1. Eine Markovkette mit drei Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die t-stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

(b) Es sei $\mathbb{P}(X(0) = 1) = 0.4$, $\mathbb{P}(X(0) = 2) = \mathbb{P}(X(0) = 3) = 0.3)$. Bestimmen Sie die Verteilungen von $X(1)$ und $X(2)$.

a) $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$

$\rightarrow |A - I \cdot \lambda| = 0 \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 0{,}7-\lambda & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7-\lambda & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6-\lambda \end{vmatrix} \rightarrow (0{,}7-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 0{,}7-\lambda & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}6-\lambda \end{vmatrix} - 0{,}2 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6-\lambda \end{vmatrix} + 0{,}1 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0{,}7-\lambda \\ 0{,}3 & 0{,}6-\lambda \end{vmatrix}$$

$\rightarrow \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{2}{5} \qquad \lambda_3 = \frac{3}{5}$

$\rightarrow x_1 = y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_2 = y \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_3 = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für diagonale Matrizen gilt $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 & 0 \\ 0 & y^n & 0 \\ 0 & 0 & z^n \end{pmatrix}$

$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \qquad P \ldots \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & -3 \\ 1 & -\frac{5}{7} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

$D \ldots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$$\lim_{n \to \infty} A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & -3 \\ 1 & -\frac{5}{7} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{7}{24} \\ 0 & -\frac{7}{12} & \frac{7}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{7}{24} \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{7}{24} \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}}$$

b) $P(X(0)=1) = 0{,}4 \qquad P(X(0)=2) = P(X(0)=3) = 0{,}3$

$1 = 0{,}4 \qquad 2 = 0{,}3 \qquad 3 = 0{,}3$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0.1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \quad \pi = (0{,}4,\ 0{,}3,\ 0{,}3)$

$\rightarrow \quad \pi \cdot A = \Big(\underbrace{0{,}34,\ 0{,}38,\ 0{,}28}_{\pi_1}\Big) = P_1[X]$

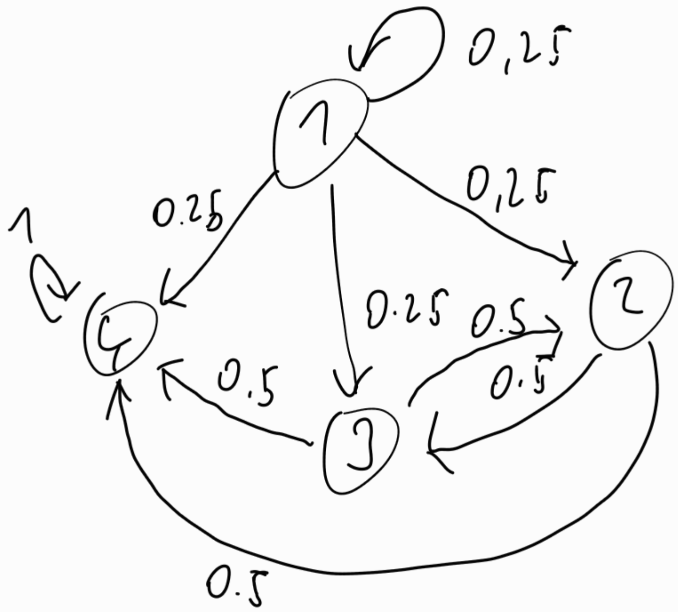
$\rightarrow \quad \pi_1 \cdot A = (0{,}304,\ 0{,}418,\ 0{,}278) = P_2[X]$

2. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Bestimmen Sie die Klassen von verbundenen Zuständen, die t-stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \to \infty$ sowie die mittleren Absorptionszeiten.

