B' im rotierenden Bezugssystem sieht jedoch eine gekrümmte Bahn und schließt auf die Existenz einer Kraft, die diese Krümmung hervorruft. Sie wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung und heißt Corioliskraft. Zur vereinfachten Herleitung des mathematischen Ausdrucks für die Corioliskraft und die durch sie bewirkte Coriolisbeschleunigung denken wir uns den Ball von der Mitte des Drehtisches exakt radial nach außen geschossen; seine Geschwindigkeit sei konstant gleich v , so daß er den Rand des Drehtisches nach der Zeit $\Delta t = R/v$ erreicht; R ist dabei der Radius des

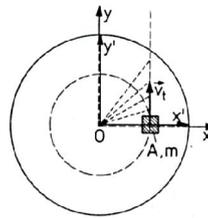


Fig. 11.5: Die Feder, die den Körper A festhielt, ist durchgeschnitten worden. Für den ruhenden Beobachter bewegt sich A tangential zur ehemaligen Kreisbahn weiter; für den rotierenden Beobachter bewegt sich A (im ersten Moment) radial nach außen.

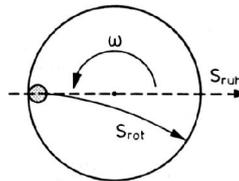


Fig. 11.6: Demonstrationsexperiment: Ein mit konstanter Geschwindigkeit im Ruhsystem bewegter Tennisball zeichnet auf einem rotierenden Drehtisch eine gekrümmte Bahn.

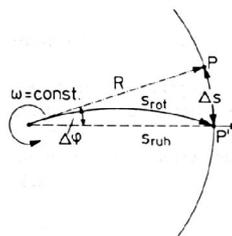


Fig. 11.7: Zur Herleitung der Coriolisbeschleunigung, die im rotierenden Bezugssystem für die gekrümmte Bahn des Tennisballs aus dem Experiment der Fig. 11.6 verantwortlich ist.

⁵ Gustave Coriolis 1792–1843

Drehtisches. Anstatt jedoch den Zielpunkt P zu treffen, kommt der Ball in einem Punkt P' am Tischrand an, der um das Wegstück

$$\Delta s = R \cdot \Delta\varphi = R \cdot \omega \Delta t = v\omega(\Delta t)^2 \quad (11.16)$$

seitlich verschoben ist (Fig. 11.7), weil der Tisch sich inzwischen um den Winkel $\Delta\varphi$ weitergedreht hat. Der rotierende Beobachter schließt auf eine azimutale Beschleunigung a_C und schreibt das Weg-Zeit-Gesetz für beschleunigte Bewegungen auf

$$\Delta s = \frac{1}{2} a_C \cdot (\Delta t)^2. \quad (11.17)$$

Der Vergleich der beiden Ausdrücke Gln. (11.16) und (11.17) für Δs liefert den Betrag der Coriolisbeschleunigung.

Coriolisbeschleunigung: $a_C = 2v\omega$ vektoriell: $\vec{a}_C = 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]$	(11.18)
------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------

Corioliskraft: $\vec{F}_C = 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}]$	(11.19)
--------------------------------------------------------------	---------

Die Corioliskraft ergibt sich aus der Coriolisbeschleunigung durch Multiplikation mit der Masse m des Körpers. Die vektoriellen Beziehungen gelten allgemein und enthalten mehr, als die einfache Herleitung vermuten läßt. Aus ihr geht z. B. nicht klar hervor, daß mit der Geschwindigkeit \vec{v} des Körpers die Bahngeschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem gemeint ist. Man muß also in den obigen Gleichungen statt \vec{v} vielmehr \vec{v}' schreiben. Außerdem muß die Bahngeschwindigkeit nicht unbedingt radial, die Coriolisbeschleunigung also nicht unbedingt azimutal gerichtet sein.

