104.261 VO WS 2022/23 Analysis für Informatik

Jakob Kellner

Kontaktmöglichkeiten

Ich will mich beschweren!
Ich habe Fragen bzw. Kommentare.

- Organisatorische Fragen: In die entsprechende tuwel Gruppe.
- Wenn vertraulich/sehr individuell/sehr dringend: email (oder tuwel Direktnachricht) an mich.
- Alle emails aussschließlich von Ihrem TU StudentInnen-Account senden! (Spamfilter, Zuordenbarkeit, "Datenschutz")
- Fragen zu den UE: Falls vom Übungsleiter nicht anders verlautbart: UE-Leiter kontaktieren. (tuwel Direktnachricht oder email).
- Anonym:
  - "Stimmungszettel" via TISS.
  - Nach Ende: LVA-Bewertung via TISS. Bei Kommentaren zur Übung: Bitte Übungsgruppe oder Leiter (G1 . . . G8, Kellner oder dergl.) dazuschreiben.
  - Alternative: Fachschaft Informatik FSINF.

Organisatorisches zur VO

- Mi 9:15-10:45 (Termine in TISS)
- Prüfungstermine und -anmeldung im TISS.
- Andere Informationen über moodle=tuwel (nicht TISS).
- VO Prüfung: Multiple Choice Fragen die zufällig aus Fragepool ausgewählt werden. Sie können davor beliebig oft unbenotete Prüfungs-Simulationen online (moodle) durchführen.
- Keine Anwesenheitspflicht.
- Lecturetube Aufzeichnung (keine Garantie).
- Unterlagen auf moodle.
- python mit numpy, sympy, pyplot; auf jupyter
- Sprechstunde nach Voranmeldung, die nächste am 2022-10-13. (Weitere Termine moodle)

Literatur

- Sie benötigen zusätzlich zu den Unterlagen keine weitere Literatur.
- Wenn Sie sich für mehr Details interessieren (insbesondere Beweise), dann finden Sie diese in jedem beliebigen Einführungsbuch in Analysis (oder in Analyis für . . .).
- Bisher habe ich zur Vorbereitung vor allem folgendes angesehen:
    - Drmota et al, Mathematik für Informatik, Heldermann
    - Oberguggenberger und Ostermann, Analysis für Informatiker, eXamen.press
    - Peter Philip, Calculus I for COmputer Science, Lecture Notes 2022

Organisatorisches zu den UE

- Informationen über UE tuwel (nicht TISS) UND über VO tuwel.
- Anwesenheitspflicht.
- 12 Einheiten
- Übungstests in 4., 8. und 12. Einheit. (Teilweise multiple choice mit ähnlichen Fragen wie VO Prüfung, teils Aufgaben wie UE).
- Online Ankreuzen. Mindestens 60%. Gewichtung: Jeder Test 20%, Anzahl Kreuze 20%, Mitarbeit 20%.
- Kreuzen Sie Beispiele an wenn Sie sich bemüht haben, erfolgreiches Rechnen nicht nötig.

Computereinsatz

- Wir verwenden für Vorlesung und Übung open source software: jupyter, mit python3 und den python Paketen numpy, sympy, matplotlib, eventuell mehr wie ipywidgets etc.
- Installieren Sie das auf Ihrem laptop/PC. Falls Sie scheitern, kein großes Problem.
- Einige wenige UE Beispiele (NICHT die Übungstests!) verwenden Computer. Sie werden diese Beispiele nicht am eigenen Laptop via beamer vortragen, sondern nur in der UE-Stunde diskutieren. Alle diese Beispiele sind Bonusaufgaben.

Analysis: Ein Beispiel 1/4

Sinusfunktion $\sin(x)$, etwas allgemeiner:

$$a \sin(bx + c)$$

(a ist die Amplitude, b entspricht der Frequenz, c Phase.)
Allgegenwärtig in:

- Akkustik (schwingende Saite), Optik
- Elektronik, Signalverarbeitung
- Quantenphysik (komplexe Version): freies Teilchen

Frage

Warum?

Antwort

Lösung einer fundamentalen Differentialgleichung: $f''(x) = -f(x)$.

(Immer erste Näherung für Bewegung um Gleichgewichtspunkt.)