1)



$\{4\}$ absorbierend

$\{2, 3\}$ rekurrent

$\{1\}$ transient

2) t-stufige Übergangsmatrix (Diagonalisation)

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\to$ logisch da 4 absorbierend ist

Mittlere Absorptionszeiten

$$m_i = E_i(T_4) \qquad m_4 = 0$$

$$m_i = 1 + \sum_j p_{ij} \cdot m_j \qquad i \neq 4$$

$$m_1 = 1 + \frac{1}{4} \cdot (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$$

$$m_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot (m_3 + m_4)$$

$$m_3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot (m_2 + m_4)$$

$$m_4 = 0$$

$$\rightarrow m_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} m_2\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} m_2 =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{4} m_2 =$$

$$4 m_2 = 6 + m_2$$

$$\boxed{m_2 = 2}$$

$$\rightarrow \boxed{m_3 = 2}$$

$$m_1 = 1 + \frac{1}{4} \cdot (m_1 + 4)$$

$$4 m_1 = 8 + m_1$$

$$\boxed{m_1 = \frac{8}{3}}$$

$$m_1 = \frac{8}{3} \qquad m_4 = 0$$

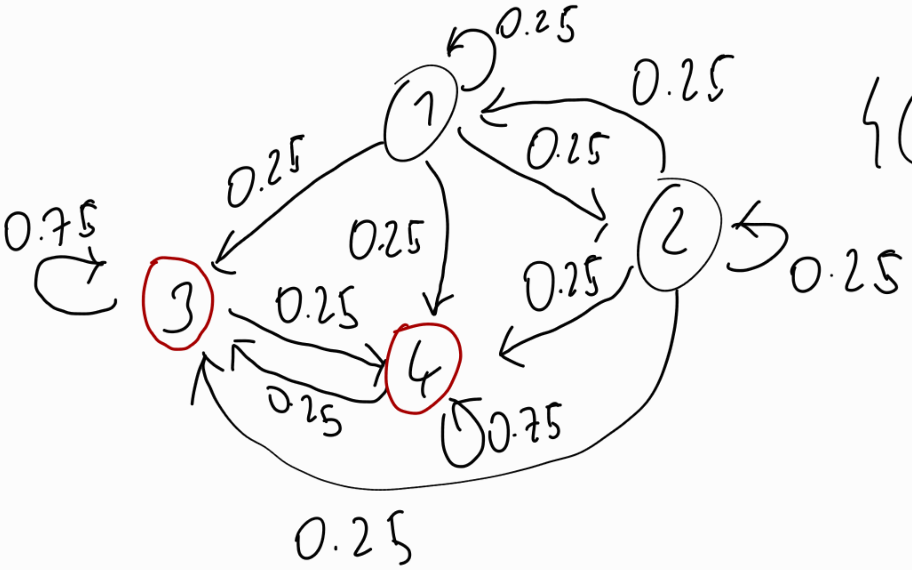
$$m_2 = 2$$

$$m_3 = 2$$

3. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Bestimmen Sie die Klassen von verbundenen Zuständen, die t-stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.



$\{3, 4\}$ absorbierend

$\{1, 2\}$ transient

$$
P(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^t & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

$$
\lim_{t \to \infty} P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

4. Eine faire Münze wird wiederholt geworfen, $X(t)$ sei die Binärzahl, die aus den drei Münzwürfen mit Indizes t, $t+1$, $t+2$ gebildet wird (zu der Münzwurffolge

110101111101000...