Exakte Behandlung:

Wir betrachten die Änderung des Ortsvektors \vec{r} des Körpers in der Zeit dt einmal im rotierenden Bezugssystem S' und vergleichen sie mit der im Ruhssystem. In der Zeit dt dreht sich das rotierende System um den Winkel $d\varphi = \vec{\omega} dt$ weiter. Wenn nun $(d\vec{r})_{S'}$ die Änderung des Ortsvektors im System S' ist, dann kommt für den ruhenden Beobachter noch die Änderung $d\varphi \times \vec{r}$ aus der Rotation hinzu (Fig. 11.8). Es gilt also:

$$(d\vec{r})_S = (d\vec{r})_{S'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (11.20)$$

Zwischen den Bahngeschwindigkeiten $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ bzw. \vec{v}' gilt also die Beziehung

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}.$	(11.21)
-----------------------------------------------------	---------

Das ist unmittelbar verständlich. – Um nun auch zu einer Beziehung zwischen den Bahnbeschleunigungen \vec{a} bzw. \vec{a}' zu kommen, sehen wir uns Gl. (11.20) genauer an. Sie besagt noch einmal in Worten: Die zeitliche Änderung in S setzt sich zusammen aus der zeitlichen Änderung in S' und dem Effekt der Rotation. Genau dies läßt sich in Operatorschreibweise wie folgt darstellen:

$$\frac{d}{dt} \Big|_S = \frac{d}{dt} \Big|_{S'} + \vec{\omega} \times \quad (11.22)$$

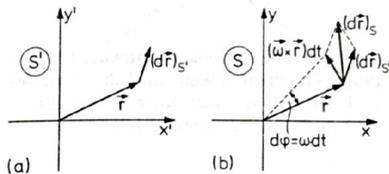


Fig. 11.8: Zur exakten Herleitung der Coriolisbeschleunigung.

(a) Im rotierenden Bezugssystem S' ändert sich der Ortsvektor eines Körpers in der Zeit dt um $(d\vec{r})_{S'}$.

(b) Im ruhenden Bezugssystem S hat man zusätzlich die Drehung um $(\vec{\omega} \times \vec{r}) dt$ zu berücksichtigen.

Diese Operation muß zweimal angewendet werden, wenn man zu den Bahnbeschleunigungen gelangen will.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_S &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{S'} + \vec{\omega} \times\right) \cdot \left(\frac{d}{dt}\Big|_{S'} + \vec{\omega} \times\right) \vec{r} \\ &= \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S'} + 2\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] \end{aligned} \quad (11.23)$$

oder mit der Abkürzung $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \quad (11.24)$$

Die letzte Gleichung vereinfachen wir unter der Annahme, daß sich der Körper nur in der $(x, y) = (x', y')$ -Ebene bewegt. Dann ist nämlich $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ und also $(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = 0$. Man kann entwickeln,

$$\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \cdot \vec{r} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

und erhält nach Umstellung in Gl. (11.24) für die Beschleunigung im rotierenden System

$$\vec{a}' = \vec{a} + \underbrace{2(\vec{v}' \times \vec{\omega})}_{= a_C} + \underbrace{\vec{\omega}^2 \cdot \vec{r}}_{= a_{ZF}}. \quad (11.25)$$

Die beiden Terme, die beim Übergang vom Ruhesystem S ins rotierenden System S' zur Beschleunigung hinzutreten, sind die Coriolis- und die Zentrifugalbeschleunigung. Man erkennt:

1. die mit diesen Beschleunigungen korrelierten Kräfte treten als Trägheitskräfte nur im rotierenden Bezugssystem auf;
2. im Coriolis-Term erscheint die Bahngeschwindigkeit v' des Körpers im rotierenden System;
3. Die Coriolisbeschleunigung ist azimuthal gerichtet, wenn die Bahngeschwindigkeit v' radial gerichtet ist. Bewegt sich der Körper jedoch azimuthal, dann ist die Coriolisbeschleunigung radial gerichtet und tritt additiv oder subtraktiv zur Zentrifugalbeschleunigung hinzu.