Analysis: Ein Beispiel 2/4

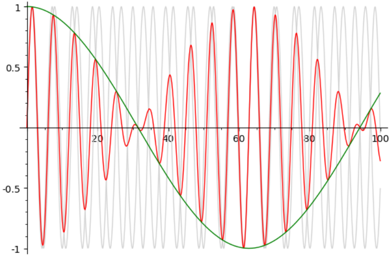
Summe (Überlagerung) von Sinusfunktionen.
Einfachster Fall: Gleiche Amplitude: $f(x) = \sin(x) + \sin(bx + c)$.
Spezialfälle:

- Selbe Frequenz $b = 1$, Phasenverschiebung $c \neq 0$: konstruktive / destruktive Interferenz.

$$\sin(x) + \sin(x + c) = 2\cos(\frac{c}{2})\sin(x + \frac{c}{2})$$

- Frequenzverschiebung $b \neq 1$ (und $c = 0$): Schwebung.

$\sin(x) + \sin(bx) =$
$= 2\cos(\frac{1-b}{2}x)\sin(\frac{1+b}{2}x)$



Schön zu beobachten in:

- Optische Effekte (Schillernde Farben auf Ölfilm, . . .)
- Doppelspalt-Effekte (Optik, oder QM: Elektronen)
- Akkustik: Schwebung
- . . .

Grundlage für viele technische Methoden (Interferometer. . .)

Analysis: Ein Beispiel 4/4

"Umgekehrte" Frage: Gegeben eine Welle die bereits eine Überlagerung (Summe) verschiedener Sinuswellen ist (mit verschiedenen Amplituden und Frequenzen).

Frage

Frage: Wie können wir herausfinden, aus welchen Sinuswellen die Welle besteht? ("Frequenzanalyse")

Antwort

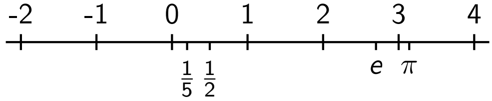
Fourier-Analyse

Es stellt sich heraus: ("Fast") jede Welle (periodische Funktion) lässt sich als Summe von Sinusfunktionen darstellen, und die Amplitude zur jeweiligen Frequenz läßt sich durch Integration berechnen.

Zahlen

Reelle und rationale Zahlen

Die reelle Zahlen $\mathbb{R}$ sind "alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl":



Das ist keine ordentliche Definition.
Einfacher zu verstehende Teilmengen von $\mathbb{R}$:

- Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ bzw. $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$. (Manchmal auch: $\mathbb{N} := \{0, 1, \dots\}$.)
- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Rationale Zahlen (Bruchzahlen) $\mathbb{Q}$ sind die Zahlen die sich als $\frac{n}{m}$ schreiben lassen, mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$.

("$\mathbb{Q}$ ist die Menge der Brüche" ist nicht ganz korrekt, $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ sind verschiedene Brüche aber dieselbe Zahl.)

Brüche kann man "kürzen". Bsp: $\frac{2}{3}$ ist die gekürzte Darstellung von $\frac{10}{15}$.

Nicht-rationale reelle Zahlen

Nicht alle “nützlichen” Zahlen sind in $\mathbb{Q}$. Beispiele: π, oder $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$, die (Quadrat)wurzel von 2, d.h., die (einzige) positive Zahl x die $x^2 = 2$ erfüllt.

Theorem

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Der Beweis ist ca 2500 Jahre alt, der erste bekannte indirekte Beweis: Angenommen $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ ist ein gekürzter Bruch. Quadrieren: $2m^2 = n^2$. Daher muss n^2 gerade sein, daher auch n, und n^2 muss sogar durch 4 teilbar sein, damit muss auch m durch 2 teilbar sein, Widerspruch.

Reelle Zahlen

"Arbeitsdefinition"

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind die Dezimalzahlen, d.h. Zahlen der Form
$d = \pm r_n r_{n-1} \dots r_0 , r_{-1} r_{-2} \dots$ mit $n \in \mathbb{N}$ und jedes $r_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Bsp: $\pi = 3.1415\dots$. Hier: $n = 0$, $r_0 = 3$, $r_{-1} = 1$, etc.

