Gruppe 1: Samir Hodzic, Filip Coja,
Rita Schrabauer, Ismail Yilmaz

1. X hat die Dichte

$$f(x) = ax^2(1-x)[0 \leq x \leq 1].$$

Bestimmen Sie a, die Verteilungsfunktion von X und die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen 1/4 und 3/4 liegt.

$$v = \int v' \, dx = \frac{x^3}{3}$$

$$u' = -1$$

$$u \cdot v - \int v u' \, dx$$

$$F(t) = \int_0^t f(x)$$

$$a \int \underbrace{x^2}_{v'} \underbrace{(1-x)}_{u} \, dx = a \cdot \left(\frac{x^3}{3} \cdot (1-x) + \int \frac{x^3}{3} \, dx \right) =$$

$$F(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{12} + C_1 \right) = a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{12} \right) + C_2$$

$$F(x) = 12\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{12} \right) + C_2$$

$$F(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{12} \right) + C_2 \qquad [0 \leq x \leq 1]$$

$$1 = \int_0^1 f(x) \, dx = \left[a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{12} \right) \right]_0^1 = a\left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12} \right) = \frac{1}{12} a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 12}$$

$$F(3/4) - F(1/4) = 12 \cdot \left(\frac{\frac{27}{64}}{3} - \frac{3 \cdot \frac{84}{256}}{12} \right) - 12 \cdot \left(\frac{\frac{1}{64}}{3} - \frac{3 \cdot \frac{1}{256}}{12} \right)$$

$$= 12 \cdot \left(\frac{\frac{26}{64}}{3} - \frac{3 \cdot \frac{83}{256}}{12} \right) = \frac{167}{256} \simeq \underline{0{,}653}$$

2. Es sei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^2/4 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

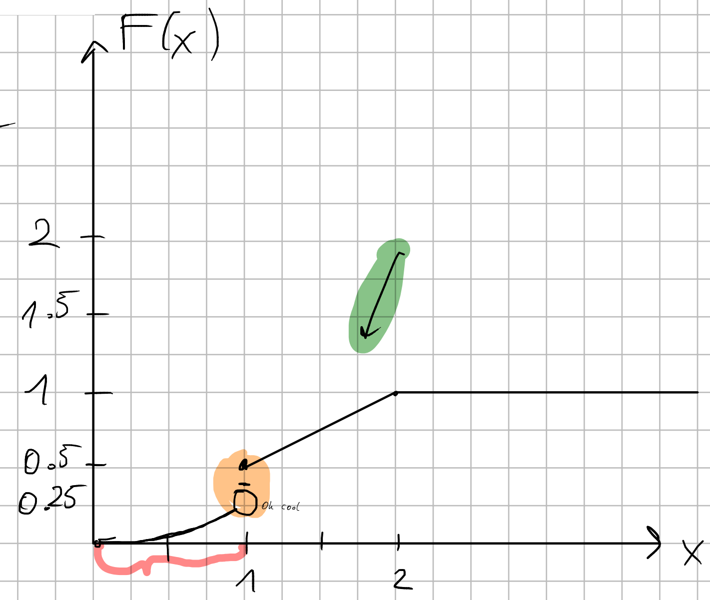
(a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

(b) X sei nach F verteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X \leq 1)$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$.

$F(X) = \lim\limits_{x_R \to X} F(x)$

a) $F(x) =$ monoton Steigend + Stetig

1. F monoton nichtfallend
2. F ist rechtsstetig
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$



b) $P(X<1) = \frac{1}{4}$, $P(X \leq 1) = \frac{1}{2}$

$P(X=0) = 0$ $\quad$ $P(X=1) = 1/4$

$P(X=2) = 0$

$$\underbrace{P(X<1)}_{0.25} + P(X=1) = \underbrace{P(X \leq 1)}_{0.5}$$

$$\underset{1}{P(X<2)} + P(X=2) = \underset{1}{P(X \leq 2)}$$

3. Zeigen Sie, dass für $n \to \infty, p = \lambda/n$ und Zufallsvariable $X_n \sim B(n,p)$ und $Y \sim P(\lambda)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(Y = x), x = 0, 1, \ldots$$

gilt.