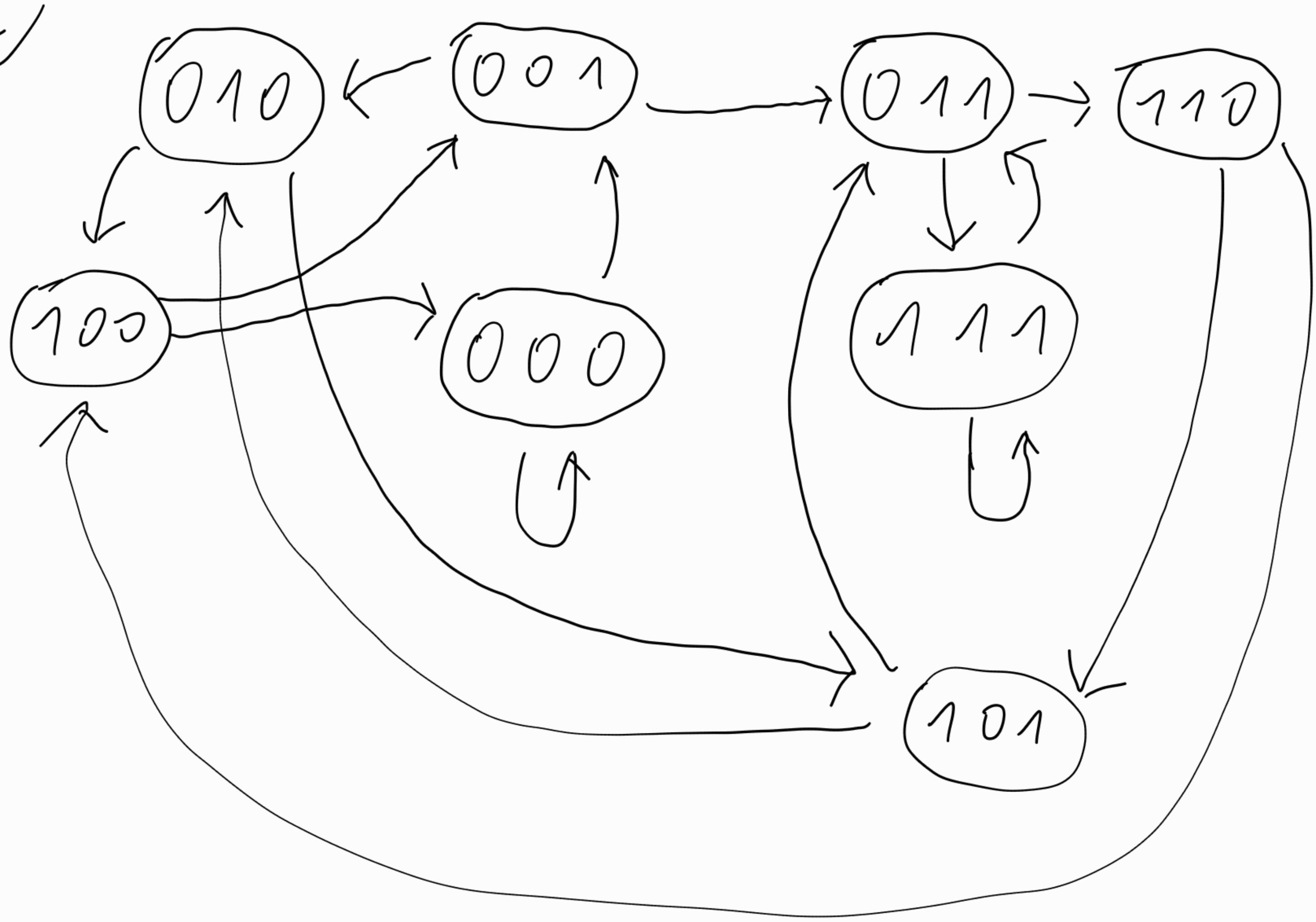
gehört

6,5,2,5,3,7,7,6,5,2,4,0,...).

(a) Überlegen Sie, dass $X(t)$ eine Markovkette bildet, und bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten.

(b) Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal die Folge "111" erscheint. Bestimmen Sie die mittlere Anzahl von Würfen, die dazu nötig sind.

a)



Alle Pfeile haben P = 0.5

Übergangsmatrix :

		a	b	c	d	e	f	g	h
i		000	001	010	011	100	101	110	111
a	000	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0
b	001	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0
c	010	0	0	0	0	0.5	0.5	0	0
d	011	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5
e	100	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0
f	101	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0
g	110	0	0	0	0	0.5	0.5	0	0
h	111	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5

b) $m_{111} = 0$

$$m_{100} = m_{000} = 1 + \frac{1}{2}\left(m_{000} + m_{001}\right) = \text{???}$$

$$= 1 + 0.5 \cdot \left(m_{000} + 6 + m_{000}\right) = 4 + m_{000} = m_{000}$$

$$m_{101} = m_{001} = 1 + \frac{1}{2}\left(m_{010} + m_{011}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(2 + 2m_{010}\right)$$

$$m_{001} = 2 + m_{010}$$

$$m_{110} = m_{010} = 1 + \frac{1}{2}\left(m_{001} + m_{000}\right) = 2 + \frac{m_{010}}{2} + \frac{m_{000}}{2}$$

