17. Mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikation berechne man die Extrema der Funktion $f(x,y)=x+y$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2=1$.

Wir bilden $\Phi(\vec{x},\lambda)=f(\vec{x})+\lambda_1\varphi_1(\vec{x})+\ldots+\lambda_m\varphi_m(\vec{x})$ und setzen $\operatorname{grad}\Phi(\vec{x},\vec{\lambda})=0$.
$f(x,y)=x+y$, NB: $x^2+y^2=1 \rightarrow x^2+y^2-1=0$

Lagrange Funktion: $\Phi(x,y,\lambda)=x+y+\lambda(x^2+y^2-1)=x+y+\lambda x^2+\lambda y^2-\lambda$

$\operatorname{grad}\Phi=\vec{0}$ … alle partiellen Ableitungen der 1. Ordnung ausrechnen:

$\Phi_x=1+2\lambda x=0 \rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}x$

$\Phi_y=1+2\lambda y=0 \rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}y$

$\Phi_\lambda=x^2+y^2-1=0$

nun setzen wir das ausgedrückte λ von Φ_x und Φ_y gleich:

$-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}y$ → daraus folgt offensichtlich, dass x = y gilt, nun in Φ_λ einsetzen:

$\Phi_\lambda=x^2+x^2-1=0 \rightarrow 2x^2=1 \rightarrow x^2=\frac{1}{2} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ bzw.

$\Phi_\lambda=y^2+y^2-1=0 \rightarrow 2y^2=1 \rightarrow y^2=\frac{1}{2} \rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ also $x=y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

daraus ergeben sich 4 versch. Möglichkeiten des Inputs:

$P1\left(+\sqrt{\frac{1}{2}},+\sqrt{\frac{1}{2}},\right)$ eingesetzt in $f(x,y)=+2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{4\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$P2\left(+\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},\right)$ eingesetzt in $f(x,y)=+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=0$

$P3\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},+\sqrt{\frac{1}{2}},\right)$ eingesetzt in $f(x,y)=-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=0$

$P4\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}},\right)$ eingesetzt in $f(x,y)=-2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=-\sqrt{4\cdot\frac{1}{2}}=-\sqrt{2}$

P1 und P4 sind die Extreme der Funktion