Gruppenmitglieder: Hodzic Samir, Yilmaz Ismail, Schrabauer Rita, Coja Filip

Gruppe 1

1. Zwei Würfel werden geworfen.

   (a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und stellen Sie das Ereignis "das Minimum der Augenzahlen ist höchstens 3" als Menge dar.

   (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Minimum der beiden Augenzahlen höchstens 3 ist.

$\mathbb{N}_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$

a) $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6) \; (1,2) \; (1,3) \ldots\} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N}_6\}$

$\Omega = \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6 = \mathbb{N}_6^2$

10^2

$\min(x,y) \leq 3$

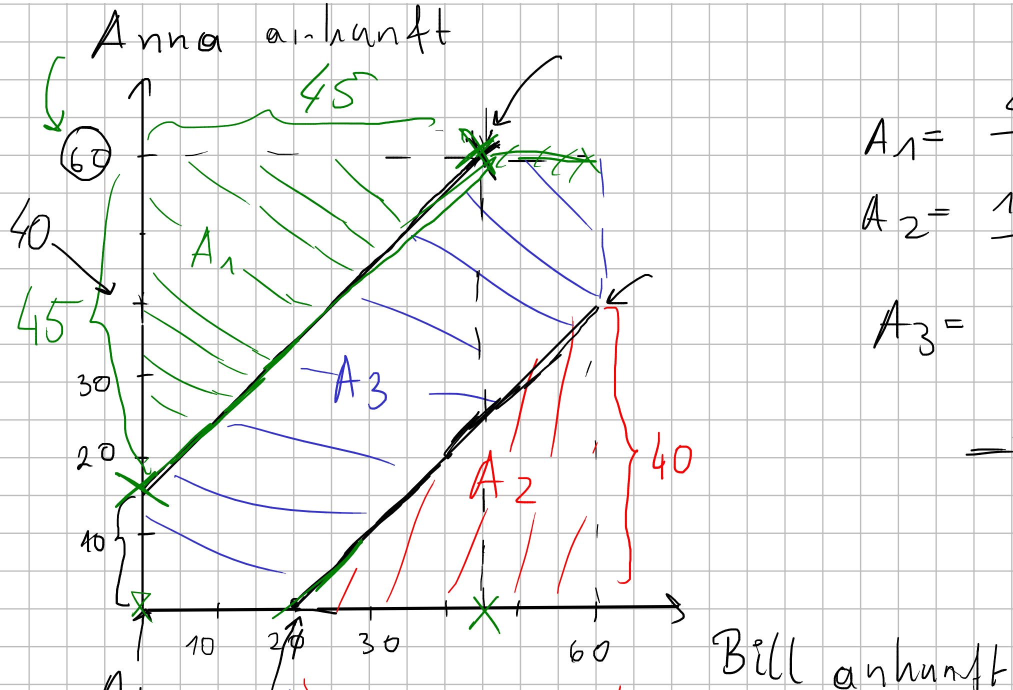
$X = \Omega \setminus \{4,5,6\}^2$

3

b) $= \underline{P(X)} = P(\Omega \setminus \{4,5,6\}^2) = P(\Omega) - P(\{4,5,6\}^2)$

$1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36} = \underline{\frac{3}{4}}$

2. (Geometrische Wahrscheinlichkeit) Anna und Bill frühstücken jeden Tag im selben Café. Sie treffen (unabhängig gleichverteilt) zwischen 8 und 9 dort ein, Anna bleibt 20 Minuten, Bill 15. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie einander treffen?