$$m_{010} = 4 + m_{000}$$

$$m_{011} = 1 + \frac{1}{2}\left(m_{010} + m_{011}\right) =$$

$$2m_{011} = 2 + m_{010} + m_{011} =$$

$$m_{011} = 2 + m_{010}$$

b)

a=1+0.5*(a+b)
b = 1+0.5*(c+d)
c = 1+0.5*(e+f)
d=1+0.5*(g+h)
e=1+0.5*(a+b)
f=1+0.5*(c+d)
g=1+0.5*(e+f)
h=0

Wolframalpha →

$$m_{000} = m_{100} = 14$$
$$m_{001} = m_{101} = 12$$
$$m_{010} = m_{110} = 14$$
$$m_{011} = 8$$

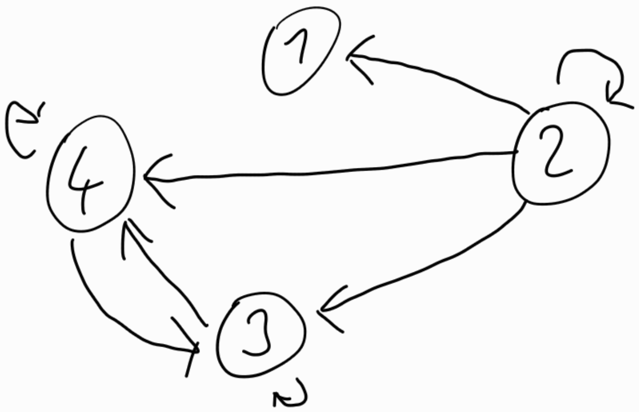
$$\bar{m} = \frac{14 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 14 \cdot 2 + 8 + 0}{8}$$

$\approx$ 11 Würfe

5. Eine Markovkette mit vier Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Klassen von kommunizierenden Zuständen, die Übergangsmatrizen $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \to \infty$ sowie die mittleren Absorptionszeiten.



{1} absorbierend

{3, 4} rekurrent

{2} transient

$$P(t) = e^{Qt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n t^n}{n!}$$

Wenn Q diagonalisierbar gilt ja $Q = E \Lambda^{t} E^{-1}$

$$\to P(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Mittlere Absorptionszeiten

Für Absorption von {1}

$$m_4 = m_3 = \infty \qquad m_1 = 0$$

$$m_2 = \begin{cases} \infty & \text{falls (3) oder (4) betreten wird} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für Absorption von {3, 4}

$$m_4 = m_3 = 0 \qquad m_1 = \infty$$

$$m_2 = \begin{cases} \infty & \text{falls (1) betreten wird} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

6. Eine Markovkette mit drei Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Übergangsmatrizen $P(t)$ und ihren Grenzwert für $t \to \infty$.

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 1 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

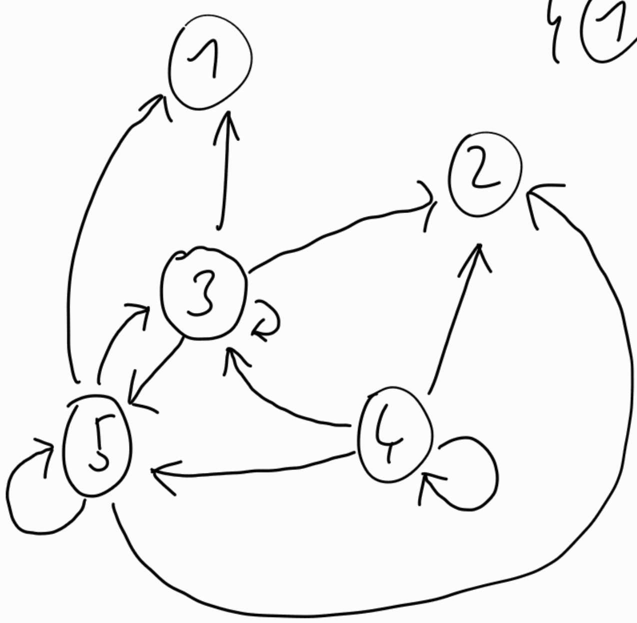
$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

7. Eine Markovkette mit fünf Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Absorptionswahrscheinlichkeiten im absorbierenden Zustand 1 und die mittleren Absorptionszeiten.

