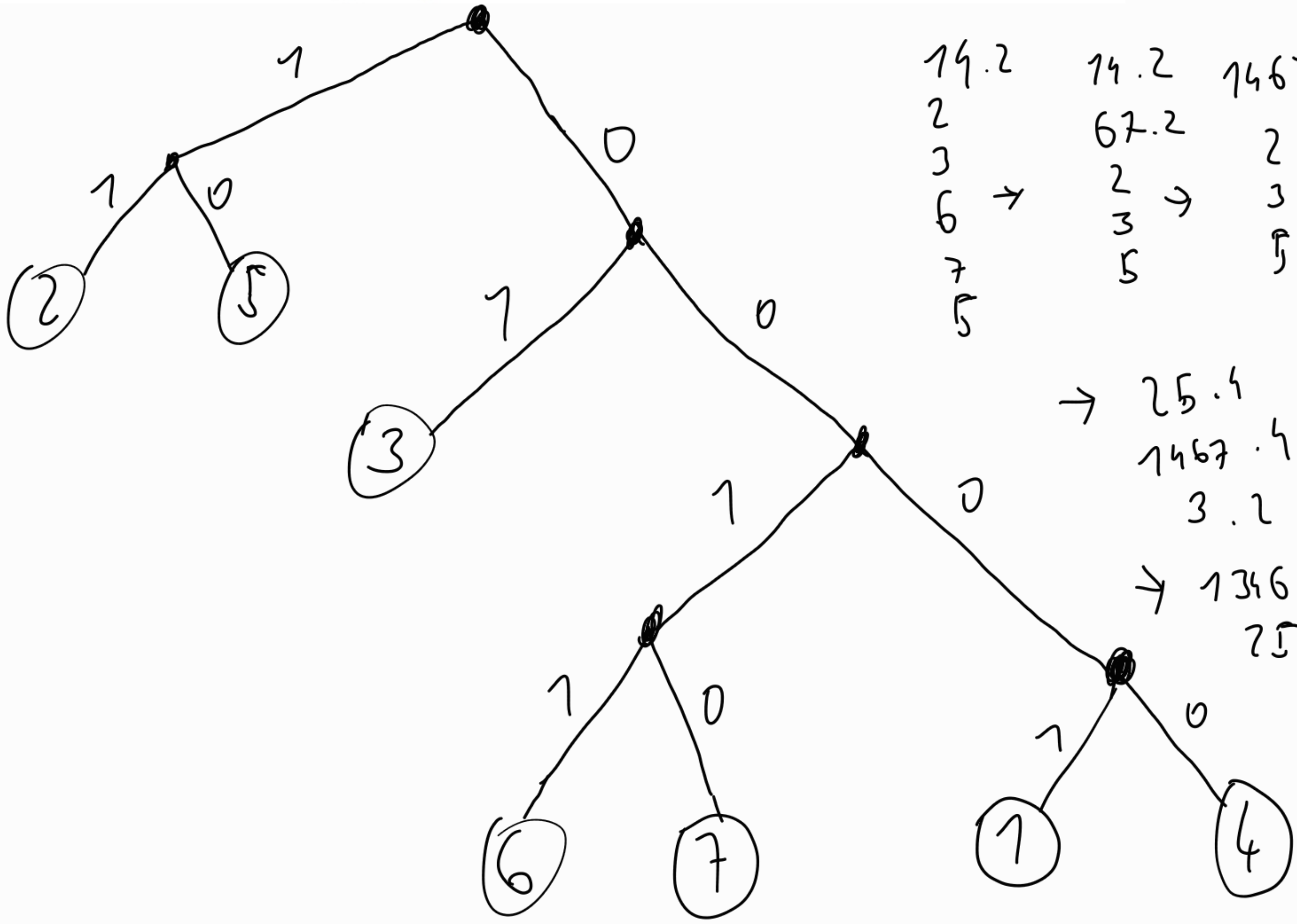
1. Gegeben Sei die Verteilung

1	2	3	4	5	6	7
0.1	0.2	0.2	0.1	0.2	0.1	0.1

Bestimmen Sie alle (drei) kanonischen Huffmancodes.



