Gruppe 1: Samir Hodzic, Ismail Yilmaz,
Filip Coja, Rita Schrabauer

1. Aus einer Urne mit drei weißen und zwei schwarzen Kugeln wird dreimal *mit* Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln

   (a) 3

   (b) 2

   weiße sind.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot 3$

2. Die Ereignisse A, B und C sind (vollständig) unabhängig. Zeigen Sie, dass dann auch A^C, B^C und C^C unabhängig sind.

$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = P(A^c)P(B^c)$

$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - P(A \cup B \cup C) =$

$= 1 - (P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(B)P(C) - P(A)P(C) + P(A)P(B)P(C)) =$

$= (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)) = P(A^c)P(B^c)P(C^c)$

3. in einer Urne liegen jeweils k Kugeln mit der Zahl k, $k = \underbrace{1, \ldots, 10}$ (also eine Kugel mit der Zahl 1, zwei mit 2,...). Eine Kugel wird gezogen, X sei die Zahl, die darauf steht. Bestimmen Sie die $\underbrace{\text{Wahrscheinlichkeitsfunktion}}$ und die Verteilungsfunktion von X.

$1 \cdot 1$
$2 \cdot 2$
$3 \cdot 3$
$4 \cdot 4$
$5 \cdot 5$
$6 \cdot 6$
$7 \cdot 7$
$8 \cdot 8$
$9 \cdot 9$
$10 \cdot 10$

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

3 7 11 15 19

10 11 34

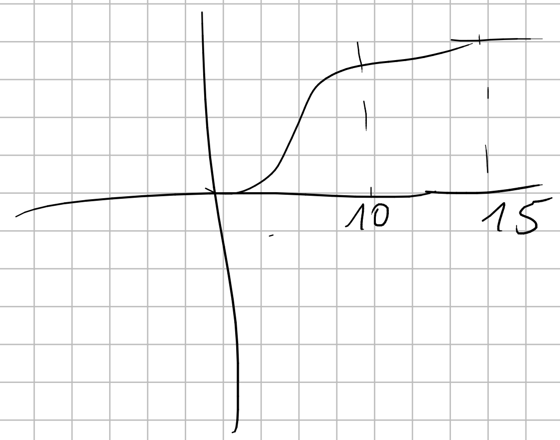
21 34

55

Mögliche 55

$$f(x_i) = P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{i}{55} & i \in (1 \ldots 10) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \begin{cases} 0 & i \leq 0 \\ \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{55} & i \in (1 \ldots 10) \\ 1 & i > 10 \end{cases}$$



4. ein Würfel wird dreimal geworfen, $X \leq Y \leq Z$ seien die der Größe nach geordneten Augenzahlen. Bestimmen Sie die Verteilung von Y.

$X \leq 1 \leq Z$	$\Rightarrow$	6
$X \leq 2 \leq Z$	$\Rightarrow$	10
$X \leq 3 \leq Z$	$\Rightarrow$	12
$X \leq 4 \leq Z$	$\Rightarrow$	12
$X \leq 5 \leq Z$	$\Rightarrow$	10
$X \leq 6 \leq Z$	$\Rightarrow$	6
		Σ 56

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 6/56 & x = 1 \\ 16/56 & x = 2 \\ 28/56 & x = 3 \\ 40/56 & x = 4 \\ 50/56 & x = 5 \\ 1 & x = 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

5. Nehmen Sie im Blutgruppenbeispiel aus der Vorlesung an, dass Mutter und Kind beide Blutgruppe AB haben. Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Möglichkeiten für die (unbekannte) Blutgruppe des Vaters.

$P(\text{Kind } AB \mid xy)$

$P(\text{Kind } AB \mid a_o) = 1/4$

Vater

xy		
ao	A	1/4
oa		1/4
aa		1/2
bo	B	1/4
ob		1/4
bb		1/2
ab	AB	1/2
ba		1/2

Mutter

xy
ab
ba

$p_a = \frac{9}{30}$

$p_b = \frac{2}{30}$

$p_o = \frac{19}{30}$

$$P(a_o \mid \text{Kind } AB) = \frac{P(a_o) \cdot P(\text{Kind } AB \mid a_o)}{P(\text{KIND } AB \mid \text{Mum } AB)}$$

$$P(\text{Kind } AB \mid \text{Mum } AB) = \overbrace{P(a_o \cup oa) \cdot 1/4 + P(aa) \cdot 1/2}^{A \mid \text{Kind } AB}$$
$$+ \underbrace{P(b_o \cup ob) \cdot 1/4 + P(bb) \cdot 1/2}_{B \mid \text{Kind } AB}$$
$$+ P(ab \cup ba) \cdot 1/2 \quad AB \mid \text{Kind } AB$$

A $P(A) \cdot P(K_{AB}|A) = \frac{\frac{9}{30} \cdot \frac{19}{30}}{2} + \frac{\left(\frac{9}{30}\right)^2}{2} = \frac{7}{50}$

B $P(B) \cdot P(K_{AB}|B) = \frac{\frac{2}{30} \cdot \frac{19}{30}}{2} + \frac{\left(\frac{2}{30}\right)^2}{2} = \frac{7}{300}$