Spezialfälle zur tieferen Einsicht:

1. Angenommen, der Körper ruht im System S ; dann ist $\vec{v} = 0$ und $\vec{a} = 0$. Auf den Körper wirkt keine Kraft. Mit (11.21) und (11.25) folgt:

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= -(\vec{\omega} \times \vec{r}); \\ \vec{a}' &= 2(\vec{v}' \times \vec{\omega}) + \omega^2 \vec{r} = 2\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] + \omega^2 \vec{r} \\ &= 2\vec{\omega} \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})}_{=0} - \underbrace{2\omega^2 \vec{r}}_{Cor} + \underbrace{\omega^2 \vec{r}}_{ZF} = -\omega^2 \vec{r}. \end{aligned}$$

Für den rotieren Beobachter bewegt sich der im Ruhesystem ruhende Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $-\vec{\omega}$ auf einem Kreis. Die Coriolisbeschleunigung ist radial nach innen gerichtet und dem Betrag nach doppelt so groß wie die Zentrifugalbeschleunigung. Beide zusammen ergeben eine Zentripetalbeschleunigung $-\omega^2 \vec{r}$. Diese resultiert nicht aus einer wirklich vorhandenen Zentralkraft, sondern ist das Resultat von Trägheitskräften, die nur deswegen auftreten, weil sich der Beobachter, der die Sache beurteilt, im beschleunigten Bezugssystem befindet.

2. Angenommen, der Körper ruht im rotierenden Bezugssystem S' ; dann ist $\vec{v}' = 0$ und $\vec{a}' = 0$, und es folgt

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{und} \quad \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}.$$

Für den ruhenden Beobachter bewegt sich der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ auf einem Kreis. Für ihn ist das nur möglich, wenn eine Zentripetalkraft an dem Körper angreift, die die Zentripetalbeschleunigung $-\omega^2 \vec{r}$ zur Folge hat.

Mit der Einführung der Corioliskraft gewinnt man auch ein tieferes Verständnis für ein einfaches Demonstrationsexperiment, das im Kap. 8 als Beispiel für den Drehimpulserhaltungssatz angeführt wurde; gemeint ist das Experiment, bei dem ein Experimentator auf einem Drehschemel mit Hilfe zweier Hanteln seine Massenverteilung und damit sein Trägheitsmoment sowie seine Winkelgeschwindigkeit ändert. Welche Kraft (besser: welches Drehmoment!) bremst die Drehbewegung beim Hinausschieben, welche Kraft beschleunigt sie beim Einziehen der Hanteln? Das ist genau die Corioliskraft, denn von außen greift ja keine Kraft (kein Drehmoment) an, die dafür verantwortlich gemacht werden könnte.

Zur mathematischen Erfassung des Sachverhalts stellen wir uns vereinfacht vor, ein punktförmiger Körper mit der Masse m werde auf einer mit ω rotierenden masselosen Stange in der Mitte beginnend mit der konstanten Geschwindigkeit v' nach außen geschoben (Fig. 11.9). Man weiß: Die Winkelgeschwindigkeit des Gesamtsystems (Stange + Körper) nimmt dann ab. Der Drehimpuls kann sich wegen fehlendem äußerem Drehmoment ($M_a = 0$) nicht ändern, d. h.

$$\frac{d}{dt} L_{\text{Körper}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt} (mr^2\omega) = 2mr\omega \cdot \frac{dr}{dt} + mr^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} = 0. \quad (11.26)$$

Hierin ist $d\omega/dt = \alpha$ die Winkelbeschleunigung, $a_c = \alpha r$ die Bahnbeschleunigung des betrachteten Körpers und $dr/dt = v'$ seine (als konstant angenommene) Radialgeschwindigkeit. Die Auflösung der Gleichung liefert unmittelbar die Corioliskraft

$$F_C = ma_C = -2mv'\omega, \quad (11.27)$$

wobei das Minuszeichen andeutet, daß durch diese Kraft die Drehbewegung abgebremst wird.