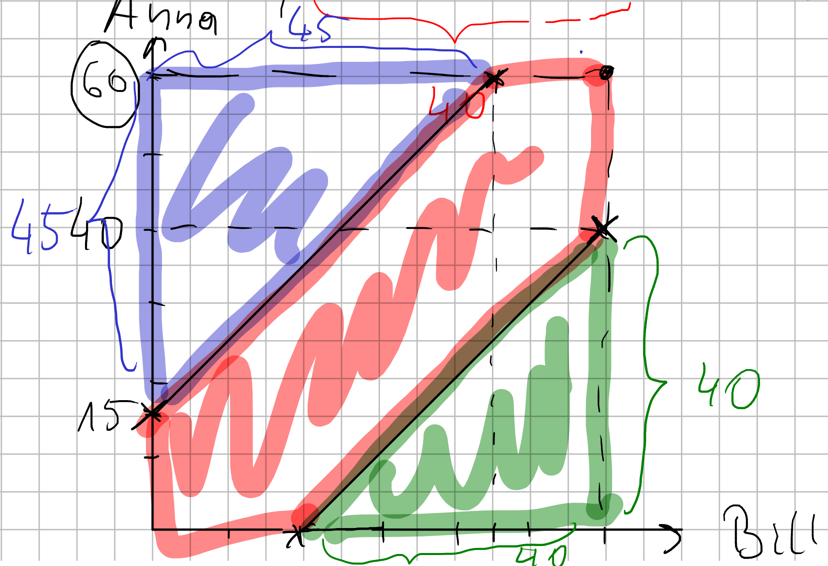


$A_1 = \frac{45^2}{2} = 1012{,}5$

$A_2 = \frac{1600}{2} = 800$ (40·40)

$A_3 = 3600 - 800 - 1012{,}5 = \underline{1787{,}5}$

$\Rightarrow P(\text{Anna} \wedge \text{Bill}) = \frac{1787{,}5}{3600} \approx 0{,}4966$



3. Die Ereignisse A, B und C erfüllen die Bedingungen

$$\mathbb{P}(A) = 0.7, \mathbb{P}(B) = 0.6, \mathbb{P}(C) = 0.5,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4, \mathbb{P}(A \cap C) = 0.3, \mathbb{P}(B \cap C) = 0.2,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.1.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A \cup B), \mathbb{P}(A \cup C), \mathbb{P}(B \cup C), \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

$$P(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0{,}4 = 0.9$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0.7 + 0.5 - 0.3 = 0.9$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0.6 + 0.5 - 0.2 = 0.9$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

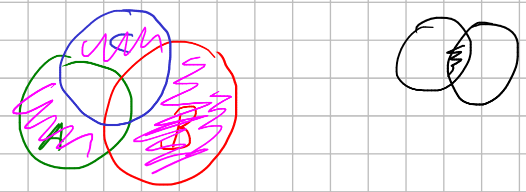
$$\underbrace{0.7 + 0.6 + 0.5}_{1.8} \underbrace{- 0.4 - 0.3 - 0.2}_{-0.9} + \underbrace{0.1}_{+0.1}$$

$$\underline{1}$$

4. Die symmetrische Differenz von zwei Mengen ("exklusives Oder") ist

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Drücken Sie $\mathbb{P}(A \triangle B)$ und $\mathbb{P}(A \triangle B \triangle C)$ durch die Wahrscheinlichkeiten von Durchschnitten aus (Zusatzaufgabe: raten Sie, wie die Formel für n Mengen aussieht).



$$P(A \triangle B) = P((A\setminus B) \cup (B \setminus A))$$

$$= P(A\setminus B) + P(B \setminus A) - P((A\setminus B) \cap (B\setminus A))$$

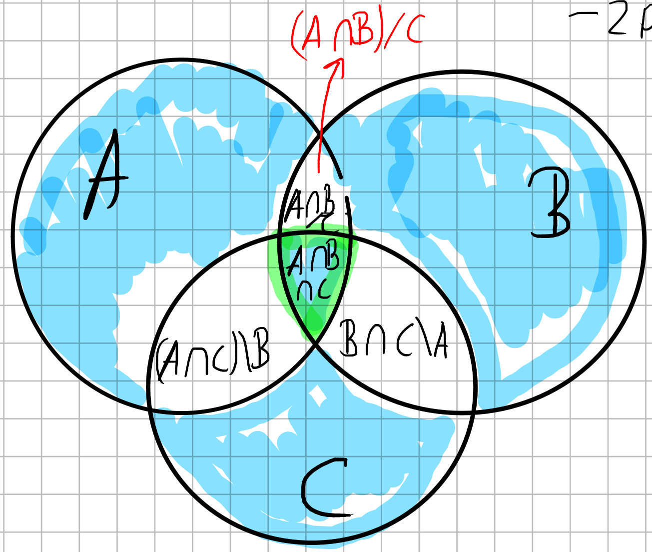
$$= \underbrace{P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)} - P(\underbrace{(A\setminus B) \cap (B \setminus A)}_{\{\}\text{ leere Menge}})$$