$p = \lambda/n$ $\quad X_n \sim B(n,p) \quad P(X_n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$P(\lambda) = P(X_n)$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \leftarrow}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$P(\lambda)$

$P(\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$e^{-\lambda} \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} = e^{-\lambda} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}}$$

$$= e^{-\lambda} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{\lambda}{n}}\right)^k = e^{-\lambda} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda^k \cdot \frac{1}{(n-\lambda)^k}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^k \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{(n-\lambda)^k} = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k \cdot \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{(n-\lambda)^k}$$

$$e^{-\lambda}\lambda^{k}\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))\cancel{(n-k)!}}{\cancel{(n-k)!}}\cdot\frac{1}{\left(n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right)^{k}}=$$

$$e^{-\lambda}\lambda^{k}\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{n^{k}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}_{1}^{k}}=e^{-\lambda}\lambda^{k}\frac{1}{k!}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots}_{1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}B\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)=e^{-\lambda}\lambda^{k}\frac{1}{k!}$$ k ... anzahl pos. Ereignisse

4. X und Y haben die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{wenn } x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie c, die Randverteilungen von X und Y und

$$\mathbb{P}(X > 1/3 | Y = 1/3).$$

$x \geq 0$

$y \geq 0$ $\qquad x + y \leq 1$

$\rightarrow x \leq 1 - y$

$0 \leq x \leq 1 - y$

$0 \leq y \leq 1 - x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y} = 1 = \int_0^1 \int_0^{1-y} cxy \, dx \, dy$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} c \, xy \, dx \, dy =$$

$$\int_0^{1-y} cxy \, dx = cy \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{1-y}$$

$$= cy \cdot \frac{(1-y)^2}{2} \qquad 1 - 2y + y^2$$

$$= c \cdot \left(\frac{y - 2y^2 + y^3}{2} \right)$$

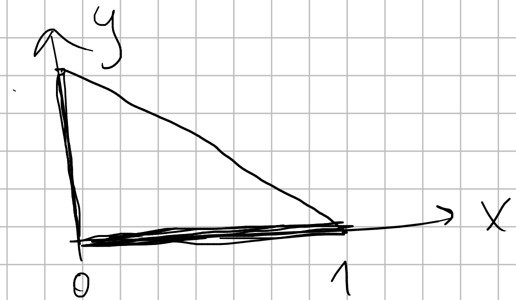
$$\frac{1}{2} c \int_0^1 y - 2y^2 + y^3 \, dy$$

$$= \frac{c}{2} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{c}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{c}{2} \left(\underbrace{\frac{6}{12} - \frac{8}{12} + \frac{3}{12}}_{1/12} \right)$$

$$\rightarrow 1 = \frac{c}{24} \Rightarrow \underline{c = 24}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = 24xy$$



$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 24xy \; dx = 24y \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y}$$

$$= 24y \cdot \frac{(1-y)^2}{2} = \underline{12 \cdot (y - 2y^2 + y^3)}$$

$$\underline{f_X(x) =} \int_0^{1-x} 24xy \, dy = 24x \left[\frac{y^2}{2}\right]^{1-x} = 24x \cdot \frac{(1-x)^2}{2} = \underline{12(x - 2x^2 + x^3)}$$

$$\mathbb{P}(X > 1/3 \mid Y = 1/3) \qquad A = [1/3; 2/3]$$

$$\int_A f_Y(y \mid X = x) \, dx \qquad f_Y(y \mid X = x)$$

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y} = \frac{24xy}{12(y - 2y^2 + y^3)} = \frac{2x}{1 - 2y + y^2} = \frac{2x}{(1-y)^2}$$

$$\int_{1/3}^{2/3} f_X(x \mid Y = 1/3)\, dx = \int_{1/3}^{2/3} \frac{2x}{(1-1/3)^2}\, dx = \frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \cdot \int_{1/3}^{2/3} x \, dx$$

$$= \frac{2}{\frac{4}{9}} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{1/3}^{2/3} = \frac{18}{4} \cdot \left(\frac{(2/3)^2}{2} - \frac{(1/3)^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{18}{4} \cdot \left(\frac{4}{18} - \frac{1}{18} \right) = \frac{18}{4} \cdot \frac{3}{18} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

5. In einer Urne befinden sich je drei schwarze, weiße und graue Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, X sei die Anzahl der weißen, Y die der schwarzen Kugeln. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y und die Randverteilung von X.