Zwei "Dezimalentwicklungen" können dieselbe reelle Zahl ergeben, z.B.
$12,37000\cdots = 12,36999\cdots$ (nämlich $12,37$).
(Auch $-0 = +0$ oder $01,000\cdots = 1,000\dots$.)

Bemerkung: Mathematisch keine gute Definition, mehr dazu später.

Dezimaldarstellung von Brüchen

Beispiele:

- $-\frac{5}{2} = -2,5 = -2,500\overline{0} = -2,499\overline{9} \ldots \ldots$
- $\frac{1}{3} = 0,33\overline{3} \ldots$
- $\frac{67}{110} = 0,60909\overline{09} \ldots$

Alles diese Dezimaldarstellungen sind "periodisch" (Periode mit Strich gekennzeichnet).

Es gilt allgemein:

Theorem

$r \in \mathbb{Q}$ genau dann wenn die Dezimaldarstellung von r periodisch ist.

Mathematische Sprache 1

“$r \in \mathbb{Q}$ genau dann wenn die Dezimaldarstellung von r periodisch ist.”

“Genau dann wenn” (Abk.: gdw), Englisch: “if and only if” abk. “iff”, mit Symbol $\leftrightarrow$ ist eine wichtige Phrase in der Mathematik:
$A \leftrightarrow B$ (oder: “A gdw B”), heißt:

- “Wenn A gilt dann gilt auch B, UND wenn B gilt dann gilt auch A.”
- Äquivalent dazu: “Wenn A gilt dann gilt auch B, UND wenn A nicht gilt dann gilt auch B nicht.”
- Äquivalent (und etwas “informatischer”): A und B haben denselben Wahrheitswert (`True` oder `False`), d.h.: `bool(A) == bool(B)`

Beweis 1/2: In $\mathbb{Q} \to$ periodisch

Ein Beispiel: $\frac{67}{110}$. Erinnern Sie sich an den Schul-Divisions-Algorithmus:

$$
\begin{array}{l}
67 \;:\; 110 = 0,60909\ldots \\
670 \\
\quad 100 \\
\quad 1000 \\
\qquad 100 \\
\qquad 1000 \\
\qquad\quad \ldots
\end{array}
$$

Allgemein: Bei der Division $p : q$ zweier ganzer Zahlen gibt es in jedem Schritt i für den Rest r_i nur endlich viele Möglichkeiten $0 \leq r_i < q$. Daher muss sich nach endlich vielen Schritten das Ergebnis wiederholen.

Beweis 2/2: Periodisch $\to$ in $\mathbb{Q}$

(Selbes) Beispiel: $x = \ 0,6\overline{09}\ldots$ (Periodenlänge 2).

$$\begin{array}{rcl} x &=& 0,6\overline{09}09\ldots \\ 100\cdot x &=& 60,9\overline{09}09\ldots \\ \hline 99\cdot x &=& 60,3 \end{array}$$

Daher: $990x = 603$ bzw. $x = \frac{603}{990} = \frac{67}{110}$

Allgemein: x habe einen periodischen Block P der länge ℓ:

$$\begin{array}{rl} x = & r_n\ldots\ r_0\ ,\ r_{-1}\ldots\ r_{-(m-\ell)}\ldots r_{-m}\,P\,P\,P\ldots \\ 10^\ell\cdot x = & r_n\ \ldots\ r_{-\ell}, r_{-\ell-1}\ldots\qquad P\qquad P\,P\,P\ldots \\ \hline (10^\ell-1)\cdot x = & ??\quad ,\quad ??\quad 0000\ldots \end{array}$$

Also hat $(10^\ell - 1)x$ endliche viele Nachkommastellen und ist daher in $\mathbb{Q}$, und daher auch $x \in \mathbb{Q}$.

Damit haben wir die Äquivalenz “in $\mathbb{Q}$ $\leftrightarrow$ periodisch” gezeigt (rechts impliziert links UND links impliziert rechts).