11.5 Die Erde als rotierendes Bezugssystem

Die Erde dreht sich in 24 Stunden einmal um ihre Achse, ihre Winkelgeschwindigkeit beträgt also $\omega_E = 7,29 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Diese Rotation macht sich trotz des kleinen ω_E durch das Auftreten von meßbaren Zentrifugal- und Corioliskräften bemerkbar.

11.5.1 Zentrifugalbeschleunigung

Für jeden auf der Erdoberfläche ruhenden Körper subtrahiert sich von der Schwerebeschleunigung g die Komponente der Zentrifugalbeschleunigung senkrecht zur Erdoberfläche. Ein Körper, der sich auf der geographischen

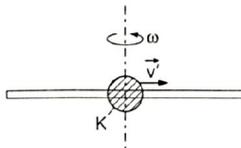


Fig. 11.9: In einem rotierenden System, das aus einem Körper K und einer masselosen Führungsstange besteht, wird der Körper mit der Geschwindigkeit v' nach außen geschoben. Für die dadurch bewirkte Verringerung der Rotationsgeschwindigkeit ist ein Coriolis-Drehmoment verantwortlich.

Breite φ befindet (Fig. 11.10), erfährt also nur die geringere Schwerebeschleunigung

$$g = g_0 - a_{ZF} \cdot \cos \varphi = g_0 - \omega^2 r \cdot \cos \varphi = g_0 - \omega^2 R \cdot \cos^2 \varphi. \quad (11.28)$$

Hierin bedeutet R den Erdradius und g_0 die Schwerebeschleunigung der nicht rotierenden Erde. Die Zentrifugalkorrektur ist am Äquator am größten und beträgt nach dieser einfachen Vorstellung

$$\omega^2 R = (7,29 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 = 0,03 \text{ m/s}^2.$$

Die Zentrifugalkraft bewirkt aber auch eine Abplattung der Erde (der Äquatortradius ist 21 km größer als der Polradius), also eine Abweichung von der Kugelgestalt, und dies vergrößert die Korrektur. Man hat in Wirklichkeit

$$g = (9,832 - 0,052 \cdot \cos^2 \varphi) \text{ m/s}^2.$$

Für $\varphi = 45^\circ$ (und Meereshöhe) ergibt sich daraus $g = 9,806 \text{ m/s}^2$. Die Höhenabhängigkeit der Schwerebeschleunigung wird in einem späteren Kapitel behandelt.

11.5.2 Coriolisbeschleunigung

Bei bewegten Körpern kommt die Coriolisbeschleunigung mit ins Spiel. Man registriert Richtungsabweichungen großer Meeres- und Luftströmungen. Dabei ergibt sich wie in Fig. 11.11 skizziert auf der Nordhalbkugel stets eine Rechtsabweichung und auf der Südhalbkugel stets eine Linksabweichung (z. B. NO-Passat, SO-Passat). Eine direkte Demonstration der Erddrehung und der Wirkung der Corioliskraft gestattet ein langes Schwerependel (Foucaultpendel)⁶: Seine Schwingungsebene wird gedreht.

Wir betrachten zunächst ein einfaches Laborexperiment: Über der Mitte eines Drehtisches, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, ist ein Schwerependel befestigt. Am unteren Ende trägt es einen Tintenspritzer. Der ruhende Beobachter sieht: Die Pendelebene steht im Raum fest, das Pendel behält seine Schwingungsrichtung strikt bei. Der Tintenspritzer zeichnet die Pendelbahn auf, die der mit dem Drehtisch rotierende Beobachter registriert. Bei genügend schneller Rotation des Drehtisches ergibt sich eine Rosettenbahn (Fig. 11.12) oder eine sternförmige Bahn, die – in diesem Fall – aus lauter Rechtskurven bestehen. Bei langsamer Drehung registriert man nur eine kontinuierliche Drehung der Schwingungsebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω entgegengesetzt zur Drehrichtung des Drehtisches.

