1. Bestimmen Sie die die Momentenerzeugende $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{Xt})$ der Gammaverteilung.

$$\underbrace{f(x) = \frac{x^{a-1} \lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x}}_{\text{Gammaverteilung}}$$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \, dx$$

$$\Gamma(a+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

$$M_X(t) = E(e^{xt}) = \int_0^\infty e^{xt} \cdot \frac{x^{a-1} \lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{a-1} \lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot e^{(t-\lambda)x} \, dx$$

$$= \frac{(t-\lambda)^a}{(t-\lambda)^a} \int_0^\infty \frac{x^{a-1} \lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot e^{(t-\lambda)x} \, dx$$

$$= \frac{\lambda^a}{(t-\lambda)^a} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^{a-1} \cdot (t-\lambda)^a}{\Gamma(a)} \cdot e^{(t-\lambda)x} \, dx}_{1 \text{ für } \lambda > t}$$

$$= \frac{\lambda^a}{(t-\lambda)^a}$$

2. Bestimmen Sie die die Momentenerzeugende $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{Xt})$ der Poissonverteilung.

$$M_X(t) = E(e^{xt}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{e^t\lambda} = \underline{\underline{e^{\lambda(e^t-1)}}}$$

3. Bei einem Spiel kann auf die Ausgänge $1, \ldots, m$ gesetzt werden, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_m$ gezogen werden. Wenn Ausgang i gezogen wird, werden die Einsätze auf i m-fach zurückgezahlt, die anderen verfallen. Ein Spieler spielt nach folgender Strategie: er verteilt sein Kapital K im Verhältnis $q_1 : \ldots : q_m$ (mit $\sum_i q_i = 1$) auf die möglichen Ausgänge und verwendet den Gewinn aus einer Runde als Einsatz in der nächsten.

(a) Zeigen Sie, dass das Kapital nach n (unabhängigen) Runden

$$K_n = K_0 X_1 \ldots X_n$$

ist, mit $\mathbb{P}(X_i = mq_j) = p_j$.

(b) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(K_n).$$

(c) Wie sind $q_1, \ldots, q_m$ zu wählen, damit dieser Grenzwert maximal wird?

$$\boxed{P(X_i = mq_i) = p_j}$$

$1, 2, 3, \ldots m$
$p_1 \; p_2 \; p_3 \cdots p_m$

q_j … Verhältniss j, welches gewinnt

$\sum_i q_i = 1$

$K \to q_2 \cdot K$
$K \to q_1 \cdot K$
$K \to q_3 \cdot K$

$$\boxed{i \in \{1, 2 \ldots, m\}}$$

$K_1 = K_0 \cdot m \cdot q_{i_1} = K_0 \cdot X_1$

$K_2 = K_1 \cdot m \cdot q_{i_2} = K_0 \cdot X_1 \cdot X_2$

$\to \underline{K_n = K_0 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdots \cdot X_n} \Leftrightarrow K_n = K_{n-1} \cdot X_n$

(b) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(K_n).$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(K_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(K_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\log(K_0) + \sum_{i=1}^{n} \log(X_i)\right] = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(X_n)}$

entspricht laut starkem Gesetz der großen Zahlen für $n\to\infty$: $E(X_i)$

$E(\log(X_i)) = \sum_{i=1}^{m} \log(X_i)\cdot p_i = \sum_{i=1}^{m} \log(m\cdot q_i)\cdot p_i$

$= \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \log(m) + \log(q_i)\cdot p_i$

(c) Wie sind $q_1, \ldots, q_m$ zu wählen, damit dieser Grenzwert maximal wird?

aus b): $\sum_{i=1} \underbrace{p_i \cdot \log(m)}_{\text{Konstant}} + \underbrace{\log(q_i) \cdot p_i}_{\text{Maximieren}}$

Laut Angabe muss gelten $\sum_{i=1}^{m} q_i = 1$

Mithilfe von Lagrange lösen

$$L(q_1 \cdots q_m, \lambda) = \left(\sum \log(q_i) \cdot p_i\right) - \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} q_i - 1\right)$$

Partielle Ableitungen 0 setzen

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{p_i}{q_i} - \lambda = 0 \rightarrow \frac{p_i}{q_i} = \lambda$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{m} q_i + 1 = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{m} q_i = 1$$

λ muss konstant bleiben $\rightarrow \lambda = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \ldots = \frac{p_i}{q_i}$

Aufgrund $\sum_{i=1}^{m} q_i = 1$ muss gelten $p_i = q_i \Leftrightarrow \lambda = 1$

da es sonst zumindest zwei verschiedene λ gibt.

4. Ein Weg zur Erzeugug von (näherungsweise) standardnormalverteilten Zufallszahlen: $U_1, \ldots, U_{12}$ seien unabhangägig gleichverteilt auf $[0,1]$. Dann ist $X = U_1 + \ldots + U_{12} - 6$ näherungsweise standardnormalverteilt (auf den ersten Blick erscheint $n = 12$ zu klein, um die Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes zu rechtfertigen. Die Näherung ist aber recht gut: Φ und die Verteilungsfunktion von X unterscheiden sich um maximal 0.002336).