Maschinenzahlen

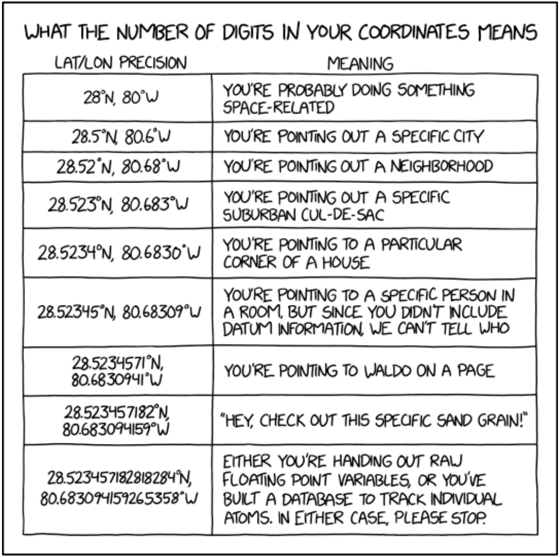
- Computer können nicht mit unendlichen vielen Nachkommastellen operieren.
- Eine Möglichkeit: Nach fixer Zahl von Nachkommastellen aufzuhören.
- Besser: Reelle Zahlen werden i.A. als (Varianten von) "floats" approximiert. Hier eine Dezimal-Variante ("wissenschaftliche Notation"):

Wiss. Notation / floats

Eine Zahl (ungleich 0) wird dargestellt als: $\pm r_0, r_{-1} r_{-2} \cdots \cdot 10^e$ mit $e \in \mathbb{Z}$, $r_i \in 0, \dots, 9$ und $1 \leq r_0 \leq 9$.

Bsp: Elektronenmasse $9.1093837 \cdot 10^{-31}$ kg

Bei Maschinenzahlen (als Bsp: double) gibt es feste Grenzen
für e (ca. $-1000 < e < 1000$), und
für die Anzahl der Nachkommastellen (bei "double" ca. 15.)



https://xkcd.com/2170/

Maschinenzahlen (3/3)

- Floats bieten für die meisten Fälle phantastische Genauigkeit.
- Rundungs"fehler" sind aber unvermeidlich und "unvorhersehbar". Die Spezifikationen des Verhaltens der floating point Arithmetik ist kompliziert und uneinheitlich.
- Moral:
  - Anzahl der Stellen != Genauigkeit
  - (Erst) bei der Ausgabe floats auf sinnvolle Zahl der (relevanten) Stellen runden.
  - Floats nie auf Gleichheit testen.
  - In der Informatik üblicherweise egal ob eine reele Zahl in $\mathbb{Q}$ ist oder nicht.

Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$

Wichtige Eigenschaft von $\mathbb{R}$ (ohne Beweis)

$\mathbb{R}$ is ordnungsvollständig, das heißt:
Jedes nach oben beschränkte (nichtleere) $A \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Supremum.

- $A \subseteq B$ heißt: A ist Teilmenge von $\mathbb{R}$ (Jedes Element von A ist auch in $\mathbb{R}$.)
- $x \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke von A heißt: $y \leq x$ für alle $y \in A$.
- A ist nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt.
- x ist Supremum von A, wenn es die kleinste obere Schranke ist.
  D.h. x ist obere Schranke, und kein $y < x$ ist obere Schranke.

Dasselbe gilt natürlich “nach unten”, die größte untere Schranke heißt Infimum.

Ordnungsvollständigkeit (oder nicht) von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Auch $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind (trivialerweise) ordnungsvollständig.
Hier hat jede nach oben beschränkte Teilmenge A sogar ein Maximum x.
x heißt Maximum, wenn $x \in A$ und $x \geq y$ für alle $y \in A$ (dh. Supremum das zusätzlich in A ist).

$\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig:

Gegenbeispiel: Sei x nicht in $\mathbb{Q}$ (z.B. $x = \sqrt{2}$).
Setze $A := \{r \in \mathbb{Q} : \ r < x\}$.
Dann hat A kein Supremum (in $\mathbb{Q}$): Wann immer $q \in \mathbb{Q}$ über allen Punkten von A liegt, dann ist ja (in $\mathbb{R}$ betrachtet) $x < q$, und es gibt ein $q' \in \mathbb{Q}$ dazwischen, d.h. $x < q' < q$. Dieses q' ist ebenfalls obere Schranke, daher ist q nicht kleinste obere Schranke.