Ein analoges Verhalten wird man auch bei einem großen Schwerependel auf der Erdoberfläche feststellen; der mitrotierende Experimentator registriert eine langsame Drehung der Schwingungsebene. Befindet er sich auf der geographischen Breite φ , dann wird jedoch nur die Vertikalkomponente $\vec{\omega}'$ der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_0$ der Erde wirksam (Fig. 11.13):

$$\omega' = \omega_0 \cdot \sin \varphi. \quad (11.29)$$

An einem Tag dreht sich die Erde einmal um ihre Achse: $\omega_0 \cdot 1 \text{ Tag} = 2\pi$.

⁶ Léon Foucault 1819–1869

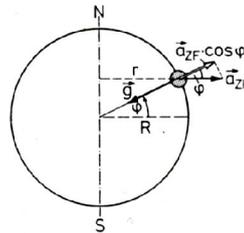


Fig. 11.10: Auf dem Breitengrad φ der Erde subtrahiert sich von der Schwerebeschleunigung g die Radialkomponente der Zentrifugalbeschleunigung.

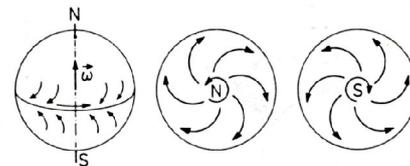


Fig. 11.11: Die Corioliskraft bewirkt Rechtsabweichungen von Strömungen (Luft, Wasser), die vom Nordpol in Richtung Äquator verlaufen und Linksabweichungen bei Strömungen, die vom Südpol aus nach Norden gehen.

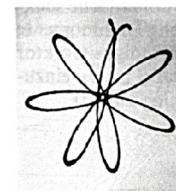


Fig. 11.12: Ein Schwerependel zeichnet auf einem rotierenden Drehtisch seine Bahn. Die Form der Rosetten kann der Experimentator beim Loslassen des Pendels beeinflussen. Die Richtungsabweichung ist durch den Drehsinn des Tisches bestimmt.

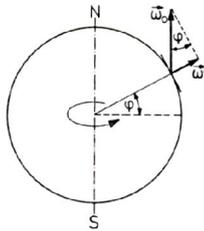


Fig. 11.13: Ein großes Schwebependel auf der Erdoberfläche „spürt“ auf dem Breitengrad φ nur die Komponente ω' der Erd-Winkelgeschwindigkeit ω_0 .

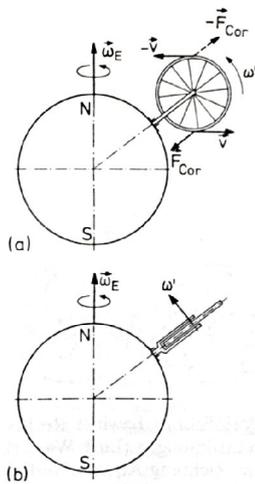


Fig. 11.14: Ein Riesenkreiselkompaß auf der Erdoberfläche: Die Halterung des Kreiselrades kann sich nur um eine zur Erdoberfläche senkrechte Achse drehen. Coriolis-Drehmomente versuchen den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}'$ des Kreisels möglichst parallel zu $\vec{\omega}_E$ einzustellen (soweit das die Halterung zuläßt).

