# Musterbeispiele: Aussagenlogik (Lösung)

**3.0 VU Formale Modellierung**

Lara Spendier, Gernot Salzer

WS 2011

**Aufgabe 1** Gegeben seien die folgenden Aussagen:

$A$: Es ist eiskalt.
$B$: Es schneit.

Drücken Sie die nachfolgenden Sätze als aussagenlogische Formeln mit Hilfe der Aussagenvariablen $A$ und $B$ aus. Geben Sie außerdem für jede der Formeln die zugehörige Wahrheitstafel an und kennzeichnen Sie die erfüllenden bzw. widerlegenden Variablenbelegungen als solche.

(a) Es ist eiskalt und es schneit.

(b) Es ist eiskalt, aber es schneit nicht.

(c) Es ist nicht eiskalt und es schneit nicht.

(d) Entweder es schneit oder es ist eiskalt (oder beides).

(e) Entweder es schneit oder es ist eiskalt, aber es schneit nicht, wenn es eiskalt ist.

(f) Wenn es schneit, ist es eiskalt.

***Lösung.***

(a) $A \wedge B$

(b) $A \wedge \neg B$

(c) $\neg A \wedge \neg B$

(d) $A \vee B$

(e) $(A \vee B) \wedge (A \supset \neg B)$

(f) $B \supset A$

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \wedge \neg B$ | $\neg A \wedge \neg B$ | $A \vee B$ | $(A \vee B) \wedge (A \supset \neg B)$ | $B \supset A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 (w) | 0 (w) | 1 (e) | 0 (w) | 0 (w) | 1 (e) |
| 0 | 1 | 0 (w) | 0 (w) | 0 (w) | 1 (e) | 1 (e) | 0 (w) |
| 1 | 0 | 0 (w) | 1 (e) | 0 (w) | 1 (e) | 1 (e) | 1 (e) |
| 1 | 1 | 1 (e) | 0 (w) | 0 (w) | 1 (e) | 0 (w) | 1 (e) |

**Aufgabe 2** Gegeben sei die folgende Wahrheitstafel:

| $A$ | $B$ | $(a)$ | $(b)$ | $(c)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Finden Sie entsprechende Formeln für $(a), (b)$ und $(c)$, die nur die Konnektive $\wedge, \vee$ und $\neg$ enthalten.

***Lösung.***

(a) $\neg B \vee A$

(b) $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ oder $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

(c) $\neg A \wedge B$

**Aufgabe 3** Geben Sie an, welche der folgenden Formeln äquivalent sind. Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe einer Wahrheitstafel!

(a) $\neg(A \wedge B \wedge \neg C) = \neg(A \wedge \neg B) \supset (\neg A \vee (B \supset C))$

(b) $\neg A \equiv (B \supset C) = \neg(A \supset \neg B) \vee C$

***Lösung.***

(a) Die beiden Formeln sind äquivalent:

| $A$ | $B$ | $C$ | $\neg(A \wedge B \wedge \neg C)$ | $\neg(A \wedge \neg B)$ | $\supset$ | $(\neg A \vee (B \supset C))$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | ✓ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |

(b) Die beiden Formeln sind nicht äquivalent:

| $A$ | $B$ | $C$ | $\neg A \equiv (B \supset C))$ | $\neg(A \supset \neg B) \vee C$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | ↯ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | ✓ |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ✓ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | ↯ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | ↯ |

**Aufgabe 4** Gegeben seien die folgenden Formeln. Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich.

(a) $(A \wedge \neg A) \supset (B \vee \neg B)$

(b) $\neg((A \wedge B) \supset (A \wedge (B \vee C)))$

***Lösung.***

(a)

$$
\begin{array}{lll}
 & (A \wedge \neg A) \supset (B \vee \neg B) & \\
= & \neg(A \wedge \neg A) \vee (B \vee \neg B) & X \supset Y = \neg X \vee Y \\
= & (\neg A \vee \neg\neg A) \vee (B \vee \neg B) & \neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y \\
= & (\neg A \vee A) \vee (B \vee \neg B) & \neg\neg X = X \\
= & \top \vee (B \vee \neg B) & X \vee \neg X = \top \\
= & \top & X \vee \top = \top
\end{array}
$$