- Eine Menge ist ein "ungeordnete Kollektion" von Objekten.
  Wir haben bereits $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ verwendet, oder die endliche Menge $\{0, 1, \dots, 9\}$.
- Auf $\mathbb{N}$ können wir natürlich eine (kanonische) Ordnung definieren und verwenden (und man bezeichnet die Struktur mit Ordnung und Operationen ebenfalls mit $\mathbb{N}$), aber als Menge ist es eine ungeordnete Ansammlung von Zahlen:
  $\{0, 1, 2, \dots\} \quad = \{1, 0, 3, 2, 5, 4, \dots\}$ Reihenfolge unerheblich.
  $(0, 1, 2, \dots) \quad = (1, 0, 3, 2, 5, 4, \dots)$ bei Folgen!
- $A := \{r \in \mathbb{R} : r < x\}$ definiert nun eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, nämlich die Menge derjenigen Zahlen r für die gilt $r < x$.
- (Endliche) Mengen in Python: `{3,5,8}=={8,3,5}`,
  $\{x \in a : x > 3\}$ entspricht `{x for x in a if x>3}`

Eine Warnung

"Ordnungsvollständig" hat nichts mit "vollständiger Induktion" zu tun.

Wir wissen dass in $\mathbb{N}$ "vollständige Induktion" gilt: Wenn $\varphi(0)$ gilt, und für alle $n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$ gilt, dann gilt $\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dasselbe formaler:

$$\Big(\varphi(0) \ \wedge \ (\forall n \in \mathbb{N}) \left(\varphi(n) \to \varphi(n+1)\right)\Big) \ \to \ (\forall n \in \mathbb{N})\varphi(n)$$

Das gilt nicht in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$! (Gegenbeispiel? Ü.)

Bemerkung: Bessere Definitionen von $\mathbb{R}$

(Ohne Details, nicht Prüfungsstoff.)

Unsere Definition von $\mathbb{R}$ ist aus mathematischer Sicht schlecht:

- Künstliche Abhängigkeit von Basis 10,
- Suggeriert "Operationalität" die in Wirklichkeit nicht klar ist. (Wie addiert man? Das sollte man ja "von hinten"? Etc.)
- ...

Mathematisch besser:

- Als Ordnungs-Vervollständigung von $\mathbb{Q}$: Eine reelle Zahl r ist eine Teilmenge A von $\mathbb{Q}$ mit folgender Eigenschaft: A ist nach oben beschränkt, und $q_2 \in A$, $q_1 < q_2$ impliziert $q_1 \in A$. (Post mortem: $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$.)
- (Alternative: Cauchy-konvergente Folgen in $\mathbb{Q}$.)

Folgen

Folgen

Unendliche Abfolge ("links" mit Beginn, "rechts" ohne Ende) reeller Zahlen:

$$\bar{a} = (a_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_\ell, \dots)$$

Äquivalent: Eine Folge ist eine eine Funktion f von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{R}$, in Symbolen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$. (Äquivalz via: $f(n) = a_n$.)

(Eine Funktion $f : A \to B$ ordnet jedem "input" aus dem Definitionsbereich A einen eindeutigen "output", im Wertebereich B zu.)

Manchmal beginnt man mit 1 zu indizieren:

$$\bar{a} = (a_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_\ell, \dots)$$

Oder äquivalent: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Folgen: Beispiel

Beispiel einer Folge: $\bar{a} = (3, 3.1, 3.14, 3.145, \dots)$ (Approximation an π)

$a_0 = 3$, $a_1 = 3.1$, $a_2 = 3.14$, etc.

- Das i von a_i heißt "Index", und $\mathbb{N}_0$ ist die "Indexmenge".
- Das a_i selbst heißt "Folgeglied" oder einfach "Element der Folge".
- Das Folgeglied mit Index 2 ist hier also 3.14.

