Allgemeiner Hinweis: Die Übungsgruppenanmeldung in TISS läuft von Dienstag, 27.10., 20:00 Uhr bis Sonntag, 8.11., 13:00 Uhr. Die Platzvergabe in den einzelnen Übungsgruppen erfolgt nach dem *first come, first served*-Prinzip. Wir können Ihnen keinen Platz in einer bestimmten Übungsgruppe garantieren. Wir haben aber sichergestellt, dass für alle Studierende ein Platz in einer Übungsgruppe zur Verfügung steht, die die Eingangstests positiv absolviert haben.

Aufgabe 1: Zweierkomplement, Multiplikation

Es sind die folgenden Zahlen gegeben:

$A = (7)_{10} \rightarrow (0000\ 0111)_2 \rightarrow (0000\ 0111)_2$

$B = (-3)_{10} \rightarrow (-0000\ 0011)_2 \rightarrow (1111\ 1101)_2$

$C = (-21)_{10} \rightarrow (-0001\ 0101)_2 \rightarrow (1110\ 1011)_2$

Wandeln Sie die gegebenen Zahlen in eine 8 Bit Zweierkomplementdarstellung um und führen Sie die nachfolgenden Berechnungen mit 8 Bit Maschinenwörtlänge aus. Geben Sie die Ergebnisse auch als decodierte Dezimalzahl an:

a) $A \cdot B$

-21 ? ↵

```
00000111 · 11111101
00000111
 00000111
  00000111
   00000111
    00000111
     000001110
+      00000111
-----------------
0000011011101011
-              1
        --------
        11101010
```

$\rightarrow -(64+32+8+2+1)_{10} = (-107)_{10}$

$\rightarrow (10010101)_2 = -(16+4+1)_{10} = (-21)_{10}$

b) $B \cdot C$

63 ? ↵

```
11111101 · 11101011
11111101
 11111101
  111111010
    111111010
      11111101
+      11111101
----------------
1110100000111111
```

$\rightarrow (63)_{10}$

c) $A \cdot C$

-147 ? ↵

```
00000111 · 11101011
00000111
 00000111
  000001110
    000001110
      00000111
+      00000111
----------------
0000011001101101
```

$\rightarrow (64+32+8+4+1)_{10} = (109)_{10} \rightarrow$ Überlauf!

Aufgabe 2: Exzessdarstellung

Gegeben sind Zahlen in Exzessdarstellung mit dem asymmetrischen Exzess $e = (42)_{10}$.

a) Bestimmen Sie den Summanden B der Summe $A + B = C$ und geben Sie zu B den dezimalen Wert sowie seine Exzessdarstellung B_e binär an.

$$A_e = 01011111$$
$$C_e = 01010011$$

$e = (42) = (0010\ 1010)_2$

$B = C - A$

$B = C_e - A_e + e$

```
  01011111
- 01010011
  00001100  → (8+4)_10 = (-12)_10
+ 00101010              ↳ B
 (00110110)_2
```

√ ?

b) Berechnen Sie die Summe $D = F + E$ und geben Sie zu D seinen dezimalen Wert sowie seine Exzessdarstellung D_e an.

$D = F + E$

$D_e = F_e + E_e - e$

$D = D_e - e$

```
F_e =  01001111
E_e = +00000011
       01010010  → D_ee → (01010010)_2
      -00101010
       00101000  → D_e  → (00101000)_2

-(e - D_e)   00101010
            -00101000
            -00000010 → ~~X~~ D → (-2)_10
```

√

Aufgabe 3: Rundung und IEEE verkürzt mit Sonderfällen

a) Beantworten Sie folgende Fragen zum Thema Rundung. Verwenden Sie die Schreibweise und die Definitionen, die Sie aus der Vorlesung kennen.

(i) Nennen Sie die Kriterien, die eine Rundungsfunktion $\square : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ erfüllen muss.