Alternativ:

$$
\begin{array}{lll}
 & (A \wedge \neg A) \supset (B \vee \neg B) & \\
= & (A \wedge \neg A) \supset \top & X \vee \neg X = \top \\
= & \neg(A \wedge \neg A) \vee \top & X \supset Y = \neg X \vee Y \\
= & \top & X \vee \top = \top
\end{array}
$$

(b) *Hinweis*: Das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz werden in dieser Lösung implizit angewendet. Für die Übung und in der Prüfung ist die implizite Anwendung dieser Gesetze ebenfalls zulässig.

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg((A \wedge B) \supset (A \wedge (B \vee C))) & \\
= & \neg(\neg(A \wedge B) \vee (A \wedge (B \vee C))) & X \supset Y = \neg X \vee Y \\
= & \neg\neg(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge (B \vee C)) & \neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y \\
= & A \wedge B \wedge \neg(A \wedge (B \vee C)) & \neg\neg X = X \\
= & A \wedge B \wedge (\neg A \vee \neg(B \vee C)) & \neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y \\
= & A \wedge B \wedge (\neg A \vee (\neg B \wedge \neg C)) & \neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y \\
= & (A \wedge B \wedge \neg A) \vee (A \wedge B \wedge \neg B \wedge \neg C) & X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \\
= & (B \wedge \bot) \vee (A \wedge \bot \wedge \neg C) & X \wedge \neg X = \bot \\
= & \bot \vee \bot & X \wedge \bot = \bot \\
= & \bot &
\end{array}
$$

**Aufgabe 5** Geben Sie an, welche der folgenden logischen Konsequenzen gültig sind.

(a) $\neg A \vee B, \neg B \vee A \models A \equiv B$

(b) $A \supset B, A \supset C \models B \supset C$

(c) $A \supset B, B \supset C \models A \supset C$

***Lösung.***

(a)

| $A$ | $B$ | $\neg A \vee B,$ | $\neg B \vee A$ | $\models_I$ | $A \equiv B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | ✓ | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ | 1 |

Daher gültig.

(b)

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \supset B,$ | $A \supset C$ | $\models_I$ | $B \supset C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | (✓) | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | (✓) | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | $\lightning$ | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | (✓) | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | (✓) | 1 |

Aufgrund von Zeile 3 nicht gültig.

(c)

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \supset B,$ | $B \supset C$ | $\models_I$ | $A \supset C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | ✓ | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | ✓ | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ | 1 |

Daher gültig.

**Aufgabe 6** Finden Sie zu jeder der folgenden Formeln äquivalente Formeln in disjunktiver und konjunktiver Normalform. Wenden Sie beide Methoden an, die Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben (semantische und algebraische Methode).

(a) $(A \wedge \neg B) \vee \neg(A \supset \neg C)$

(b) $((A \equiv B) \supset (C \supset \neg(B \vee \bot))) \wedge (\bot \subset C)$

***Lösung.***

(a) *Semantische Methode:*

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \wedge \neg B) \vee \neg(A \supset \neg C)$ | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | $D_{000}$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $D_{001}$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | $D_{010}$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | $D_{011}$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $K_{100}$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | $K_{101}$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | $D_{110}$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | $K_{111}$ |

DNF: $K_{100} \vee K_{101} \vee K_{111} = (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$
KNF: $D_{000} \wedge D_{001} \wedge D_{010} \wedge D_{011} \wedge D_{110} = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$

*Algebraische Methode:*
DNF: $(A \wedge \neg B) \vee \neg(A \supset \neg C) = (A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg A \vee \neg C) = (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C)$
KNF: $(A \wedge \neg B) \vee \neg(A \supset \neg C) = (A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg A \vee \neg C) = (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C) = A \wedge (\neg B \vee C)$