1/

$$\boxed{E(U_n) = \frac{1}{2} \quad n \in [1,12]}$$

$$E(X) = E\left(\sum_{n=0}^{12} U_n - 6\right)$$

$$= -6 + \underbrace{\sum_{n=1}^{12} \frac{1}{2}}_{6} = \underline{0}$$

2/

$$\boxed{V(U_n) = \frac{1}{12} \quad n \in [1,12]}$$

$$\boxed{V(aX+b) = a^2 V(X)}$$

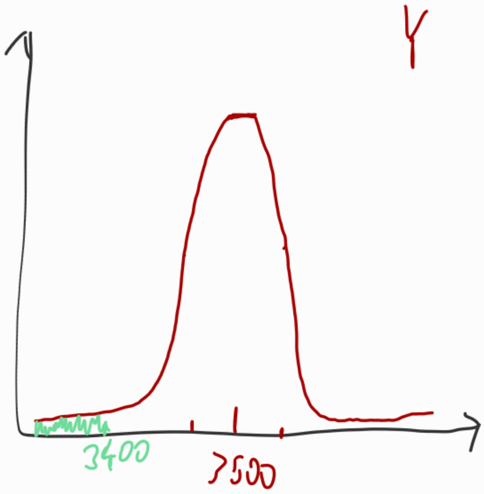
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

da unabhängig

$$V(X) = V\left(\sum_{n=1}^{12} U_n - 6\right) = \sum_{n=1}^{12} \frac{1}{12} = \underline{\underline{1}}$$

5. Ein Würfel wird 1000 mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen kleiner als 3400 ist.

Y ... Verteilung von Angabe ist annähernd Normalverteilt



$3.5 \cdot 1000 = 3500 = E(Y)$

$\sqrt{(1000 \cdot 2{,}92)} = \sqrt{2920} \approx 54 = \sqrt{V(Y)}$

$P(Y \leq 3400) = \phi\left(\frac{3400-3500}{54}\right) = 3{,}2\,\%$

ohne Stetigkeitskorrektur!

6. Wie oft muss man würfeln, um mit Wahrscheinlichkeit 0.9 mindestens 100 Sechsen zu erhalten (rechnen Sie näherungsweise mit dem zentralen Grenzwertsatz: das führt zu einer quadratischen Gleichung für n).

$$Y = B(n, 1/6) \sim N\left(n/6, \frac{5n}{36}\right)$$

$\boxed{B(n,p) \sim N(np, np(1-p))}$

für große $\underline{n}$

$$0.9 = P(Y \geq 100) = 1 - \phi\left(\frac{100 - \frac{n}{6}}{\sqrt{\frac{5n}{36}}}\right) =$$

$\phi(-1.28) \approx 0.1$

$$= 1 - \phi\Bigg(\underbrace{\frac{600-n}{\sqrt{5n}}}_{-1.28}\Bigg)$$

$$\rightarrow \quad -1.28 = \frac{600-n}{\sqrt{5n}} =$$

$$= 8.192n = 360\,000 - 1200n + n^2$$

$$= n^2 - 1208.192n + 360000 = 0$$

$n_1 = 675$ } rechts vom μ → Lösung!

$n_2 \approx 533.868$

7. Die Frage nach der Anzahl der Würfe, die nötig sind, um mit Wahrscheinlichkeit 0.9 mindestens 100 Sechsen zu erhalten, kann man auch so lösen: diese Anzahl ist negativ binomialverteilt, und diese negative Binomialverteilung kann als Summe von unabhängigen geometrischen verteilten Zufallsvariablen (jeweils die Wartezeit bis zur nächsten Sechs) dargestellt werden. Wenden Sie auf diese Summe den zentralen Grenzwertsatz an und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus dem vorigen Beispiel.

$$Y = NB^*(\underbrace{100}_{n}, \underbrace{1/6}_{p}) =$$

• = successes → 100 x 6er

• = Wsl.

$$= \binom{x-1}{99} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{100-x} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x} \qquad (x \geq n)$$

$$E(NB^*) = \frac{n}{p} = 600$$

$$V(NB^*) = \frac{n \cdot (1-p)}{p^2} = 100 \cdot \frac{36 \cdot 5}{6} = 100 \cdot 30 = 3000$$

$$\rightarrow \quad 0.9 = P(Y \leq n) = \phi\left(\frac{n - 600}{\sqrt{3000}}\right) \qquad Y \ldots \text{ Anzahl der Würfe}$$

$$\phi(1.28) \approx 0{,}9$$

$$\frac{n-600}{\sqrt{3000}} = 1.28$$

$$n = 1.28 \cdot \sqrt{3000} + 600 =$$

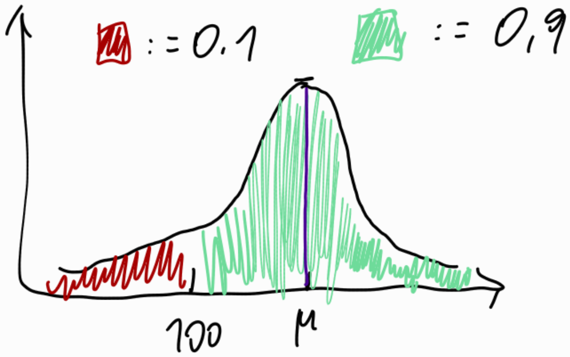
$$= 670.108 \rightarrow 671 \text{ Würfe}$$

Laut NB^* weniger Würfe notwendig!!

8. Wie oft muss man Würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen größer als 100 ist, mindestens 0.9 beträgt?

$$E(Y) = n \cdot 3.5$$

$$V(Y) = n \cdot \underbrace{V(\text{Würfel})}_{\approx 2.92}$$



$$0{,}9 = 1 - \underbrace{P(Y \le 100)}_{p=0{,}1} \Leftrightarrow \underbrace{\phi\left(\frac{100-3.5n}{\sqrt{2.92n}}\right)}_{p=0{,}1} =$$

$$\boxed{\phi^{-1}(0{,}1) = -1.28} \longrightarrow -1.28 = \frac{100-3.5n}{\sqrt{2.92n}}$$

$$4.784128\,n = 10000 - 700n + 12.25n^2$$

$$n = \underline{\underline{33}}$$