$\forall x \in \mathbb{Z} . \square x = x$

$\forall x,y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow \square x \leq \square y$

(ii) Definieren Sie die Rundungsfunktion für „truncate“ mithilfe von $x, x_1, x_2, \hat{x}$, wobei $x_1 = max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ und $x_2 = min\{z \in \mathbb{Z} : x < z\}$. D.h. definieren Sie eine neue Rundungsfunktion, die positive Zahlen zur nächst kleineren Zahl abrundet und negative Zahlen auf die nächst größere Zahl aufrundet.

$$\square x = \begin{cases} x_1 \geq 0 & \square x = x_1 \\ x_2 < 0 & \square x = x_2 \\ x_3 < 0 \wedge x_3 = x_2 & \square x = x_3 \end{cases}$$

?

Hinweis: es werden nicht notwendigerweise alle hier definierten Variablen benötigt.

b) Die folgenden Zahlen sind im 16-Bit-Gleitpunktformat $\mathbb{F}(2, 11, -14, 15, \text{true})$ codiert:

$$\begin{aligned} A &= 1\ 11010\ 1000010100 \\ B &= 0\ 11000\ 1001000000 \\ C &= 0\ 11111\ 1111111111 \\ D &= 0\ 00111\ 1010000000 \end{aligned}$$

Führen Sie mit den Zahlen folgende Berechnungen durch und codieren Sie das Ergebnis jeweils im angegebenen Gleitpunktformat. Runden Sie mittels <u>*round to even*</u>.

(i) $A + B$

(ii) $A + C$

A : 1 ...

C : NaN

→ A + C = NaN

(iii) $B + D$

Aufgabe 4: Paritätsbits

Ein Code, dessen Codewörter eine Länge von 5 Bit haben, soll folgenermaßen störsicherer gemacht werden: Jeweils fünf Codewörter werden in Form einer Matrix angeordnet. Dann wird zeilen- und spaltenweise ein Parity-Bit (even parity) berechnet, wobei auch über die Parity-Bit-Spalte ein Parity-Bit bestimmt wird. Bezüglich dieses Matrixcodes entspricht die 5x5 Matrix einem Datenwort und die 6x6 Matrix dem zugehörigen Codewort.

$$\begin{array}{c|c} & +1 \\ 01001 & 0 \\ 11011 & 0 \\ 10010 & 0 \\ 10101 & 1 \\ 00001 & 1 \\ \hline +1 \leftarrow 10100 & 0 \rightarrow +1 \end{array}$$

$D = \cancel{3}\ 2$

a) Kodieren Sie 01001, 11011, 10010, 10101, 00001.

b) Korrigieren Sie das Martix-Codewort.

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 00110 \end{array}$$

c) Wie viele Bits kann diese Methode in jeweils fünf Codewörtern korrigieren?

$\left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor = 1$ Bit

d) (**Bonus-Aufgabe.** Muss nicht gelöst werden. Bei richtiger Präsentation kann das allerdings zu einem Mitarbeitsplus führen.)
Warum ist das Parity-Bit, das spaltenweise über die Parity-Bit-Spalte berechnet wird, auch ein korrektes Parity-Bit für die Parity-Bit-Zeile?

Bits ändern sich in Zeile und Spalte.
XOR zeilen- und spaltenweise

Aufgabe 5: Mittlerer Informationsgehalt, mittlere Wortlänge und Redundanz eines Codes

Gegeben sei folgender Code für das Alphabet $\{\alpha \mid \beta \mid \gamma \mid \delta \mid \varepsilon\}$. Die Tabelle enthält neben den Codewörtern auch die Auftrittswahrscheinlichkeit und den Informationsgehalt der einzelnen Zeichen des Quellalphabets.

	p_i	h_i	Codewort
α	0.07	3.84	00
β	0.31	1.69	010
γ	0.18	2.47	011
δ	0.21	2.25	10
ε	0.23	2.12	11

a) Berechnen Sie

$\sum_i p_i \cdot h_i$ $H = 0{,}07 \cdot 3{,}84 + 0{,}31 \cdot 1{,}69 + 0{,}18 \cdot 2{,}47 + 0{,}21 \cdot 2{,}25 + 0{,}23 \cdot 2{,}12 = 2{,}1974$ Bit