	Y				
X	0	1	2	3	px
0	$\frac{6}{504}$	$\frac{54}{504}$	$\frac{54}{504}$	$\frac{6}{504}$	$\frac{120}{504}$
1	$\frac{54}{504}$	$\frac{162}{504}$	$\frac{54}{504}$	0	$\frac{270}{504}$
2	$\frac{54}{504}$	$\frac{54}{504}$	0	0	$\frac{108}{504}$
3	$\frac{6}{504}$	0	0	0	$\frac{6}{504}$
py	$\frac{120}{504}$	$\frac{270}{504}$	$\frac{108}{504}$	$\frac{6}{504}$	1

$$3\left(\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\right) = \frac{54}{504}$$

B: $\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot 6 = 27\cdot 3\cdot 2 = 54\cdot 3$

162

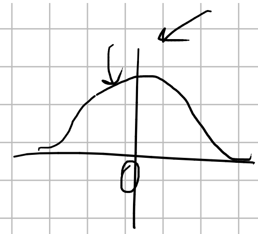
A: $\left(\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\right)3 = \frac{54}{504}$

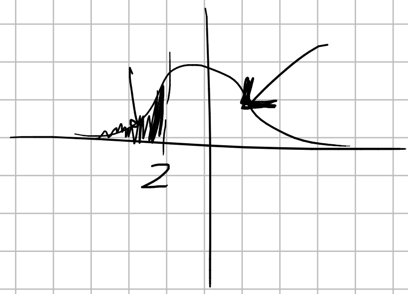
C: $\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7} = \frac{6}{504}$

6. X sei $N(3, 16)$-verteilt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X < 2), \mathbb{P}(X > 6), \mathbb{P}(|X| \leq 1)$.

$\mu = 3 \qquad \sigma^2 = 16 \qquad \sigma = 4$

$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$





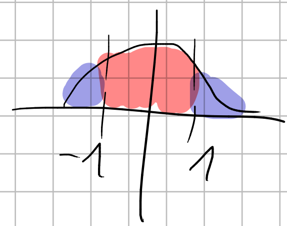
$P(X \geq 2) = \varphi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right)$

$P(X < 2) = 1 - P(X \geq 2)$

$P(-\infty < X < 2) = \varphi\left(\frac{2-3}{4}\right) - 0 = \underline{0.599}$

$P(6 < X < \infty) = 1 - \varphi\left(\frac{6-3}{4}\right) = 1 - 0.773 \approx 0.227$

$P(-1 < X < 1) =$



$A = 1 - 2 \cdot B$

$B = 1 - \varphi\left(\frac{1-3}{4}\right) = 1 - 0.691$

$= 0.309$

$\Rightarrow \underline{A} = 1 - 0.618$

$P(-1 < X < 1) = \underline{0.382}$

7. X sei exponentialverteilt mit $\lambda = 0.1$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X < 10)$, $\mathbb{P}(|X - 12| < 6)$, und einen Wert x mit $\mathbb{P}(X \leq x) = 1/2$.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

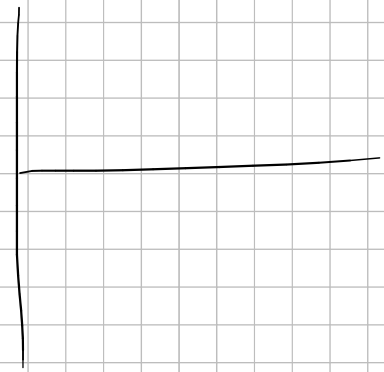
$$P(X < 10) = 1 - \underbrace{P(X \geq 10)}_{F(10)}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$

$$\Rightarrow P(X < 10) = 1 - 1 + e^{-10 \cdot 0.1} = e^{-1} = \underline{\frac{1}{e}} \approx 0.368$$

$$P(|X - 12| < 6)$$

$$x = 6 \qquad x = 18$$



$$P(X < 18) - P(X < 6) \qquad 6 < x < 18$$

$$F(18) - F(6) = 1 - e^{-0.1 \cdot 18} - 1 + e^{-0.1 \cdot 6}$$

$$= e^{-0.6} - e^{-1.8} = \underline{0.383}$$

$$F(x) = 1/2, \quad 1 - e^{-0.1 \cdot x} = \frac{1}{2} \longrightarrow e^{-0.1 x} = \frac{1}{2} \quad / \ln(\,)$$

$$-0.1 x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{x} = -10 \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{6.93}$$

8. Die logarithmische Normalverteilung ($LN(\mu, \sigma^2)$): X sei normalverteilt mit Mittel μ und Varianz σ^2. Bestimmen Sie die Dichte von $Y = e^X$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$g: \quad Y = e^X$$

$$g^{-1}: \quad x = \ln(y), \quad y > 0$$

$$|g^{-1}|\,dy : x = \left|\frac{1}{y}\right| \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{y}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$