14 .2
2
3
6
7
5
→
14 .2
67 .2
2
3
5
→
1467 .4
2
3
5

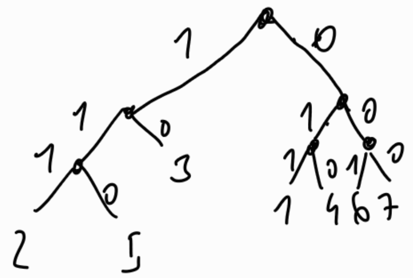
→ 25 .4
1467 .4
3 .2

→ 13467 .6
25

	Code
1	0001
2	11
3	01
4	0000
5	10
6	0011
7	0010

kanon. →

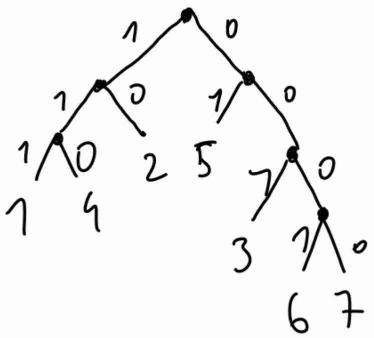
	Code
2	00
3	01
5	10
1	1100
4	1101
6	1110
7	1111



	Code
1	011
2	111
3	10
4	010
5	110
6	001
7	000

Kanon. →

	Code
3	00
1	010
2	011
4	100
5	101
6	110
7	111



	Code
1	111
2	10
3	001
4	110
5	01
6	0001
7	0000

Kanon. →

	Code
2	00
5	01
1	100
3	101
4	110
6	1110
7	1111

2. Bestimmen Sie im vorigen Beispiel die Entropie, den Shannon- und den Fano-Code.

$$H = \sum_i -p_i \cdot \log_2(p_i) \approx 2.72 \text{ Bits}$$

Shannon Code

$$l_i = \left\lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \right\rceil$$

f_{i-1} → ersten "l_i" Nachkommastellung der binär Darstellung

i	p_i	$\underbrace{\sum_n^{i-1} p_n}_{f_{i-1}}$	l_i	f_{i-1} binär*
5	0.2	0	3	000
2	0.2	0.2	3	001
3	0.2	0.4	3	011
4	0.1	0.6	4	1001
1	0.1	0.7	4	1011
6	0.1	0.8	4	1100
7	0.1	0.9	4	1110

Fano Code

$$f_{i-1} = \sum_n^{i-1} p_n$$

$$f_i = \sum_n^{i} p_n$$

$$l_i = \left\lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \right\rceil + 1$$

i	p_i	l_i	$(f_{i-1}+f_i)/2$	c_i
1	0.1	5	0.05	00001
2	0.2	4	0.2	0011
3	0.2	4	0.4	0110
4	0.1	5	0.55	10001
5	0.2	4	0.7	1011
6	0.1	5	0.85	11011
7	0.1	5	0.95	11110

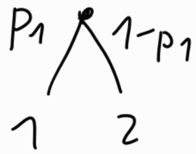
3. Bestimmen Sie für $m = 1, 2, 3, 4$ explizite Ausdrücke für $H^*(P)$ (Nehmen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeiten absteigend geordnet sind).

$m = 1, 2, 3, 4$

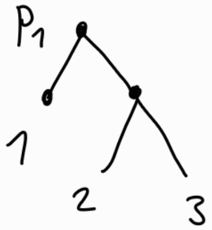
$$\rightarrow \quad H^*(P) = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i}$$

$m = 1$) $H^*(P) = 0$ (da $\log_2 1 = 0$) $\quad p_1 + 1 - p_1$

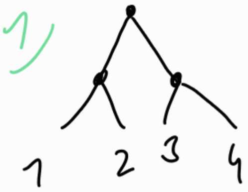
$m = 2$) $H^*(P) = p_1 \cdot 1 + (1 - p_1) \cdot 1 = 1$ Bit

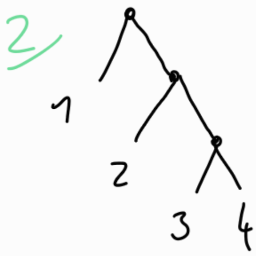


$m = 3$) $H^*(P) = p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 2 + (1 - p_1 - p_2) \cdot 2 = 2 - p_1$