$\sum_i p_i \cdot c_i$ $L = 0{,}07 \cdot 2 + 0{,}31 \cdot 3 + 0{,}18 \cdot 3 + 0{,}21 \cdot 2 + 0{,}23 \cdot 2 = 2{,}49$ Bit

$L - H$ $R = 2{,}49$ Bit $- 2{,}1974$ Bit $= 0{,}2926$ Bit

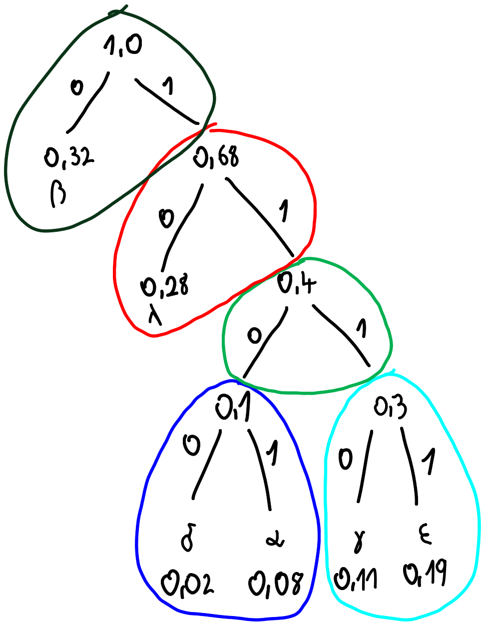
b) Ist der Code optimal? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nein, das Codewort für β sollte kürzer sein, da höhere Auftrittswahrscheinlichkeit von β (α und β vertauschen).

Aufgabe 6: Huffman-Code

a) Gegeben sei ein Alphabet bestehend aus den Zeichen $\{\alpha \mid \beta \mid \gamma \mid \delta \mid \varepsilon \mid \lambda\}$. Betrachten Sie die nachfolgende Tabelle mit den jeweiligen Auftrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Zeichen und füllen Sie die Tabelle vollständig aus. Erstellen Sie dazu einen passenden Huffman-Codebaum und geben Sie zusätzlich die mittlere Wortlänge L an.

	p	Codewort	l	p · l
α	0.08	1101	4	0,32
β	0.32	0	1	0,32
γ	0.11	1110	4	0,44
δ	0.02	1100	4	0,08
ε	0.19	1111	4	0,76
λ	0.28	10	2	0,54



$\alpha\delta$ 0,1
$\gamma\varepsilon$ 0,3
$\alpha\gamma\delta\varepsilon$ 0,4
$\alpha\gamma\delta\varepsilon\lambda$ 0,68
$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda$ 1,0

$L = 2{,}46$ Bit

Codewörter präfixfrei, weil Baum

b) Gegeben ist folgender Code.

	p	h	h · p	Codewort	l	p · l
x	0.69	0.54	0.373	1	1	0.69
y	0.17	2.56	0.435	01	2	0.34
z	0.14	2.84	0.398	00	2	0.28

$L = 0{,}69 + 0{,}34 + 0{,}28 = 1{,}31$ Bit

$H = 0{,}373 + 0{,}435 + 0{,}398 = 1{,}206$ Bit

i. Berechnen Sie die Redundanz.

$R = L - H = 1{,}31 - 1{,}206 = 0{,}104$ Bit

ii. Um die Redundanz zu verringern, werden zwei aufeinanderfolgende Zeichen miteinander codiert. Dabei wird davon ausgegangen, dass die einzelnen Zeichen unabhängig voneinander auftreten. Füllen Sie dazu folgende Tabelle aus.

	p	Codewort	l	p · l	h · p
xx	0,4761	0	1	0,4761	0.5097
xy	0,1173	101	3	0,3519	0.3627
xz	0,0966	1111	4	0,3864	0.3257
yx	0,1173	110	3	0,3519	0.3627
yy	0,0289	111011	6	0,1734	0.1477
yz	0,0238	111001	6	0,1428	0.1284
zx	0,0966	100	3	0,2898	0.3257
zy	0,0238	111010	6	0,1428	0.1284
zz	0,0196	111000	6	0,1176	0.1112

iii. Geben Sie R und die mittlere Wortlänge L an.