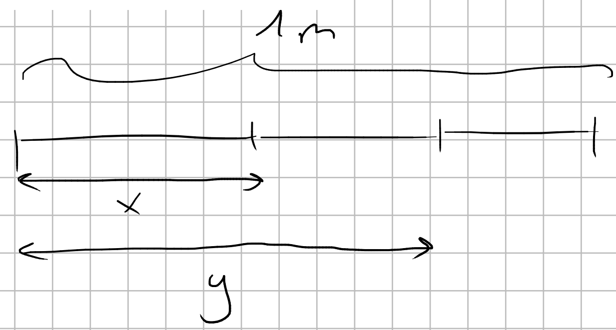
AB $P(AB) \cdot P(K_{AB}|AB)\ \frac{9}{30} \cdot \frac{2}{30} = \frac{1}{50}$

$P(A \mid \text{Kind } AB) = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{7}{50} + \frac{7}{300} + \frac{1}{50}} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{11}{60}} = \frac{42}{55}$

$P(B \mid \text{Kind } AB) = \frac{\frac{7}{300}}{\frac{7}{50} + \frac{7}{300} + \frac{1}{50}} = \frac{7/300}{\frac{11}{60}} = \frac{7}{55}$

$P(AB \mid \text{Kind } AB) = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{7}{50} + \frac{7}{300} + \frac{1}{50}} = \frac{1/50}{11/60} = \frac{6}{55}$

6. (Geometrische Wahrscheinlichkeit) Ein Stab von 1 Meter Länge wird an zwei zufällig gewählten Punkten durchgeschnitten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus den drei Stücken ein Dreieck zusammengesetzt werden kann?



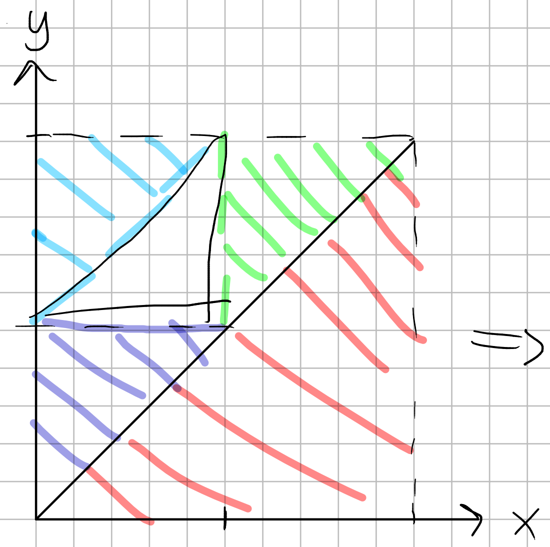
I $\quad 0 \le x \le y \le 1$

(1) $a+b > c$

(2) $a+c > b$

(3) $b+c > a$

$a = x$
$b = y-x$
$c = 1-y$



$\Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{4}}$

$\Rightarrow$ (1) $y > 1-y$

$\rightarrow y > \frac{1}{2}$

(2) $x + 1 - y > y - x$

$y < x + 1/2$

(3) $\cancel{y} - x + 1 - \cancel{y} > x$

$1 > 2x \rightarrow x < 1/2$

7. ein Würfel wird zweimal geworfen. Wir definieren die Ereignisse $A =$"die erste Augenzahl ist 6", $B =$"die zweite Augenzahl ist 6", $C =$"die beiden Augenzahlen sind gleich". Zeigen Sie: A, B und C sind paarweise unabhängig, aber nicht (vollständig) unabhängig.

$$\Omega = \{(x,y) \mid x,y \in (1,2,\ldots 6)\}$$

$$P(6,6) = \frac{1}{36} \quad ???$$

$$A = \{(6,x) \mid x \in (1,2,\ldots 6)\}$$

$$B = \{(x,6) \mid x \in (1,2,\ldots 6)\}$$

$$C = \{(x,y) \mid x=y,\ x,y \in (1,2,\ldots 6)\}$$

$$A \cap B = \{(6,6)\}$$

$$A \cap C = \{(6,6)\}$$

$$B \cap C = \{(6,6)\}$$

$$A \cap B \cap C = \{(6,6)\}$$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

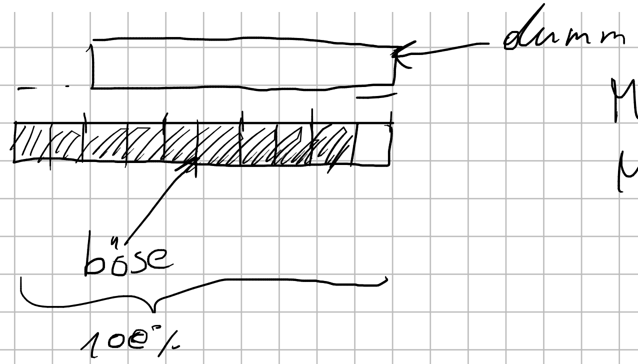
$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B) \checkmark$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(B) \cdot P(C) \checkmark$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(C) \checkmark$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \neq \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{6}} \cdot \underbrace{P(B)}_{\frac{1}{6}} \cdot \underbrace{P(C)}_{\frac{1}{6}}$$

8. Mein Großvater hat behauptet, dass 80% der Menschen dumm sind und 90% böse (er hat etwas drastischere Ausdrücke verwendet). Wenn das tatsächlich stimmt, wie groß ist dann der Anteil der Menschen, die dumm *und* böse sind, mindestens, und wie groß kann er höchstens sein?



Mind 70% dumm und böse

Max 80% dumm und böse