$m = 4$)





1) $H^*(P) = 2\underbrace{(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)}_{1} = 2$

2) $H^*(P) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4 \cdot (1 - p_1 - p_2 - p_3) = 4 - 3p_1 - 2p_2 - p_3$

4. X und Y haben die gemeinsame Verteilung

	Y			
X	1	2	3	4
1	0.2	0	0.1	0.1
2	0	0.1	0.1	0
3	0	0.1	0	0.1
4	0	0	0.1	0.1

Bestimmen Sie $H(X), H(Y), H(X,Y), H(X|Y), H(Y|X), I(X,Y)$.

X	p_i
1	0.4
2	0.2
3	0.2
4	0.2

$H(X) = 1.92$

Y	p_i
1	0.2
2	0.2
3	0.3
4	0.3

$H(Y) = 1.97$

$$H(X,Y) = -\sum p_{ij} \cdot \log_2(p_{ij}) = 3.12$$

$$\cancel{H(X|Y=y) = -\sum_x p(x|y) \cdot \log_2(p(x|y))}$$

$$\cancel{H(X|Y) = \sum_x p_Y(y) \cdot H(X|Y=y) = 0.2 \cdot H(X|Y=1) + \dots}$$

$$\cancel{-0.2 \cdot \log(}$$

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1.15$$

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 1.2$$

$$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 0.77$$

5. Gegeben sei die Verteilung

$$P = (0.1, 0.4, 0.05, 0.2, 0.25)$$

Bestimmen sie einen Huffman-Code und den zugehörigen kanonischen Huffmancode, den Shannon-Code und den Fano-Code sowie die mittlere Unbestimmtheit und die Entropie.

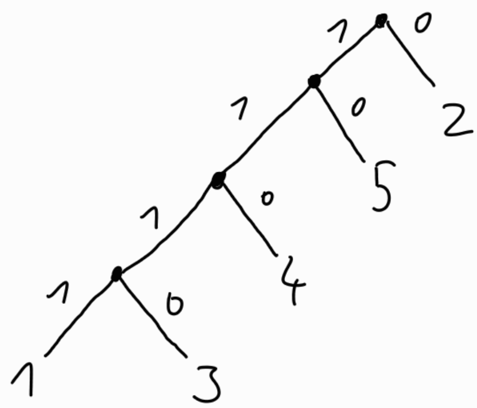
$$H(P) = -\sum_i p_i \cdot \log_2(p_i) = \underline{2.04}$$

$$H^*(P) = \sum_i p_i \cdot l_i$$

(Wortlängen vom Huffman-Baum entnehmen)

$$= 0.4 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.05 + 4 \cdot 0.1 = \underline{2.1}$$

Huffman-Code



i	Code	Kanon. Code
1	1111	1111
2	0	0
3	1110	1110
4	110	110
5	10	10

Shannon Code

$$l_i = \left\lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \right\rceil$$

i	p_i	$\sum_n^{i-1} p_n$	l_i	c_i
3	0.05	0	5	00000
1	0.1	0.05	4	0000
4	0.2	0.15	3	001
5	0.25	0.35	2	01
2	0.4	0.6	2	10

Fano Code

$$f_{i-1} = \sum_n^{i-1} p_n$$

$$f_i = \sum_n^{i} p_n$$

$$l_i = \left\lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \right\rceil + 1$$

i	p_i	l_i	$(f_{i-1}+f_i)/2$	c_i
1	0.1	5	0.05	00001
2	0.4	3	0.3	010
3	0.05	6	0.525	100001
4	0.2	4	0.65	1010
5	0.25	3	0.875	111

6. $(X_1, \ldots, X_4)$ seien unabhängig mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = 0.8$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 0.2$. Bestimmen Sie $H^*(X_1, \ldots X_n)$ für $n = 1, \ldots, 4$ und vergleichen Sie mit der Entropie.

$$H^*(X_1, X_2, X_3, X_4) = H^*(X_1) + H^*(X_2) + H^*(X_3) + H^*(X_4)$$

$$= 4 \cdot H^*(X_i) = 4 \cdot 1 = \underline{4}$$

$$H(X_1, X_2, X_3, X_4) = 4 \cdot H(X_i) = 4 \cdot (-0.8 \log_2(0.8) - 0.2 \log_2(0.2))$$