$L = 2{,}4327$ Bit

$H = 2{,}4022$ Bit

$R = 0{,}0305$ Bit

Aufgabe 7: Boole'sche Algebra – Gleichheit von zwei Ausdrücken mit Wahrheitstabelle überprüfen

Überprüfen Sie die nachfolgenden Boole'schen Ausdrücke F_1 und F_2 mittels Wahrheitstabelle auf logische Äquivalenz. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: $\uparrow$ entspricht NAND, $\downarrow$ entspricht NOR, $\oplus$ entspricht XOR.

Hinweis: Sie können die resultierenden Wahrheitswerte eines binären Operators direkt unter diesen Operator in der Wahrheitstabelle schreiben.

a) $F_1 = (a \Rightarrow d) \uparrow (b \oplus c)$
$F_2 = (b \equiv c) \vee [(a \downarrow d) \wedge (a \vee c)]$

a	b	c	d	$(a \Rightarrow d)$	$\uparrow$	$(b \oplus c)$	$\equiv$	$(b \equiv c)$	$\vee$	$[(a \downarrow d)$	$\wedge$	$(a \vee c)]$
0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1 ~~0~~	0	~~1~~ 0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1 ~~0~~	0	~~1~~ 0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1 ~~0~~	0	~~1~~ 0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

neg!

Begründung: Ausdrücke nicht äquivalent, da nicht jede Belegung wahr ist.

b) $F_1 = (a \oplus c) \vee (c \wedge d)$
$F_2 = (c \uparrow d) \Rightarrow ((a \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge c))$

a	b	c	d	$(a \oplus c)$	$\vee$	$(c \wedge d)$	$\equiv$	$(c \uparrow d)$	$\Rightarrow$	$[(a \wedge \neg c)$	$\vee$	$(\neg a \wedge c)]$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0

Begründung: Ausdrücke sind äquivalent, da jede Belegung wahr ist. → Tautologie

Aufgabe 8: Informationsgehalt – Wahrscheinlichkeiten

Lösen Sie nachfolgenden Aufgaben. Gehen Sie davon aus, dass alle gegebenen Würfel fair sind.

a) Sie haben drei weiße Würfel.

- Sie würfeln gleichzeitig mit den weißen Würfeln. Wie groß ist Pr (⚀||⚀||⚂)?

  $Pr(1,1,3) = Pr(1)\cdot Pr(1)\cdot Pr(3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

  $3! = 6$ Permutationen $\rightarrow \frac{1}{36}\cdot\cancel{\frac{1}{6}}\cdot\cancel{6} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278 = 2{,}78\,\%$

- Sie würfeln mit den drei weißen Würfeln hintereinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim ersten Wurf eine ⚃, beim zweiten Wurf eine ⚄ und beim dritten Wurf eine ⚅ zu würfeln? Also: Wie groß ist Pr (⚃;⚄;⚅)?

  $Pr(4,5,6) = Pr(4)\cdot Pr(5)\cdot Pr(6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216} \approx 0{,}0046 = 0{,}46\,\%$

b) Sie würfeln mit einem weißen Würfel dreimal hintereinander.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei kein ⚅ gewürfelt wird?

  $(1-Pr(6))\cdot(1-Pr(6))\cdot(1-Pr(6)) = (1-\frac{1}{6})^3 = \frac{5}{6}^3 = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787 = 57{,}87\,\%$

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei mindestens ein ⚅ gewürfelt wird?

  $1-\frac{125}{216} \approx 0{,}4212 = 42{,}12\,\%$

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau ein ⚅ gewürfelt wird?