(b) *Semantische Methode:*

| $A$ | $B$ | $C$ | $((A \equiv B) \supset (C \supset \neg(B \vee \bot))) \wedge (\bot \subset C)$ | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | $K_{000}$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $D_{001}$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | $K_{010}$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | $D_{011}$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $K_{100}$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | $D_{101}$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $K_{110}$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | $D_{111}$ |

DNF: $K_{000} \vee K_{010} \vee K_{100} \vee K_{110} = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$
KNF: $D_{001} \wedge D_{011} \wedge D_{101} \wedge D_{111} = (A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

*Algebraische Methode - DNF*

1. Alle Junktoren durch $\wedge, \vee, \neg$ ersetzen:[1]
   $F = ((A \equiv B) \supset (C \supset \neg(B \vee \bot))) \wedge (\bot \subset C)$
   $= ((A \equiv B) \supset (C \supset \neg(B \vee \bot))) \wedge (\bot \vee \neg C)$

[1] $\bot, \top$ können in jedem Schritt sofort eliminiert werden und werden in den Lösungen nicht extra ausgewiesen. Im allgemeinen Schema kommt dieser Schritt erst später vor, da durch die Anwendung der vorherigen Schritte neue $\bot, \top$ enstehen können.

$= ((A \equiv B) \supset (C \supset \neg B)) \wedge \neg C$
$= (\neg(A \equiv B)^{(*)} \vee (C \supset \neg B)) \wedge \neg C$
$= (\neg((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \vee (C \supset \neg B)) \wedge \neg C$
$= (\neg((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \vee (\neg C \vee \neg B)) \wedge \neg C$

2. Negationen nach innen verschieben, Doppelnegation eliminieren:
   $= ((\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg B)) \vee (\neg C \vee \neg B)) \wedge \neg C$
   $= (((\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg\neg B)) \vee (\neg C \vee \neg B)) \wedge \neg C$
   $= (((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)) \vee (\neg C \vee \neg B)) \wedge \neg C$
3. Distributivgesetz:
   Wir distribuieren $\neg C$ aus:
   $= (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee \neg C \vee (\neg B \wedge \neg C)$
4. Absorptionsgesetz:
   Wir wenden das Absorptionsgesetz 3x auf $\neg C$ an:
   $= \neg C$

*Algebraische Methode - KNF*

1. Alle Junktoren durch $\wedge, \vee, \neg$ ersetzen:
   $F = ((A \equiv B) \supset (C \supset \neg(B \vee \perp))) \wedge (\perp \subset C)$
   $= ((A \equiv B) \supset (C \supset \neg(B \vee \perp))) \wedge (\perp \vee \neg C)$
   $= ((A \equiv B) \supset (C \supset \neg B)) \wedge \neg C$
   $= (\neg(A \equiv B)^{(*)} \vee (C \supset \neg B)) \wedge \neg C$
   $= (\neg((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee (C \supset \neg B)) \wedge \neg C$
   $= (\neg((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee (\neg C \vee \neg B)) \wedge \neg C$
2. Negationen nach innen verschieben, Doppelnegation eliminieren:
   $= ((\neg(A \wedge B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)) \vee (\neg C \vee \neg B)) \wedge \neg C$
   $= (((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg\neg A \vee \neg\neg B)) \vee (\neg C \vee \neg B)) \wedge \neg C$
   $= (((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)) \vee (\neg C \vee \neg B)) \wedge \neg C$
3. Distributivgesetz:
   Wir distribuieren $(\neg C \vee \neg B)$:
   $= (\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg B) \wedge (A \vee B \vee \neg C \vee \neg B) \wedge \neg C$
4. Absorptionsgesetz:
   Wir wenden das Absorptiongesetz 2x auf $\neg C$ an:
   $= \neg C$

$^{(*)}$Abhängig davon, ob wir die DNF oder die KNF konstruieren, ersetzen wir $(A \equiv B)$ in diesem Beispiel mit $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ (DNF) bzw. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (KNF). Aufgrund der Negation $\neg(A \equiv B)$, wählen wir für die DNF die Ersetzungsformel mit $\wedge$ und für die KNF jene Ersetzungsformel mit $\vee$ als äußersten Junktor.