$$P(A\setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A\cap B)$$

$$P(A \triangle B \triangle C) = \overset{+1}{P(A)} + \overset{+1}{P(B)} + \overset{+1}{P(C)} \overset{-2}{- 2P(A\cap C)} \overset{-2}{- 2P(A\cap B)} \overset{-2}{- 2P(B\cap C)}$$

$$+4\, P(A\cap B\cap C)$$



5. Eine Münze wird so lange geworfen, bis Kopf erscheint. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Würfe durch drei teilbar ist.

$$P(n) = \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$$

$$n \in \{ x \mid \tfrac{x}{3} \in \mathbb{N} \}$$

$$P(\{3,6,9,12\ldots\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} = \frac{1}{7}$$

7. Aus einer Urne mit drei weißen und zwei schwarzen Kugeln wird dreimal *mit* Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln

   (a) 3
   (b) 2

   weiße sind.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} = 0.172$

011
101
110

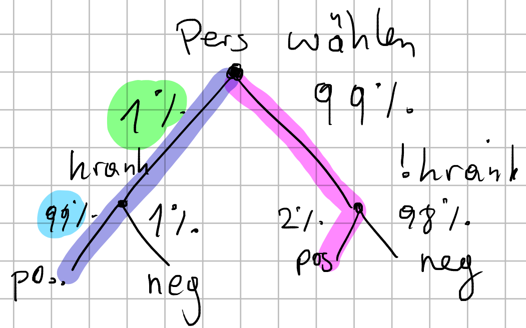
b) $\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot 3 = \frac{54}{125} = 0.432$

8. Von einer Krankheit sind 1% der Bevölkerung betroffen. Ein Test gibt bei einem Kranken mit Wahrscheinlichkeit 0.99 ein positives Ergebnis, bei einem Gesunden mit Wahrscheinlichkeit 0.02.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person positiv getestet wird.

(b) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig gewählte Person krank ist, wenn das Testergebnis positiv ist.

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X) \cdot P(X)}{P(Y)}$$



a) $\underbrace{0.01 \cdot 0.99}_{\text{k und pos}} + \underbrace{0.99 \cdot 0.02}_{\text{!k und pos}} =$

$+ \; 0.0198 = 0{,}0297$

b) $$P(\text{Krank} \mid \text{Positiv}) = \frac{P(\text{Positiv} \mid \text{Krank}) \cdot P(\text{Krank})}{P(\text{Positiv})}$$

$$= \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.0297} = \frac{0.0099}{0.0297} \approx \frac{1}{3}$$

6. Ein Würfel wird dreimal geworfen. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der ersten beiden Augenzahlen 4 ist, wenn die Summe aus zweiter und dritter Augenzahl 8 ist.

X ... Summe der 1. beiden Würfel = 4

Y ... Summe von 2. + 3. Würfel = 8

1. Würfel

2. Würfel

$X = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

2. Würfel

3. Würfel

$Y = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$P(X) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$P(Y) = \frac{5}{36} = \underline{0{,}139}$

$P(X \cap Y) = \{(1,3,5),(2,2,6)\}$

$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{2}{6^3}}{\frac{5}{6^2}} = \frac{\frac{2}{6}}{5} = \frac{\frac{1}{3}}{5} = \underline{\frac{1}{15}}$