  $Pr(6)\cdot(1-Pr(6))^2\cdot 3 = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}^2\cdot 3 = \frac{1}{6}\cdot\frac{25}{36}\cdot 3 = \frac{1}{6}\cdot\frac{25}{36}\cdot 3 = \frac{25}{216}\cdot 3 = \frac{75}{216} \approx 0{,}3472 = 34{,}72\,\%$

c) Sie haben einen weißen und einen schwarzen Würfel.

- Sie würfeln gleichzeitig mit beiden Würfeln. Wie groß ist Pr (⚁||⚂)?

  $Pr(2)\cdot Pr(3)\cdot 1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278 = 2{,}78\,\%$

- Sie würfeln mit den beiden Würfeln hintereinander. Wie groß ist Pr (⚁;⚂)?

  $Pr(2)\cdot Pr(3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278 = 2{,}78\,\%$

d) Sie haben zwei weiße und einen schwarzen Würfel.

- Sie würfeln mit den beiden weißen Würfeln. Wie groß ist Pr (⚁||⚅)?

  $Pr(2)\cdot Pr(6)\cdot 2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 0{,}0556 = 5{,}56\,\%$

- Sie würfeln mit den beiden weißen Würfeln. Wie groß ist Pr (⚁||⚁)?

  $Pr(2)\cdot Pr(2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278 = 2{,}78\,\%$

- Sie würfeln mit einem weißen und einem schwarzen Würfel. Wie groß ist Pr (⚁||⚁)?

  $Pr(2)\cdot Pr(2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278 = 2{,}78\,\%$

e) Wie groß ist der Informationsgehalt einer Spielkarte?

$h = \mathrm{Ld}\left(\frac{1}{p}\right) \rightarrow \mathrm{Ld}(52) = 5{,}70$ Bit

$p = \frac{1}{52}$ Annahme ↘ Sonst undefiniert, abhängig von Definition

f) Ein Kartendeck enthält 52 Spielkarten wobei es 4 "Farben" (Kreuz, Pik, Herz, Karo) mit je 13 Karten gibt. Von jeder Farbe gibt es jeweils ein Ass, einen König, eine Dame, einen Buben und Karten mit den Zahlen von 2 - 10. Wie groß ist der Informationsgehalt beim Ziehen einer Karten aus diesem Deck?

siehe e)

g) Wie groß ist der Informationsgehalt beim Ziehen einer Karte wenn bekannt ist, dass die Karte weder eine Herz noch ein Ass ist?

$4 \cdot (13 - 2) = 44 \rightarrow p = \frac{1}{44} \rightarrow h = \mathrm{Ld}(44) \approx 5{,}46$ Bit

h) Die Karten des Decks werden zufällig vermischt. Wie groß ist der Informationsgehalt der Reihenfolge der Karten?

$\cancel{n \text{ Karten}: n \cdot \mathrm{Ld}(52) = n \cdot 5{,}7 \text{ Bit}}$

$\cancel{\text{Deck}: n = 52 \rightarrow 52 \cdot 5{,}7 \text{ Bit} = 296{,}4 \text{ Bit}}$

$-\mathrm{Ld}\left(\frac{1}{52!}\right) \approx 225{,}58$ Bit

i) Die Karten des Decks werden nach Farbe gruppiert und innerhalb der Farbe vermischt. Nun werden die 4 Farben wieder zu einem Deck übereinandergelegt (nicht vermischt!). Wie groß ist der Informationsgehalt der Reihenfolge der Karten?

$\cancel{n \text{ Karten aus Farbdeck}: n \cdot \mathrm{Ld}\left(\frac{52}{4}\right) = n \cdot 3{,}7 \text{ Bit}}$

$\cancel{\text{Farbdeck}: n = 13 \rightarrow 13 \cdot 3{,}7 \text{ Bit} = 48{,}1 \text{ Bit}}$

$\cancel{\text{Deck}: 4 \text{ Farbdecks} = 4 \cdot 48{,}1 \text{ Bit} = 296{,}4 \text{ Bit}}$

$52 \times 12! \cdot 39 \cdot 12! \cdot 26 \cdot 12! \cdot 13! \cdot 12 = ?$

?