$\{1, 2\}$ absorbierend



$a_1 = 1 \qquad a_2 = 0$

(Skript!)

$$\rightarrow \quad 0 = \sum_j q_{ij} \cdot a_j$$

$$0 = 1 + 2 \cdot 0 - 4a_3 + a_5$$

$$0 = a_3 - 3a_4 + a_5$$

$$0 = 1 + a_3 - 3a_5$$

$$a_3 = \frac{4}{11} \qquad a_4 = \frac{3}{11} \qquad a_5 = \frac{5}{11}$$

Mittlere Zeit bis zur Absorption

$t_1 = 0$

$t_2 = \infty$

$0 = 1 + \sum_j q_{ij} t_j$ → muss irreduzibel sein

$$0 = 1 + \cancel{t_1} + \cancel{2t_2} - 4t_3 + t_5$$

$$0 = 1 + \cancel{t_2} + t_3 - 3t_4 + t_5$$

$$0 = 1 + \cancel{t_1} + \cancel{t_2} + t_3 - 3t_5$$

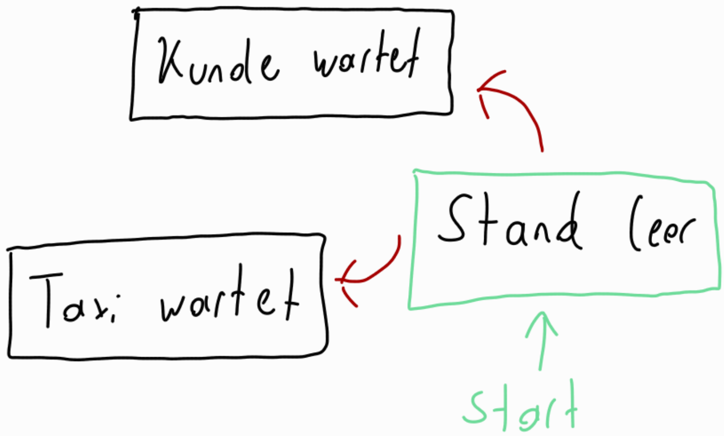
$$t_3 = \frac{4}{11} \quad t_4 = \frac{20}{33} \quad t_5 = \frac{5}{11}$$

8. Bei einem Taxistandplatz kommen Taxis nach einem Poissonprozess mit Rate λ an, die Kunden nach einem Poissonprozess mit Rate μ. Taxis, die ankommen, wenn schon ein Taxi wartet, fahren weiter, und dasselbe gilt für die Kunden. Es handelt sich hier um eine Markovkette mit drei Zuständen (leer, ein Taxi wartet, ein Kunde wartet). Zur Zeit $t = 0$ ist der Stand leer.

   (a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zeit, bis der Stand besetzt ist.

   (b) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.

Kunden mit Rate μ
Taxis mit Rate λ



a) $\rightarrow$ KW oder TW Zustand muss erreicht werden

Zwei Poissonprozesse:

1) Wartet auf Kunden

2) Wartet auf Taxi

1)
$$Exp(\mu) = e^{-\mu t} \quad \text{für } N \to \infty \text{ (siehe Skriptum)}$$

2)
$$Exp(\lambda) = e^{-\lambda t} \quad -\|- \quad -\|-$$

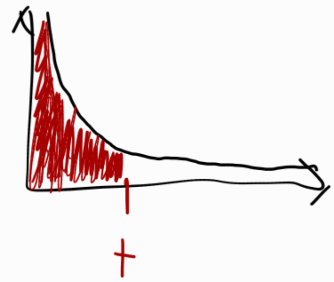
Da beide 1) und 2) unabhängig sind

und wir das minimum suchen so das

$$P(KW > t, TW > t)$$

$$= P(KW > t) \cdot P(TW > t)$$

$$= \underline{e^{-t(\lambda+\mu)}}$$



b) –