**Aufgabe 7** Track hat Geburtstag. Tick und Trick wollen ihn mit einem selbstgemachten Kuchen überraschen und überlegen, welchen sie backen sollen. Zur Auswahl stehen Schokoladekuchen und Guglhupf. Das Rezept für den Schokoladekuchen sieht als Zutaten Mehl, Eier, Milch, Kakao und Marmelade vor. Für den Guglhupf benötigt man Eier, Mehl, Milch und Kakao.

Tick sagt: „Track isst nur Kuchen in dem Kakao enthalten ist.“

Trick entgegnet: „Ich weiß, dass Track den Kuchen nicht essen wird, wenn er Marmelade enthält.“

Tick sagt: „Alle anderen Zutaten des Kuchens sind Track jedenfalls egal.“

(a) Formulieren Sie die beschriebene Situation inklusive der Einschränkungen durch aussagenlogische Formeln aus. Geben Sie dabei zu jeder Elementaraussage an, was sie bedeuten soll. Wählen Sie möglichst atomare[2] Elementaraussagen.

(b) Welchen Kuchen werden Tick und Trick für Track backen? Begründen Sie Ihre Aussage!

***Lösung.*** Wir benützen die folgenden atomaren Elementaraussagen: $K \ldots$ Kakao, $M \ldots$ Marmelade, $S \ldots$ Schokoladekuchen und $G \ldots$ Guglhupf.

(a)
1. $F_1 := S \vee G$ „Es wird Schokokuchen oder Guglhupf gebacken.“
2. $F_2 := G \supset K$ „Guglhupf bedeutet Kakao.“
3. $F_3 := S \supset (M \wedge K)$ „Schokokuchen bedeutet Marmelade und Kakao.“
4. $F_4 := \neg M$
5. $F_5 := K$

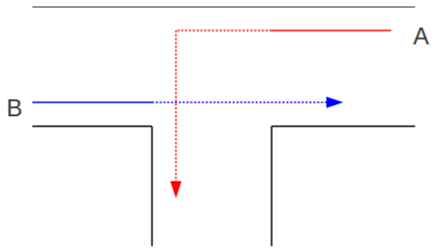
(b) Mit den aufgestellten Formeln $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ gilt es nun zu beantworten: $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \models G$ oder $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \models S$?

| $G$ | $K$ | $M$ | $S$ | $G \vee S$ | $G \supset K$, | $S \supset (M \wedge K)$, | $\neg M$, | $K$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ✓ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | |

Aufgrund von Zeile 13: $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \models G$. Tick und Trick werden einen Guglhupf backen.

[2] „atomar“ im Sinn von „nicht weiter unterteilbar“.

**Aufgabe 8** Die Stadt Wien möchte die folgende Kreuzung analyiseren und bittet deshalb einen Logiker um Hilfe.




(a) Formulieren Sie umgangssprachliche Anforderungen, die sicherstellen, dass die Verkehrsteilnehmer auf den Spuren $A$ und $B$ nicht zusammenstoßen. Sie brauchen dabei nur zwischen "fährt" und "fährt nicht" zu unterscheiden.

(b) Überführen Sie Ihre umgangssprachliche Anforderungen aus Teil a in eine aussagenlogische Formel. Begründen Sie, warum es in Ihrer Modellierung zu keinem Crash kommt.

***Lösung.***

(a)
1. $A$ und $B$ dürfen nicht gleichzeitig fahren.
2. *oder:* Wenn $A$ fährt, darf $B$ nicht fahren.
3. ...

(b) Mögliche Lösungen:
1. $F_1 := \neg(A \wedge B)$
2. *oder:* $F_2 := A \supset \neg B$
3. ...

*Hinweis:* Werfen Sie auch einen Blick auf das Programm logictraffic[3] mit dem man diese und ähnliche Kreuzungen modellieren kann!

[3] `http://www.swisseduc.ch/informatik/infotraffic/logictraffic/`