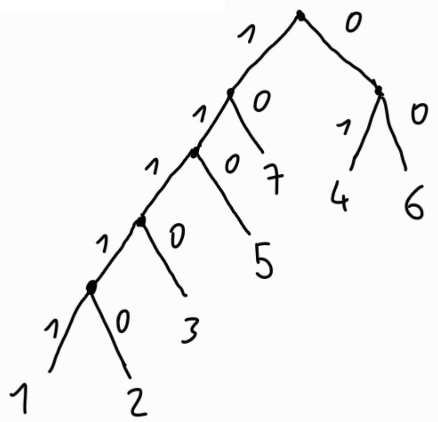
$$= \underline{2.887}$$

1 2 3 4 5 6 7

7. Gegeben Sei die Verteilung

$$P = (0.05, 0.03, 0.1, 0.22, 0.1, 0.25, 0.25)$$

Bestimmen sie einen Huffman-Code und den zugehörigen kanonischen Huffmancode, den Shannon-Code und den Fano-Code sowie die mittlere Unbestimmtheit und die Entropie.



Huffman-Code

i	Code	Kanon. Code
1	11111	11110
2	11110	11111
3	1110	1110
4	01	00
5	110	110
6	00	01
7	10	10

Shannon Code

$$l_i = \left\lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \right\rceil$$

i	p_i	$\sum_{n=1}^{i-1} p_n$	l_i	c_i
2	0.03	0	6	000000
1	0.05	0.03	5	00000
3	0.1	0.08	4	0001
5	0.1	0.18	4	0010
4	0.22	0.28	3	010
6	0.25	0.5	2	10
7	0.25	0.75	2	11

Fano Code

$f_{i-1} = \sum_{n}^{i-1} p_n$

$f_i = \sum_{n}^{i} p_n$

$l_i = \lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \rceil + 1$

i	p_i	l_i	$(f_{i-1}+f_i)/2$	c_i
1	0.05	6	0.025	000001
2	0.03	7	0.065	0001000
3	0.1	5	0.13	00100
4	0.22	4	0.29	0100
5	0.1	5	0.45	01110
6	0.25	3	0.625	101
7	0.25	3	0.875	111

$H(P) = -\sum_i p_i \cdot \log_2(p_i) = 2.51$

$H^*(P) = \sum_i p_i \cdot l_i$

(Wortlängen vom Huffman-Baum entnehmen)

$= 5 \cdot 0.05 + 5 \cdot 0.03 + 4 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}22$

$= 2.54$

8. In einer Urne befinden sich 4 Kugeln mit Nummern 1 bis 4. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. X sei die kleinere der beiden gezogenen Zahlen, Y die größere. Bestimmen Sie $I(X, Y)$.

1 2 3 4 → 2. werden gezogen

$$X = \min(g_1, g_2)$$
$$Y = \max(g_1, g_2)$$

$$P(X = k_1) = \frac{|\{(1,x) \mid x \in \{2,3,4\}| \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = k_2) = \frac{|\{(2,3);\ (2,4)\}| \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = k_3) = \frac{|\{(3,4), (4,3)\}|}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = k_4) = 0$$

$$P(Y = k_1) = 0$$
$$P(Y = k_2) = \frac{|\{(1,2), (2,1)\}|}{12} = \frac{1}{6}$$
$$P(Y = k_3) = \frac{|\{(3,1);(1,3)\}| \cdot 2}{12} = \frac{1}{3}$$
$$P(Y = k_4) = \frac{1}{2}$$

X \ Y	1	2	3	4
1	0	1/6	1/6	1/6
2	0	0	1/6	1/6
3	0	0	0	1/6
4	0	0	0	0

$\rightarrow$ $6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \log_2(6) = 2.584$

$H(X,Y) = 2.584$

$H(X) = \frac{3}{6} \cdot \log_2(2) + \frac{2}{6} \cdot \log_2(3) + \frac{1}{6} \cdot \log_2(6) =$

$H(Y) = 1,459$

$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 0.334$