Die Schwingungsebene des Pendels dreht sich in der gleichen Zeit um den Winkel

$$\alpha = \omega' \cdot 1 \text{ Tag} = 2\pi \cdot \sin \varphi. \quad (11.30)$$

11.5.3 Der Kreiselkompaß

Der Kreiselkompaß ist ein sehr demonstratives Beispiel für die Wirkung der Corioliskraft oder auch für die Anwendung des Drehimpulssatzes, je nachdem mit welchem Beobachter man sich identifiziert, dem auf der Erde mitrotierenden oder dem außerhalb der Erde ruhenden. Man stellt nämlich fest, daß ein sehr schnell laufender schwerer Kreisel in einer drehbaren Halterung, deren Drehachse mit der Erde fest verbunden ist, die Tendenz zeigt, seine eigene Rotationsachse möglichst in Nord-Süd-Richtung einzustellen. Man hat damit einen Kompaß, der auf das Magnetfeld der Erde nicht angewiesen ist.

In Fig. 11.14 ist ein solcher überdimensional großer Kreisel gezeichnet. Der Vektor $\vec{\omega}'$ seiner Winkelgeschwindigkeit zeige zunächst aus der Zeichenebene heraus (Fig. 11.14a). Er erfährt ein Drehmoment, das so lange wirkt, bis die Stellung der Fig. 11.14b erreicht ist.

Zur Erklärung betrachten wir vereinfachend nur einmal die oberen und unteren Massenelemente Δm des Kreiselrades: Diese besitzen Bahngeschwindigkeiten $\pm \vec{v}'$ senkrecht zur Erddrehachse $\vec{\omega}_E$ in radialer Richtung. Der mit der Erde rotierende Beobachter erwartet ein Corioliskräftepaar $\vec{F}_C = 2\Delta m \cdot (\vec{v}' \times \vec{\omega}_E)$, das das Kreiselrad um die Lagerachse zu drehen versucht – und zwar solange, bis die Winkelgeschwindigkeitsvektoren $\vec{\omega}_E$ und $\vec{\omega}'$ komplanar liegen. $\vec{\omega}'$ zeigt dann genau nach Norden (Fig. 11.14b).

Der ruhende äußere Beobachter weiß natürlich nichts von einer Corioliskraft. Trotzdem kann auch er die Nord-Süd-Einstellung des Kreisels erklären: Er sieht, daß der Kreisel einen Drehimpuls \vec{L} besitzt, der in Fig. 11.14a in einer Ebene senkrecht zu $\vec{\omega}_E$ liegt. Mit der Drehung der Erde wird auch \vec{L} in dieser Ebene gedreht und zu einer ständigen Richtungsänderung gezwungen; der Kreisel erfährt also ein Drehmoment $\vec{M} \parallel \vec{\omega}_E$ und antwortet darauf mit einer Präzessionsbewegung, die den Drehimpulsvektor aus der Ebene herauszudrehen und parallel zu $\vec{\omega}_E$ einzustellen versucht, soweit dies die Kreiselhalterung zuläßt. Die Präzessionsbewegung hört auf, sobald $\vec{\omega}'$ wie in Fig. 11.14b nach Norden zeigt.

11.6 Zusammenfassung

Galilei-Transformationen		
Koordinaten	$x' = x - ut;$ $y' = y; \quad z' = z$	u : Geschw. von S gegen S' (x -Richtung).
Geschwindigkeiten	$\dot{x}' = \dot{x} - u; \quad \dot{y}' = \dot{y}; \quad \dot{z}' = \dot{z}$	
Trägheitskräfte in beschleunigten Bezugssystemen		
Translation	$\vec{F}_tr = -m \cdot \vec{a}$	\vec{a} : Beschleunigung
Rotation (zentrifugal)	$\vec{F}_{ZF} = m\omega^2\vec{r}$	ω : Winkelgeschwindigkeit
Rotation (Coriolis)	$\vec{F}_C = 2m(\vec{v}' \times \vec{\omega})$	\vec{v}' : Bahngeschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem.
Rotierende Erde		
Erdbeschleunigung	$g(\varphi) = g_0 - \omega^2 R \cdot \cos \varphi$	g_0 : Erdbeschleunigung ohne Rotation R : Erdradius φ : geographische Breite