Bemerkung: Endliche Folgen kennen Sie aus der Informatik
Python: `x=[3,2,6]` (type `list`), Folgenglied mit index 1: `x[1] == 2`

Folgen: mehr Beispiele, Wachstumsraten

- Konstante Folgen, Bsp.: $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots)$
- $(-1)^n$, d.h. $(1, -1, 1, -1, \dots)$
- Arithmetische Folgen: a_0 beliebig, $a_n = a_0 + n \cdot \ell$.
  Bsp.: $a_0 = 100$, $\ell = 5$ ergibt $(100, 105, 110, \dots)$
- Geometrische Folgen: a_0 beliebig, $a_\ell = k^\ell \cdot a_0$. Bsp.: $a_0 = 4$, $k = 2$ ergibt $(4, 8, 16, 32, \dots)$.
- Geometrische Folge wächst exponentiell. Wenn $k > 1$, dann wächst sie (viel) schneller als jede arithmetische Folge.
- Wichtige "Wachstumsraten": Für ausreichend große n gilt ($k > 2$):

  $$\log n \ll \sqrt[k]{n} \ll \sqrt{n} \ll n \ll n \log n \ll n^2 \ll n^3 \ll 2^n$$

  (Die entsprechenden Folgen gehen alle "gegen unendlich".)
- Rekursiv definierte Folge, z.B. Fibbonacci-Folge:
  $a_0 = a_1 = 1$, $a_n := a_{n-2} + a_{n-1} \quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$.

Folgen: Grenzwerte (Limiten)

Sei $\bar{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, $b \in \mathbb{R}$.

- b ist der Limes (oder: Grenzwert) von $\bar{a}$ wenn "a_n beliebig nahe zu b kommt für große n".
- Genauer: (Für alle reellen $\epsilon > 0$)(gibt es ein n_0 in $\mathbb{N}$) (sodaß für alle $n > n_0$ gilt:) Der Unterschied zwischen b und a_n ist kleiner als ϵ.
- Dasselbe (semi)formal:

Definition (Grenzwert)

$b = \lim(\bar{a})$ gdw $(\forall \epsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n > n_0)|b - a_n| < \epsilon$

Es muss keinen Grenzwert geben, aber wenn es eines gibt dann ist es eindeutig (Beweis? Übung.), daher "der" Grenzwert.

- Wenn eine Folge $\bar{a}$ einen Grenzwert hat, heißt sie konvergent, sonst divergent.

Mathematische Sprache

Zur mathematischen Notation/Sprache: Wir haben definiert:

$$b = \lim(\bar{a}) \text{ gdw } (\forall \epsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n > n_0)|b - a_n| < \epsilon$$

"gdw" Abkürzung "für genau dann wenn". Bei Definitionen sagt man oft auch einfach "wenn" bzw "if" und meint genau dasselbe.
(Bei Sätzen wichtiger Unterschied zwischen "wenn" und "gdw"!
Bsp: "$x > 4$ wenn $x = 10$" ist wahr, "$x > 4$ gdw $x = 10$" nicht.)

Weitere Symbole:

$\forall x$	"für alle x"
$\forall y \in \mathbb{R}$	"für alle y in $\mathbb{R}$"
$\forall n > 3$	"für alle $n > 3$ (aus dem Kontext ob n aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, …)
$\exists x$	"es gibt ein x", etc.

$\forall$ und $\exists$ nennt man "Quantoren". Quantorenreihenfolge wichtig!.

Bsp: $(\forall x)(\exists y)x = y + 1$ gilt in $\mathbb{N}$, aber $(\exists y)(\forall x)x = y + 1$ nicht.

Folgen: Grenzwerte (Limiten)

Beispiele:

- $(3, 3.1, 3.14, \dots)$ konvergiert gegen π
- $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ konvergiert gegen 0
- $(1, -1, 1, -1, \dots)$ konvergiert nicht.
- $(1, 2, 3, \dots)$, allgemeiner alle (nichtkonstanten) arithmetischen Folgen, oder die Fibonacci-Folge, etc, konvergiert nicht.

Die Folgen des letzten Punkts "gehen gegen unendlich":

Definition

$$\lim(\bar{a}) = \begin{Bmatrix} \infty \\ -\infty \end{Bmatrix} \text{ gdw } (\forall M \in \mathbb{R})\, (\exists n_0 \in \mathbb{N})\, (\forall n > n_0) \begin{cases} a_n > M \\ a_n < M \end{cases}$$

Wir sagen $\bar{a}$ "geht gegen (plus/minus) unendlich"; $\lim \bar{a} = \infty$ ist nur eine Schreibweise, so ein $\bar{a}$ konvergiert nicht und hat keinen Grenzwert.